

ALBERI

resistenza a fatica e velocità critiche

In questa puntata, proseguiremo quanto introdotto su Organi di trasmissione di marzo 2014 (n.d.R.) sul dimensionamento degli alberi. In particolare, riprenderemo l'esempio già svolto, di cui è stato fatto un primo dimensionamento e una verifica statica, estendendolo con la verifica a fatica, la verifica della massima inflessione e il calcolo delle velocità critiche.

La figura 1 e la tabella 1 riportano i dati e i risultati ottenuti dal predimensionamento e verifica statica svolti puntata precedente. Nella puntata precedente, con un primo dimensionamento di massima ed una successiva verifica statica si è scelta la forma costruttiva dell'albero, che prevede, in accordo con figura 1, la presenza di due ruote dentate, una montata con chiavetta ed una lavorata di pezzo. Data la presenza delle ruote dentate, l'albero sarà soggetto a cicli di carico dovuti al fatto che le forze date dall'ingranamento delle ruote dentate sono fisse nello spazio mentre l'albero ruota, risultando pertanto soggetto al fenomeno della fatica. Per questo motivo risulta necessaria una verifica in tal senso. Nel caso di verifica di resistenza a fatica bisogna tenere in considerazione diversi fattori. In generale la verifica a fatica di un albero deve sempre considerare i seguenti effetti:

- effetto dell'intaglio (coefficiente di intaglio a fatica K_f , passaggio dal limite di fatica della provetta a quello del componente);
- finitura superficiale (coefficiente b_2);
- effetto dimensionale (coefficiente b_3).

Come noto la presenza di intagli in un componente meccanico comporta una concentrazione locale del-

le tensioni. Tale concentrazione è un'altra delle cause innescanti le cricche a fatica che portano ad un cedimento del componente. Dalle prove sperimentali si nota, però, che l'intaglio, nel caso di carichi affaticanti, non è così severo come indicherebbe il fattore teorico di concentrazione degli sforzi. Al fine di poter utilizzare le stesse tabelle e grafici, il fattore di concentrazione degli sforzi teorico K_t viene allora ridotto introducendo un "fattore di sensibilità all'intaglio q " il quale opera una diminuzione del K_t secondo l'equazione successiva

$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$

Il fattore di sensibilità all'intaglio può essere calcolato in accordo con relazioni empiriche quali quella proposta da Neuber e quella proposta da Peterson rispettivamente

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\rho^i / r}}$$

con

$$\rho^i \cong \left(\frac{140}{R_m} \right)^2 ; \quad q = \frac{1}{1 + a / r}$$

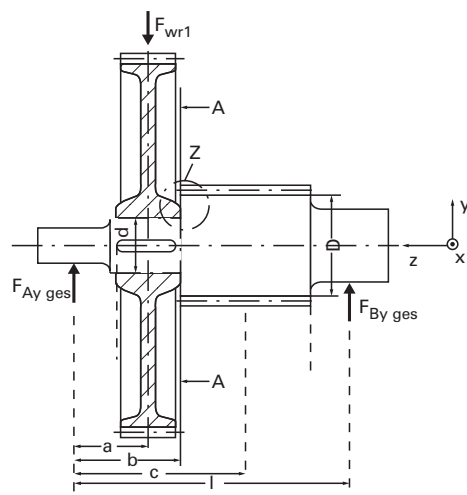


Fig. 1 - Geometria scelta per l'albero.

TAB. 1 - DATI GEOMETRICI E RISULTATO DELLA VERIFICA STATICA

Momento torcente nominale T_{nom} [Nm]	600
Angolo di pressione delle dentature α_w [°]	20
Raggio r_1 [mm]	60
Raggio r_2 [mm]	80
Lunghezza a [mm]	80
Lunghezza b [mm]	110
Lunghezza c [mm]	190
Lunghezza l [mm]	300
Diametro d [mm]	50
Diametro D [mm]	110
Raggio di raccordo r [mm]	1
Coefficiente di sicurezza statico nell'ipotesi di accettare plasticizzazione locale.	$S_s = \frac{\sigma_{amm}}{\sigma_{GT}} = \frac{630 \text{ MPa}}{66 \text{ MPa}} = 9.5$

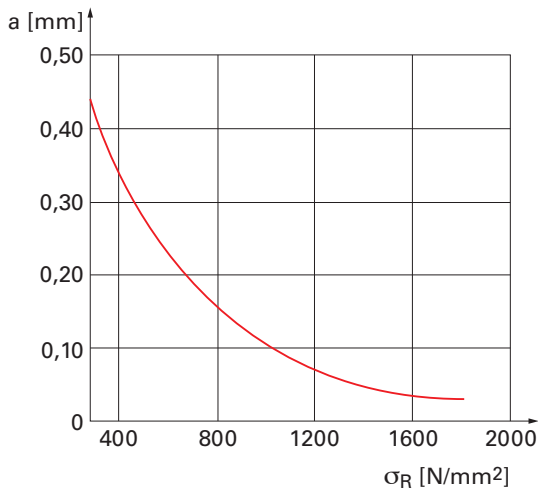


Fig. 2 - Sensibilità all'intaglio.

Risulta interessante osservare che materiali con caratteristiche meccaniche diverse risultano diversamente sensibili all'intaglio. In particolare, più sono elevate le caratteristiche meccaniche e più elevata risulterà la sensibilità, come mostrato in figura 2.

Il coefficiente b_2 tiene conto della finitura superficiale ed è strettamente legato al coefficiente di intaglio: le asperità possono, infatti, aumentare il valore di sforzo locale, degradando, quindi, il limite di fatica del pezzo (fig. 3a).

$$b_2 = \frac{\sigma_{lim}(R_a + R_{a,rif})}{\sigma_{lim}(R_a = R_{a,rif})}$$

Il coefficiente b_3 tiene invece conto dell'effetto che si ha passando dai risultati ottenuti sui provini ai componenti in termini di scala geometrica (fig. 3b).

$$b_3 = \frac{\sigma_{lim}(d \neq 10 \text{ mm})}{\sigma_{lim}(d = 10 \text{ mm})}$$

Attraverso i coefficienti, è, dunque, possibile determinare lo sforzo ammissibile a partire dal limite di fatica calcolato in laboratorio per provini standard.

$$\sigma_{lim} = \frac{b_2 b_3}{K_f} \sigma_{FA} \sigma$$

La sollecitazione ammissibile a fatica, potrà essere ricavata introducendo un coefficiente di sicurezza ammissibile.

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_{lim}}{S_f}$$

Nel caso in cui l'albero fosse soggetto a flessione-torsione, risulterebbe necessario introdurre un criterio di fatica multiassiale in modo da ricondursi al caso monodimensionale. Tra i vari criteri, quello più usato è quello di Gough-Pollard che prescrive di calcolare una sigma equivalente da confrontare con i limiti monoassiali del materiale come segue

$$\sigma_{GP}^* = \sqrt{\sigma_a^2 + H_{lim}^2 \tau_a^2} \leq \sigma_{amm}$$

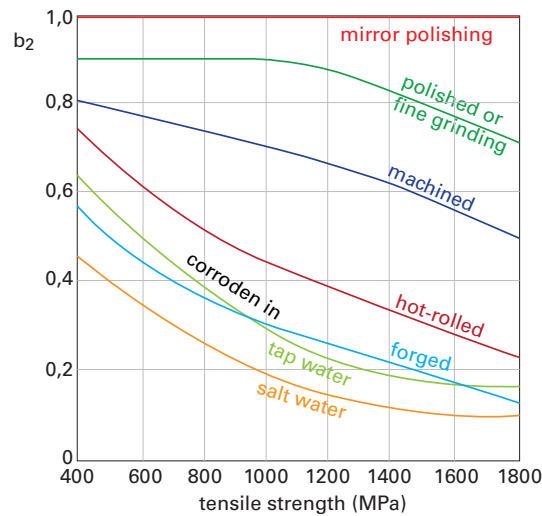


Fig. 3 - a) Effetto della finitura superficiale; b) effetto dimensionale.

con

$$H_{lim} = \frac{\sigma_{F,lim}}{\tau_{T,lim}} \text{ dove } \sigma_{F,lim} \text{ e } \sigma_{T,lim}$$

sono rispettivamente il limite di fatica flessionale alternata e quello di fatica torsionale alternata. Nel caso la componente di torsione fosse costante (nessuna oscillazione)

$$\sigma_{GP}^* = \sqrt{\sigma_a^2 + H^2 \tau_{max}^2} \leq \sigma_{amm}$$

$$\text{con } H = \frac{\sigma_{F,lim}}{\tau_R} \text{ dove}$$

τ_R rappresenta il limite di torsione statico del materiale [2].

È importante sottolineare come i limiti a torsione e flessione siano fortemente dipendenti dal tipo di sollecitazione applicata, ovvero se il ciclo di carico è alternato simmetrico o vi è anche presenza di sforzo medio (diagrammi di Haigh o Smith).

Tornando all'esempio in esame, ed introducendo un fattore di servizio K_a (per tenere conto dell'effettiva modalità di esercizio del componente), si ottengono le seguenti sollecitazioni alternate

TAB. 2 - CARATTERISTICHE A FATICA DEL MATERIALE

Limite di fatica R=0 per trazione compressione $\sigma_{F,lim}$ [MPa]	Limite statico per scorrimento materiale τ_R [MPa]
272.7	158.2

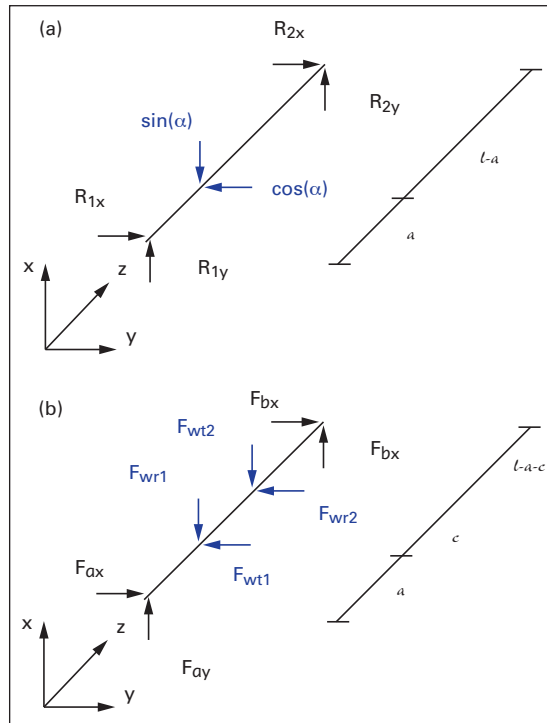


Fig. 4 - Reazioni vincolari e carichi sulla struttura ausiliaria (a) e sulla struttura reale (b).

TAB. 3 - AZIONI INTERNE SULLA STRUTTURA AUSILIARIA E SULLA STRUTTURA REALE

		M' struttura ausiliaria	M struttura reale
Tratto $0 \leq z < a$	Piano yz	$R_{1x} \cdot z$	$F_{ax} \cdot z$
	Piano xz	$R_{1y} \cdot z$	$F_{ay} \cdot z$
Tratto $a \leq z < b$	Piano yz	$R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z - a)$
	Piano xz	$R_{1y} \cdot z - \sin(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z - a)$
Tratto $b \leq z < c$	Piano yz	$R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z - a)$
	Piano xz	$R_{1y} \cdot z - \sin(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z - a)$
Tratto $c \leq z < l$	Piano yz	$R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z - a) - F_{wt2} \cdot (z - a)$
	Piano xz	$R_{1y} \cdot z - \sin(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z - a) - F_{wr2} \cdot (z - a)$

$$\sigma_{a,b} = \frac{M_b}{W_b} K_a = \frac{548 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi \cdot 50^3} \cdot 1.5 = 67,0 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_t = \frac{(K_a - 1) T_1}{W_1} = 0.5 \cdot \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 16}{\pi \cdot 50^3} = 12,2 \frac{N}{mm^2}$$

Si noti che la sollecitazione alternata di taglio viene trascurata in quanto $d < b$.

Resistenza a fatica del componente

La tabella 2 riporta le caratteristiche a fatica del materiale (ottenute in laboratorio su provini standard) scelto per l'albero.

Trovandoci nel caso dell'albero in esame in una condizione di fatica alternata simmetrica per quanto riguarda la flessione (valor medio nullo), non occorre utilizzare il diagramma di Haigh o di Smith per ricondursi ad un caso equivalente, ma è possibile utilizzare direttamente il valore σ_{lim} per la verifica.

Per quanto riguarda la torsione, gli sforzi di taglio rimangono costanti nel tempo in modulo senza una componente alternata.

Per questo, la sollecitazione di equivalente secondo Gough-Pollard si riconduce a

$$\sigma_{GP}^* = \sqrt{\sigma_{a,b}^2 + \frac{\sigma_{F,lim}^2}{\tau_R^2} \tau_t^2} \cong 70 \text{ MPa}$$

Il coefficiente di sicurezza a fatica varrà, dunque,

$$S_F = \frac{\sigma_{W,zd,N}}{\sigma_{GP}} \cong 3.85$$

Velocità critiche e inflessione

È importante tenere in considerazione che la verifica a rottura del pezzo è una condizione necessaria ma non sufficiente per un buon progetto. È infatti necessario anche tenere conto delle massime deflessioni con cui un albero può operare, soprattutto quando si è in presenza di alberi lunghi e di basse tolleranze negli ingombri. Di solito si fa riferimento alle seguenti condizioni:

- freccia massima minore di $l/3000$, dove l è la distanza tra i supporti;
- rotazione ai supporti inferiore a 10^{-3} radianti (circa 3 gradi).

Questi accorgimenti sono importanti non solo per il componente in quanto tale ma anche in relazione agli altri componenti del sistema. Nell'accoppiamento con un motore elettrico, ad esempio, è importante che l'inflessione sia tale per cui non vada a portare a contatti tra statore e rotore.

Discorso simile può essere fatto per tutte le applicazioni di movimentazione, dove una precisione di posizionamento risulta indispensabile.

Eventuali deformazioni eccessive degli alberi, poi, possono avere anche un impatto negativo sul buon funzionamento dei supporti volventi: inclinazioni eccessive, infatti, possono portare ad errate condizioni di lubrificazione, in cui il film di lubrificante non si forma nel modo corretto.

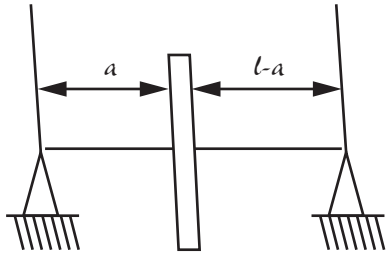


Fig. 5 - Semplificazioni adottate per il calcolo delle velocità critiche.

Ultimo, ma non per importanza, è il fenomeno del chattering, o delle vibrazione autoindotte. Per questo è consigliabile andare a verificare che le frequenze proprie del sistema non coincidano con quelle operative.

Nel caso in esame, volendo a titolo di esempio calcolare la freccia nella mezzzeria dell'ingranaggio di sinistra, si adotta il principio dei lavori virtuali (PLV) che prescrive che se una struttura deformabile, in equilibrio sotto l'azione di un sistema di forze esterne, subisce una deformazione virtuale, il lavoro fatto dalla forze esterne è uguale al lavoro delle forze interne. Formalmente

$$L_{est} = \sum_i F_i \cdot dP_i + \sum_i M_i \cdot d\phi_i = L_{int} = (N + dN) \cdot d\delta$$

Per una trattazione completa del PLV si rimanda a [3]. Volendo applicare il PLV al caso in esame, si assume come sistema effettivo quello reale e come sistema ausiliario un sistema fittizio in cui si applica una forza unitaria nel punto in cui si vuole calcolare la freccia (nella mezzzeria della ruota di sinistra). Come già fatto per il sistema effettivo, anche per il sistema ausiliario si calcolano le azioni interne che risulteranno come da figura 4. Le azioni interne nei vari conci di trave sono riportati in tabella 3. Il lavoro delle forze interne, invece, risulterà

$$L_{int} = 1 \cdot f$$

in cui "1" è la forza unitaria applicata alla struttura ausiliaria (inclinata dell'angolo di pressione) in corrispondenza della ruota di sinistra ed "f" la freccia in tale punto. Il lavoro delle forze esterne, apparirà nella forma

$$L_{est} = \int_0^a M_{0a} \frac{M'_{0a}}{EJ_{0a}} dx + \int_a^b M_{ac} \frac{M'_{ac}}{EJ_{ab}} dx + M_{ac} \frac{M'_{ac}}{EJ_{bc}} + \int_c^l M_{cl} \frac{M'_{cl}}{EJ_{cl}} dx$$

in cui M rappresenta l'azione delle forze esterne ed $M_i/EJ \cdot dx$ la rotazione. Pertanto

$$\begin{aligned} L_{est} = & \int_0^a F_{ax} \cdot z \frac{R_{1x} \cdot z}{EJ_{0a}} dz + \int_a^b [F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z-a)] \frac{R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha)(z-a)}{EJ_{ab}} dz + \\ & + \int_b^c [F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z-a)] \frac{R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha)(z-a)}{EJ_{bc}} dz + \\ & + \int_c^l [F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z-a) - F_{wr2} \cdot (z-a)] \frac{R_{1y} \cdot z - \sin(\alpha)(z-a)}{EJ_{cl}} dz + \int_0^a F \cdot z \frac{R_{1y} \cdot z}{EJ_{0a}} dz + \\ & + \int_a^b [F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z-a)] \frac{R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha)(z-a)}{EJ_{ab}} dz + \\ & + \int_b^c [F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z-a)] \frac{R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha)(z-a)}{EJ_{bc}} dz + \\ & + \int_c^l [F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z-a) - F_{wt2} \cdot (z-a)] \frac{R_{1y} \cdot z - \sin(\alpha)(z-a)}{EJ_{cl}} dz \end{aligned}$$

Svolgendo gli integrali e ponendo $L_{est} = L_{int}$ è dunque possibile calcolare la freccia massima che risulta essere .

$$f = 2.9682 \cdot 10^{-05} \text{ m}$$

Tale valore è accettabile dato che non supera il valore soglia indicativo

$$\frac{1}{3000} = 0.0001 \text{ m}$$

Per finire, è buona norma calcolare le velocità critiche dell'albero e valutare che queste non coincidano con quelle operative (figura 5). Per il calcolo delle velocità critiche flessionali, il primo passo consiste nel calcolo della rigidità dell'albero. In prima approssimazione, consideriamo l'albero schematizzabile come un corpo in cui tutta la massa sia concentrata in corrispondenza della mezzzeria della ruota di sinistra. Con questa semplificazione, la rigidità dell'albero risulta

$$k = \frac{3EJ}{a^2(1-a)^2}$$

Avendo l'albero sezione variabile, il momento di inerzia non sarà costante. In prima battuta, però, prendiamo un valore medio pesato per cui

$$J = \frac{\pi(d^4 c + D^4(1-c))}{64l} = 2.8 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$$

da cui

$$k = 1.7 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Supponendo che la massa sia pari a 5 kg (dipenderà dal materiale), la velocità critica flessionale risulterà

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.84 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 1.75 \cdot 10^5 \text{ rpm}$$

Questa velocità non dovrà venire eccitata durante l'esercizio, per cui, nel caso questa coincidesse con le velocità operative previste, sarebbe necessario rivedere il progetto.

Conclusioni

Come si è visto, la progettazione di un albero è un procedimento relativamente lungo e complesso. Dopo un primo dimensionamento di massima occorre non solo effettuare una verifica statica ed una verifica a fatica che, nel caso non fossero soddisfatte, darebbero vita ad un processo iterativo di modifica del progetto, ma anche valutare che la deformazione dell'albero sia compatibile con il resto del sistema in cui andrà montato e che le sue frequenze proprie non vengano eccitate in esercizio.



© RIPRODUZIONE RISERVATA

Riferimenti

1. G. Niemann, H. Winter, B.-R. Hoehn, Manuale degli organi delle Macchine, edizione italiana a cura di Tecniche Nuove
2. G. Belloni, A. Lo Conte - Lezioni di costruzione di macchine, Hoepli
3. Piermaria Davoli, Laura Vergani, Stefano Beretta, Mario Guagliano, Sergio Baragetti - Costruzione di macchine 1, McGraw Hill