

IN QUESTO QUADERNO DI PROGETTAZIONE SI PROSEGUIRÀ IL DIMENSIONAMENTO DI UN ALBERO INTRODOTTO NELLA PUNTATA PRECEDENTE. IN PARTICOLARE, SI ESTENDERÀ IL CASO STUDIO GIÀ INTRODOTTO E DI CUI È STATO FATTO UN PRIMO DIMENSIONAMENTO CON LA VERIFICA A FATICA, LA VERIFICA DELLA MASSIMA INFLESSIONE ED IL CALCOLO DELLE VELOCITÀ CRITICHE.

Assi ed alberi

2^A PARTE

Attorno a un dimensionamento di massima ed una successiva verifica statica è stato possibile scegliere la forma costruttiva dell'albero, che prevede, in accordo a figura 1, la presenza di due ruote dentate, una montata con chiavetta ed una lavorata di pezzo. Data la presenza delle ruote dentate, l'albero sarà soggetto a carichi ciclici dovuti al fatto che le forze date dall'ingranamento restano fisse nello spazio mentre l'albero ruota. Si rende quindi necessaria una verifica a fatica. Figura 1 e tabella 1 riportano i dati ed i risultati ottenuti dal pre-

dimensionamento e verifica statica svolti nel quaderno precedente. Nel caso di verifica a fatica bisogna tenere in considerazione diversi fattori. In generale la verifica di un albero deve sempre considerare i seguenti effetti:

- effetto dell'intaglio (coefficiente di intaglio a fatica K_f - passaggio dal - limite di fatica della provetta a quello del componente);
- finitura superficiale (coefficiente b_2);
- effetto dimensionale (coefficiente b_3).

Come noto, la presenza di intagli in un componente meccanico comporta una concentrazione locale delle sollecitazioni. Ciò è una delle cause innescanti le cricche che portano a cedimento il componente. Dalle prove sperimentali si nota però come l'intaglio, nel caso di carichi affaticanti, non sia così severo come indicherebbe il fattore teorico di concentrazione degli sforzi. Al fine di poter utilizzare le stesse tabelle e grafici, il fattore di concentrazione degli sforzi teorico K_t viene allora ridotto introducendo un "fattore di sensibilità all'intaglio" q che opera una diminuzione di K_t

$$K_f = 1 + q(k_t - 1)$$

Il fattore di sensibilità all'intaglio può essere calcolato in accordo a relazioni empiriche quali quella proposta da Neuber e quella proposta da Peterson rispettivamente

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\rho'/r}} \text{ con } \rho' \cong \left(\frac{140}{R_m} \right)^2; \quad q = \frac{1}{1 + a/r}$$

È interessante osservare che materiali con caratteristiche meccaniche diverse risultano diversamente sensibili all'intaglio. In particolare più sono elevate le caratteristiche meccaniche e più elevata risulterà la sensibilità, come mostrato in figura 2.

Esistono poi altri coefficienti come il coefficiente b_2 che permette di tenere conto della finitura superficiale ed è strettamente legato al coefficiente di intaglio: le asperità possono far aumentare il valore locale di sforzo, abbattendo, quindi, il limite di fatica del componente.

$$b_2 = \frac{\sigma_{\lim}(R_a \neq R_{a,\text{rif}})}{\sigma_{\lim}(R_a = R_{a,\text{rif}})}$$

Esiste poi un ulteriore coefficiente, detto coefficiente b_3 che considera l'effetto che si ha passando dai risultati ottenuti sui provini ai componenti in termini di scala geometrica.

$$b_3 = \frac{\sigma_{\lim}(d \neq 10\text{mm})}{\sigma_{\lim}(d = 10\text{mm})}$$

Attraverso i coefficienti risulta dunque possibile determinare lo sforzo ammissibile a partire dal limite di fatica σ_{FA} calcolato in laboratorio su provini standard.

TAB. 1 DATI GEOMETRICI E RISULTATI DELLA VERIFICA STATICA

Momento torcente nominale T_{nom} [Nm]	600
Angolo di pressione delle dentature α_w [°]	20
Raggio r_1 [mm]	60
Raggio r_2 [mm]	80
Lunghezza a [mm]	80
Lunghezza b [mm]	110
Lunghezza c [mm]	190
Lunghezza l [mm]	300
Diametro d [mm]	50
Diametro D [mm]	110
Raggio di raccordo r [mm]	1
Coefficiente di sicurezza statico nell'ipotesi di accettare plasticizzazione locale.	$S_s = \frac{\sigma_{amm}}{\sigma_{GT}} = \frac{630\text{MPa}}{66\text{MPa}} = 9.5$

TAB. 2 CARATTERISTICHE A FATICA DEL MATERIALE

Limite di fatica R=0 per trazione compressione $\sigma_{F,lim}$ [MPa]	Limite statico per scorrimento materiale τ_R [MPa]
272.7	158.2

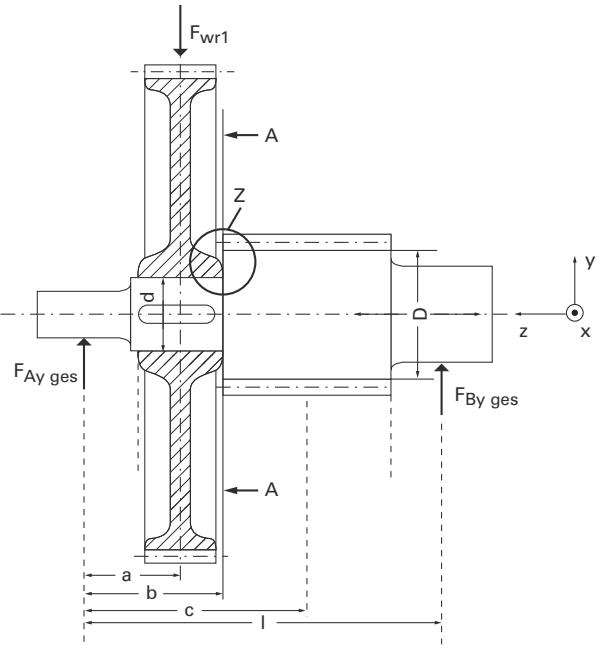


Fig. 1 - Geometria scelta per l'albero

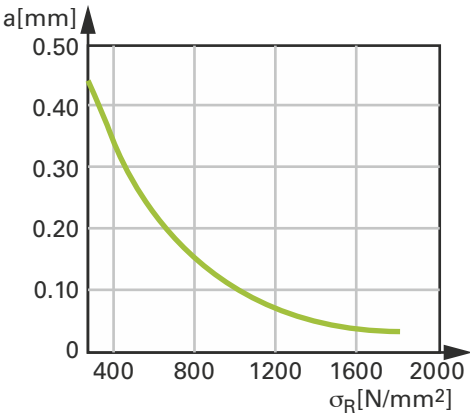


Fig. 2 - Sensibilità all'intaglio

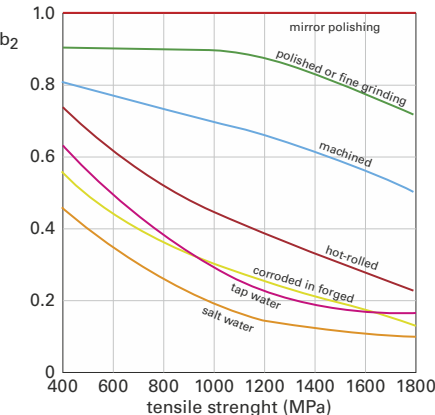


Fig. 3 - Effetto della finitura superficiale

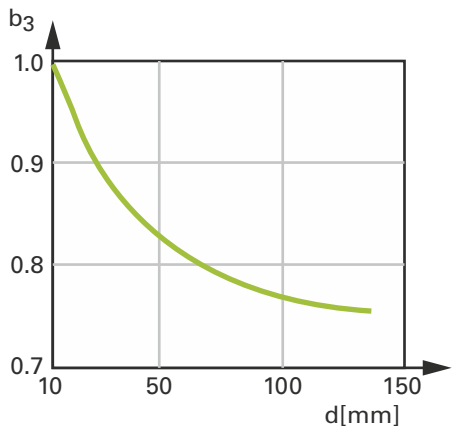


Fig. 4 - Effetto dimensionale

$$\sigma_{lim} = \frac{b_2 b_3}{K_f} \sigma_{FA} \sigma$$

La sollecitazione ammissibile a fatica andrà poi ridotta introducendo un coefficiente di sicurezza.

$$\sigma_{mm} = \frac{\sigma_{lim}}{S_F}$$

Nel caso in cui l'albero sia soggetto a flessione-torsione, risulta necessario introdurre un criterio di fatica multi-assiale così da ricondursi al caso mono-dimensionale.

Si tratta di trovare un valore caratteristico equivalente che possa essere confrontato direttamente con il limite di fatica ottenuto sperimentalmente su prove mono-assiali. Tra i vari criteri, quello più usato è quello di Gough-Pollard che prescrive di calcola-

re uno sforzo equivalente da confrontare poi con i limiti del materiale

$$\sigma_{GP}^* = \sqrt{\sigma_a^2 + H^2 \tau_a^2} \leq \sigma_{amm}$$

in cui

$$H_{lim} = \frac{\sigma_{F,lim}}{\tau_{T,lim}} \cdot \sigma_{F,lim}$$

e $\tau_{T,lim}$ sono rispettivamente il limite di fatica a flessione alternata e quello di fatica torsionale alternata. Nel caso in cui la componente di torsione fosse costante (nessuna oscillazione), lo sforzo di confronto va invece calcolato come

$$\sigma_{GP}^* = \sqrt{\sigma_a^2 + H^2 \tau_{max}^2} \leq \sigma_{amm}$$

in cui

TAB. 3 AZIONI INTERNE SULLA STRUTTURA AUSILIARIA E SULLA STRUTTURA REALE.

		M' struttura ausiliaria	M struttura reale
Tratto $0 \leq z < a$	Piano yz	$R_{1x} \cdot z$	$F_{ax} \cdot z$
	Piano xz	$R_{1y} \cdot z$	$F_{ay} \cdot z$
Tratto $a \leq z < b$	Piano yz	$R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z - a)$
	Piano xz	$R_{1y} \cdot z - \sin(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z - a)$
Tratto $b \leq z < c$	Piano yz	$R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z - a)$
	Piano xz	$R_{1y} \cdot z - \sin(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z - a)$
Tratto $c \leq z < l$	Piano yz	$R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z - a) - F_{wt2} \cdot (z - a)$
	Piano xz	$R_{1y} \cdot z - \sin(\alpha) \cdot (z - a)$	$F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z - a) - F_{wr2} \cdot (z - a)$

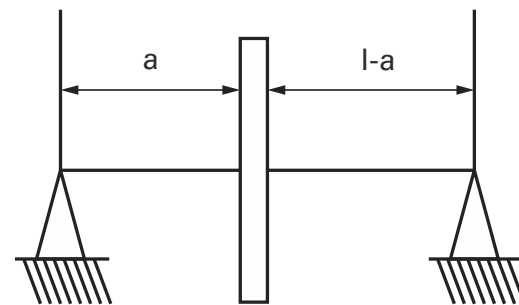


Fig. 5 - Semplificazioni adottate per il calcolo delle velocità critiche

$$H = \frac{\sigma_{F,lim}}{\tau_R}$$

rappresenta il limite di torsione statico del materiale [2].

È importante rimarcare come i limiti a torsione e flessione siano fortemente dipendenti dal tipo di sollecitazione applicata, ovvero se il ciclo di carico risulta essere alternato simmetrico o vi sia anche presenza di sforzo medio (diagrammi di Haigh o Smith).

Tornando al caso studio, introducendo un fattore di servizio K_a (per tenere conto dell'effettiva modalità di esercizio del componente), si ottengono le seguenti sollecitazioni alternate

$$\sigma_{a,b} = \frac{M_b}{W_b} K_a = \frac{548 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi \cdot 50^3} \cdot 1.5 = 67,0 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_t = \frac{(K_a - 1)T_1}{W_1} = 0.5 \cdot \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 16}{\pi \cdot 50^3} = 12,2 \frac{N}{mm^2}$$

Si noti che la sollecitazione alternata di taglio viene trascurata in quanto $d < b$.

Resistenza a fatica del componente

Tabella 2 riporta le caratteristiche a fatica del materiale (ottenute in laboratorio su provini standard) scelto per l'albero.

Trovandosi nell'esempio in una condizione di fatica alternata simmetrica per quanto riguarda la flessione (valor medio nullo), non occorre utilizzare il diagramma di Haigh o di Smith per ricondursi ad un caso equivalente, ma è possibile utilizzare direttamente il valore σ_{lim} definito come sopra per la verifica. Per quanto riguarda la torsione, gli sforzi di taglio rimangono costanti nel tempo in modulo senza una componente alternata. Per questo, la sollecitazione di equivalente secondo Gough-Pollard si riduce a

$$\sigma_{GP}^* = \sqrt{\sigma_{a,b}^2 + \frac{\sigma_{F,lim}^2}{\tau_R^2}} \approx 70 \text{ MPa}$$

Il coefficiente di sicurezza a fatica varrà, dunque,

$$S_F = \frac{\sigma_{W,zdN}}{\sigma_{GP}} \approx 3.85$$

Velocità critiche ed inflessione

È importante tenere a mente come la verifica a rottura del pezzo sia una condizione necessaria ma non sufficiente per un buon progetto. Bisogna sempre valutare le massime deflessioni con cui un albero potrà operare, soprattutto quando si è in presenza di alberi lunghi. Come buona pratica progettuale, di solito si fa riferimento alle seguenti condizioni:

– freccia massima minore di $l/3000$, dove l è la distanza tra i supporti;

rotazione ai supporti inferiore a 10^{-3} radianti (circa 3 gradi)

Questi accorgimenti sono importanti non solo per il componente in quanto tale ma anche in relazione agli altri componenti del sistema. Nell'accoppiamento con un motore elettrico, ad esempio, l'inflessione non deve essere tale da portare a contatto statore e rotore. Discorso simile può essere fatto per tutte le applicazioni di movimentazione, dove una precisione di posizionamento risulta indispensabile. Eventuali deformazioni eccessive degli alberi possono avere anche un impatto negativo sul buon funzionamento dei supporti: inclinazioni eccessive, infatti, possono portare ad errate condizioni di lubrificazione, in cui il film di lubrificante non si forma affatto portando, nel caso estremo, a grippaggio dei supporti. Ultimo, ma non per importanza, è il fenomeno del chattering, o delle vibrazioni autoindotte. Per questo è consigliabile andare a verificare che le frequenze proprie del sistema non coincidano con quelle operative.

Nel caso studio, a titolo di esempio, verrà calcolata la freccia nella mezzeria dell'ingranaggio di sinistra attraverso il principio dei lavori virtuali (PLV) che prescrive che se una struttura deformabile, in equilibrio sotto l'azione di un sistema di forze esterne, subisce una deformazione virtuale, il lavoro fatto dalle forze esterne è uguale al lavoro delle forze interne. Formalmente

$$L_{est} = \sum_i F_i \cdot dP_i + \sum_i M_i \cdot d\phi_i = L_{int} = (N + dN) \cdot d\delta$$

Per una trattazione completa del PLV si rimanda a [3].

Volendo applicare il PLV al caso studio, si assuma come sistema effettivo quello reale e come sistema ausiliario un sistema fittizio in cui viene applicata una forza unitaria nel punto in cui si vuole calcolare la freccia (nella mezzeria della ruota di sinistra). Come già fatto per il sistema effettivo, anche per il sistema ausiliario si calcolano le azioni interne che risulteranno come da figura 4.

Le azioni interne nei vari conci di trave sono riportati in tabella 3.

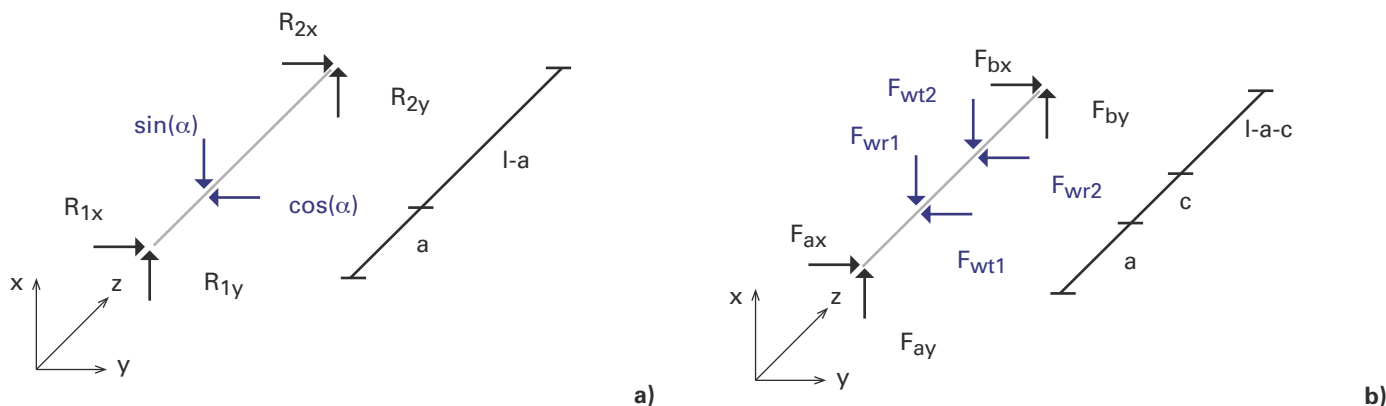


Fig. 4 - Reazioni vincolari e carichi sulla struttura ausiliaria (a) e sulla struttura Fig. (b)

Il lavoro delle forze interne risulterà

$$L_{int} = 1 \cdot f$$

in cui "1" è la forza unitaria applicata alla struttura ausiliaria (inclinata dell'angolo di pressione) in corrispondenza della ruota di sinistra ed "f" la freccia in tale punto.

Il lavoro delle forze esterne, apparirà nella forma

$$L_{est} = \int_0^a M_{0a} \frac{M'_{0a}}{EJ_{0a}} dx + \int_a^b M_{ac} \frac{M'_{ac}}{EJ_{ab}} dx +$$

$$+ \int_b^c M_{ac} \frac{M'_{ac}}{EJ_{bc}} dx + \int_c^l M_{cl} \frac{M'_{cl}}{EJ_{cl}} dx$$

in cui rappresenta l'azione delle forze esterne ed la rotazione. Pertanto

$$L_{est} = \int_0^a F_{ax} \cdot z \frac{R_{1x} \cdot z}{EJ_{0a}} dz + \int_a^b [F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z-a)] \frac{R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha)(z-a)}{EJ_{ab}} dz$$

$$+ \int_b^c [F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z-a)] \frac{R_{1x} \cdot z - \cos(\alpha)(z-a)}{EJ_{bc}} dz$$

$$+ \int_b^l [F_{ax} \cdot z - F_{wt1} \cdot (z-a) - F_{wr2} \cdot (z-a)] \frac{R_{1x} \cdot z - \sin(\alpha)(z-a)}{EJ_{cl}} dz$$

$$+ \int_0^a F_{ay} \cdot z \frac{R_{1y} \cdot z}{EJ_{0a}} dz + \int_a^b [F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z-a)] \frac{R_{1y} \cdot z - \cos(\alpha)(z-a)}{EJ_{ab}} dz$$

$$+ \int_b^c [F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z-a)] \frac{R_{1y} \cdot z - \cos(\alpha)(z-a)}{EJ_{bc}} dz$$

$$+ \int_c^l [F_{ay} \cdot z - F_{wr1} \cdot (z-a) - F_{wt2} \cdot (z-a)] \frac{R_{1y} \cdot z - \sin(\alpha)(z-a)}{EJ_{cl}} dz$$

Svolgendo gli integrali e ponendo $L_{est} = L_{int}$ è dunque possibile calcolare la freccia massima che risulta essere $f = 2.9682 \cdot 10^{-5}m$. Tale valore è accettabile dato che non supera il valore soglia indicativo $l/3000 = 0.0001m$. Per finire, è buona norma calcolare le velocità critiche dell'albero e valutare che queste non coincidano con quelle operative. Per il calcolo delle velocità critiche flessionali, il primo passo consiste nel calcolo della rigidità dell'albero. In prima approssimazione, si consideri l'albero schematizzabile come un corpo in cui tutta la massa sia concentrata in corrispondenza della mezziera della ruota di sinistra. Con questa semplificazione, la rigidità dell'albero risulta

$$k = \frac{3EJl}{a^2(l-a)^2}$$

Avendo l'albero sezione variabile, il momento di inerzia non sarà costante. In prima approssimazione, però, si assuma un valore medio pesato da cui

$$J = \frac{\pi(d^4c + D^4(l-c))}{64l} = 2.8 \cdot 10^{-6}m^4$$

La rigidità risulta $k = 1.7 \cdot 10^9 N/m$. Supponendo che la massa sia pari a 5Kg (dipenderà dal materiale), la velocità critica flessionale risulterà

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.84 \cdot 10^4 \frac{rad}{s} = 1.75 \cdot 10^5 rpm$$

Questa velocità non dovrà venire eccitata durante l'esercizio, per cui, nel caso questa coincidesse con le velocità operative previste, sarebbe necessario rivedere il progetto.

Conclusioni

Come si è visto, la progettazione di un albero è un procedimento relativamente lungo e complesso. Dopo un primo dimensionamento di massima occorre non solo effettuare una verifica statica ed una verifica a fatica che, nel caso non fossero soddisfatte, darebbero vita ad un processo iterativo di modifica del progetto, ma anche valutare che la deformazione dell'albero sia compatibile con il resto del sistema in cui andrà montato e che le sue frequenze proprie non vengano eccitate in esercizio. ■

© RIPRODUZIONE RISERVATA

Riferimenti

- 1) G. Niemann, H. Winter, B.-R. Hoehn, Manuale degli organi delle Macchine, edizione italiana a cura di Tecniche Nuove
- 2) G. Belloni, A. Lo Conte – Lezioni di costruzione di macchine, Hoepli
- 3) Piermaria Davoli, Laura Vergani, Stefano Beretta, Mario Gualigiano, Sergio Baragetti - Costruzione di macchine 1, McGraw Hill
- 4) F. Concli, Organi di macchina: assi ed alberi, Organi di Trasmissione OT2014/04, Tecniche Nuove