Esercizi di geometria analitica

svolti e ordinati per competenze

Massimiliano Virdis

Indice

1 Introduzione

Caro lettore,

questi appunti sono relativi alla geometria analitica nel piano e nello spazio, quale si studia attualmente al liceo scientifico. Ho iniziato elencando una serie di competenze per i miei alunni e per me. Ho poi sentito l'esigenza di completare questo elenco con una breve indicazione teorica e uno o più esempi relativi alle singole voci. Questi appunti sono pensati soprattutto per gli alunni più in difficoltà. Se qualche passaggio appare svolto in maniera troppo estesa e particolareggiata si porti pazienza: i più bravi e capaci capiranno lo stesso, ma non lasceremo indietro i meno bravi.

Molti esercizi sono stati scritti con i primi numeri venuti in mente, senza cercare soluzioni più gradevoli. Questi non sono necessariamente esercizi da dare direttamente nelle verifiche. Qualche frazione o radice antipatica può comparire tranquillamente: il mondo non è fatto solo da numeri interi.

Questi appunti sono un supporto e complemento ai normali testi scolastici.

Spero che quanto riportato in quest'opera sia se non di aiuto almeno non dannoso. Per migliorare quanto scritto e evidenziare qualsiasi errore non esitate a scrivermi.

email: prof.virdis@tiscali.it

1.1 Licenza e Copyright

δωρεν λάβετε, δωρεν δότε (Mt. 7.8)

1.2 Ringraziamenti

Si ringraziano coloro che hanno avuto la pazienza di leggere queste pagine e di segnalare errori di vario tipo. In particolare:

Federico Belvisi, Jacopo Solinas, Anna Melis, Francesco Duville, Alessandro Cuboni, Alessandra Di Dino, Letizia Solla, Luca Scanu.

... così pochi trovano qualcosa da correggere?

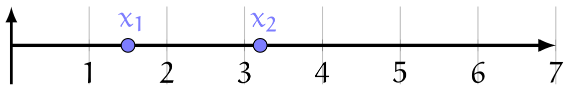
Parte I

Rette e vettori

2 Punti e vettori

2.1 Distanza tra due punti su una retta

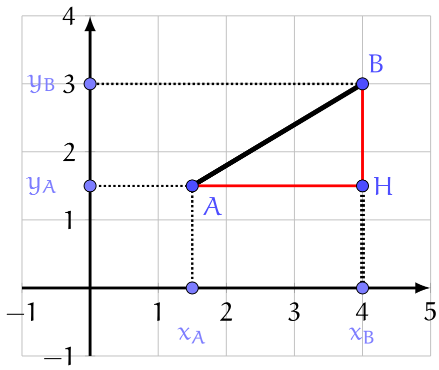
La distanza tra due punti su una retta vale $d_{12} = |x_2 - x_1|$.



2.2 Distanza tra due punti nel piano

La distanza tra un punto $A(x_A; y_A)$ e punto $B(x_B; y_B)$ si trova direttamente con la seguente formula, ottenuta applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABH:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{2.1}$$



Ovviamente la distanza tra A e B è uguale alla distanza tra B e A. Allo stesso modo l'ordine in cui compaiono i punti nella formula non ha importanza.

Esercizio 1 *Trova la distanza tra i punti* $A(-3; 2)$ *e* $B(-2; -1)$.

$$d_{AB} = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \tag{2.2}$$

2.3 Somma e differenza tra due vettori

Un vettore $\vec{v}$ nel piano può essere identificato dalle coordinate della sua punta quando applicato nell'origine degli assi cartesiani. Queste coordinate rappresentano anche le componenti del vettore rispetto agli assi coordinati.

$$\vec{v} \equiv (v_x; v_y) \equiv v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} \tag{2.3}$$

I vettori $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ sono vettori unitari (versori) paralleli agli assi coordinati.

La *somma algebrica* $\vec{c}$ (somma o differenza) tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un vettore che ha per componenti la somma algebrica delle rispettive componenti di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} \\ (c_x; c_y) &= (a_x + b_x; a_y + b_y) \\ c_x\vec{\imath} + c_y\vec{\jmath} &= (a_x + b_x)\vec{\imath} + (a_y + b_y)\vec{\jmath} \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{a} - \vec{b} \\ (d_x; d_y) &= (a_x - b_x; a_y - b_y) \\ d_x\vec{\imath} + d_y\vec{\jmath} &= (a_x - b_x)\vec{\imath} + (a_y - b_y)\vec{\jmath} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Esercizio 2 *Trova la somma $\vec{c}$ e la differenza $\vec{d}$ tra i vettori $\vec{a} \equiv (-7; 6)$ e $\vec{b} \equiv (-3; -1)$.*

Applichiamo immediatamente quanto scritto prima:

$$\vec{c} \equiv (-7 - 3; 6 - 1) = (-10; 5) \tag{2.6}$$

$$\vec{d} \equiv (-7 - (-3); 6 - (-1)) = (-4; 7) \tag{2.7}$$

2.4 Vettore per due punti

Dati due punti A e B nel piano possiamo ricavare il vettore $\overrightarrow{BA}$ che ha per estremi i due punti come vettore differenza tra quello associato al secondo punto meno il primo.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= \vec{B} - \vec{A} \\ (ba_x; ba_y) &= (b_x - a_x; b_y - a_y) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Il modulo del vettore non dipende dall'ordine con cui prendiamo i due punti, il verso invece sì.

2.5 Modulo di un vettore

Il *modulo* di un vettore $\vec{a}$ è un numero che esprime l'intensità o lunghezza del vettore.

Dalla formula della distanza tra due punti (l'origine degli assi e la punta del vettore) possiamo scrivere:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} \tag{2.9}$$

2.6 Prodotto di uno scalare per un vettore

Il prodotto di uno scalare k per un vettore $\vec{a}$ è un vettore che ha per componenti il prodotto dello scalare k per le componenti del vettore $\vec{a}$.

$$k \cdot \vec{a} \equiv (ka_x; ka_y) \tag{2.10}$$

2.7 Prodotto scalare tra due vettori e coseno dell'angolo compreso

Il *prodotto scalare* tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un numero (uno scalare) legato al valore dei due vettori.

Se $|\vec{a}|$ è il modulo del vettore $\vec{a}$, $|\vec{b}|$ il modulo del vettore $\vec{b}$ e α l'angolo da essi formato allora possiamo definire il loro prodotto scalare come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha \tag{2.11}$$

Oppure, prendendo le componenti dei due vettori:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \tag{2.12}$$

In un sistema di coordinate cartesiane monometrico le due definizioni portano allo stesso risultato. La prima definizione è molto usata in fisica; nel contesto della geometria analitica la seconda risulta però molto più utile.

Dalla prima definizione, ricordando che $\cos(90) = 0$, possiamo dire che, se due vettori sono perpendicolari, allora il loro prodotto scalare è nullo.

Esercizio 3 *Trova il prodotto scalare* $\vec{a} \equiv (-7; 6)$ *e* $\vec{b} \equiv (-3; -1)$.

Immediatamente scriviamo:

$$p = -7 \cdot (-3) + 6 \cdot (-1) = 15 \tag{2.13}$$

2.8 Trovare il perimetro e l'area di un poligono dati i vertici

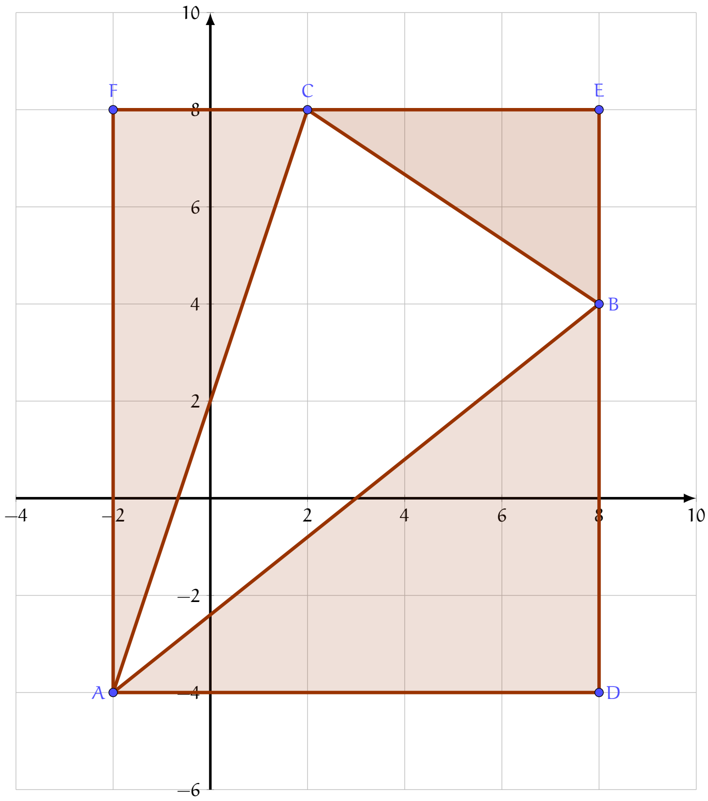
Per trovare il *perimetro di un poligono* sommiamo la lunghezza di tutti i suoi lati. La lunghezza di un lato la determiniamo con la formula della distanza tra due punti.

Per trovare l'*area di un poligono* decomponiamo il poligono in quadrati, rettangoli e triangoli di base e altezza nota e sommiamo la loro area.

In particolare, per l'*area di un generico triangolo*, costruiamo il rettangolo ad esso circoscritto e decomponiamo la figura in triangoli rettangoli. L'area cercata è la differenza tra l'area del rettangolo e quella dei triangoli rettangoli esterni al nostro triangolo.

Esercizio 4 *Trova l'area e il perimetro del triangolo di vertici* $A(-2;-4)$, $B(8;4)$ *e* $C(2;8)$.

Riportiamo il triangolo in un grafico per vedere se la base e l'altezza sono immediatamente visibili e determinabili. Se, come nel nostro caso, questo non è possibile allora disegniamo anche il rettangolo circoscritto al triangolo ed evidenziamo i triangoli rettangoli che circondano il nostro triangolo.



L'area del rettangolo è $A_r = b \cdot h = 5 \cdot 6 = 30$.

L'area del triangolo $A\widehat{C}F$ è $A_1 = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{2 \cdot 6}{2} = 6$.

L'area del triangolo $B\widehat{E}C$ è $A_2 = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 3$.

L'area del triangolo $A\widehat{D}B$ è $A_3 = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Infine l'area del triangolo $A\widehat{B}C$ è $A = A_r - A_1 - A_2 - A_3 = 30 - 6 - 3 - 10 = 11$.

Per trovare il perimetro determiniamo le misure dei lati:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(2-(-2))^2+(8-(-4))^2} = \sqrt{4^2+12^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \\ \overline{BC} &= \sqrt{(8-2)^2+(4-8)^2} = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \\ \overline{AC} &= \sqrt{(8-(-2))^2+(4-(-4))^2} = \sqrt{10^2+8^2} = \sqrt{100+64} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}\end{aligned} \tag{2.14}$$

Il perimetro è $p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 4\sqrt{10} + 2\sqrt{13} + 2\sqrt{41}$

2.9 Punto medio di un segmento: definizione e formula

Il punto medio di un segmento è il punto del segmento equidistante dai suoi estremi.
Se il segmento ha per estremi il punto $A(x_A; y_A)$ e il punto $B(x_B; y_B)$ allora le coordinate del punto medio P_m sono:

$$P_m\,(x_m; y_m) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \tag{2.15}$$

2.10 Baricentro di un poligono: definizione e formula

Il baricentro di un poligono è un punto che ha come coordinate la media aritmetica delle coordinate dei vertici del poligono. Se il poligono ha n vertici allora:

$$G(x_G; y_G) = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}; \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}\right) \tag{2.16}$$

Esercizio 5 *Trova il baricentro del triangolo di vertici* $A(2; -4)$, $B(-3; 5)$, $C(6; 7)$

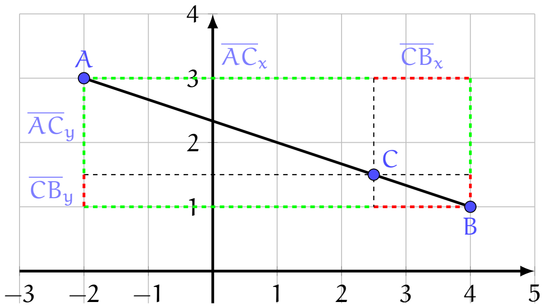
Immediatamente scriviamo:

$$G(x_G; y_G) = \left(\frac{2-3+6}{3}; \frac{-4+5+7}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right) \tag{2.17}$$

2.11 Dividere un segmento in parti proporzionali

Abbiamo un segmento di estremi $A(A_x; A_y)$ e $B(B_x; B_y)$. Vogliamo trovare *sul segmento* un punto $C(x, y)$ tale che il rapporto tra la lunghezza del segmento $\overline{AC}$ e del segmento $\overline{CB}$ sia un numero q.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = q \tag{2.18}$$



Se vale la relazione precedente allora vale anche per le componenti x e y dei segmenti, come evidenziato nella precedente figura. Allora possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned} \overline{AC}_x &= q \cdot \overline{CB}_x \\ \overline{AC}_y &= q \cdot \overline{CB}_y \end{aligned} \tag{2.19}$$

Scrivendo per esteso la lunghezza degli ultimi segmenti abbiamo:

$$\begin{aligned} |x - A_x| &= q|B_x - x| \\ |y - A_y| &= q|B_y - y| \end{aligned} \tag{2.20}$$

Le ultime due equazioni consentono di trovare un punto C posto sia all'interno del segmento che all'esterno di esso. Per trovare solo il punto interno scriviamo le relazioni precedenti senza valori assoluti, ma prendendo i punti nell'ordine in cui compaiono nel disegno. Questo è stato fatto nella scelta delle coordinate nelle relazioni precedenti.

Esercizio 6 *Abbiamo un segmento di estremi* $A(2; -4)$ *e* $B(-3; 5)$. *Trova il punto* $C(x; y)$ *sul segmento in modo che* AC *sia il doppio di* BC.

Se il segmento AC è il doppio di BC allora il loro rapporto vale 2.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 2 \tag{2.21}$$

Osservando che i punti si presentano nell'ordine A, C e B allora possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \overline{AC}_x &= 2 \cdot \overline{CB}_x \\ \overline{AC}_y &= 2 \cdot \overline{CB}_y \end{aligned} \tag{2.22}$$

da cui:

$$\begin{aligned} |x - 2| &= 2| - 3 - x| \\ |y - (-4)| &= 2|5 - y| \end{aligned} \tag{2.23}$$

In particolare:

$$\begin{aligned} x - 2 &= 2(-3 - x) \\ y + 4 &= 2(5 - y) \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 - 6 - 2x \\ y &= -4 + 10 - 2y \end{aligned} \tag{2.25}$$

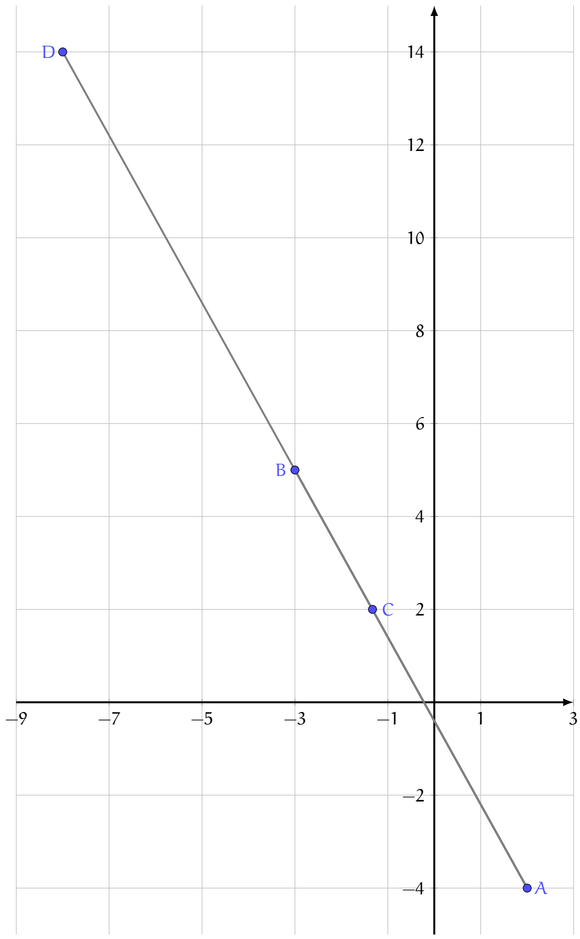
$$\begin{aligned} 3x &= -4 \\ 3y &= 6 \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{4}{3} \\ y &= 2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Se avessimo usato la relazione con il valore assoluto avremmo ottenuto due relazioni, una col più e una col meno.

$$\begin{aligned} x - 2 &= \pm 2(-3 - x) \\ y + 4 &= \pm 2(5 - y) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Quella col più ci porta al punto già trovato, che sta sul segmento. Quella col meno ad un punto D per il quale vale ancora la stessa proporzione tra segmenti, ma sta fuori il segmento.



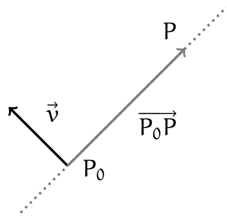
3 Retta

3.1 Retta in forma implicita, suoi coefficienti e vettore direzione

In un sistema di assi cartesiani si può scrivere qualsiasi retta nella forma $ax + by + c = 0$, dove a, b e c sono numeri reali. Questa forma è detta **implicita**.

I coefficienti di una retta in forma implicita sono legati a un vettore $\vec{v}$ perpendicolare alla retta stessa. In particolare a e b sono le componenti di questo vettore $\vec{v} \equiv (a; b)$.

Se abbiamo un punto $P_0(x_0; y_0)$ nel piano e un vettore $\vec{v} \equiv (a; b)$ allora una retta si può definire come l'insieme dei punti $P(x; y)$ estremi di un vettore $\overrightarrow{P_0P}$ perpendicolare al vettore $\vec{v}$.



3.2 Equazione di una retta in forma esplicita e implicita

Nel piano cartesiano possiamo scrivere qualsiasi retta (tranne quelle parallele all'asse y) nella forma $y = mx + q$, dove m è detto *coefficiente angolare* e ci dice come è inclinata la retta rispetto all'asse x, e dove q è il valore dell'ordinata del punto d'intersezione della retta con l'asse y. Questa forma è detta **esplicita** perché l'equazione è stata esplicitata rispetto alla y.

Esercizio 7 *Scrivi l'equazione della retta* $4x - 7y + 2 = 0$ *in forma esplicita e trova il suo coefficiente angolare.*

Per trovare la forma esplicita mettiamo in evidenza la y nell'equazione:

$$\begin{aligned} 4x - 7y + 2 &= 0 \\ -7y &= -4x - 2 \\ y &= \frac{4}{7}x + \frac{2}{7} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Il coefficiente angolare è il coefficiente della x quindi:

$$m = \frac{4}{7} \tag{3.2}$$

3.3 Disegnare una retta a partire dall'equazione

Per disegnare una retta a partire dall'equazione dobbiamo:

1. scrivere la retta in forma esplicita;
2. fare una tabella in cui calcoliamo le coordinate di due punti della retta;
3. riportare i punti nel piano cartesiano e congiungere i due punti con una linea retta.

Esercizio 8 *Disegna la retta di equazione* $5x + 6y - 4 = 0$.

La retta è in forma implicita, la trasformiamo in forma esplicita mettendo in evidenza la y.

$$\begin{aligned} 5x + 6y - 4 &= 0 \\ 6y &= -5x + 4 \\ y &= -\frac{5}{6}x + \frac{4}{6} \\ y &= -\frac{5}{6}x + \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{3.3}$$

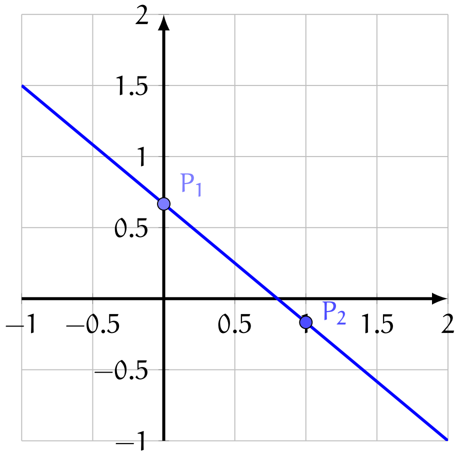
Attribuiamo a nostro piacimento due valori alla x (di solito 0 e 1) e ricaviamo i corrispondenti valori per la y.

x	y
0	$-\frac{5}{6}\cdot 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
1	$-\frac{5}{6}\cdot 1 + \frac{2}{3} = \frac{-5+4}{6} = -\frac{1}{6}$

Adesso abbiamo le coordinate di due punti della retta.

$$P_1\left(0; \frac{2}{3}\right) \simeq (0; 0{,}66) \quad ; \quad P_2\left(1; -\frac{1}{6}\right) \simeq (1; -0{,}17) \tag{3.4}$$

Li riportiamo nel piano e tracciamo la retta che passa per i due punti.



Ricordiamoci che per due punti del piano passa una ed una sola retta.

3.4 Retta passante per due punti e retta parallela ad un asse

Abbiamo due punti nel piano di coordinate $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$.

Se i due punti non passano per una retta parallela agli assi cartesiani, la seguente relazione ci fornisce l'equazione della retta passante per quei due punti.

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \tag{3.5}$$

Nella precedente relazione possiamo scambiare le coordinate di A con quelle di B: la retta sarà la medesima. Tuttavia la retta non può essere parallela agli assi, altrimenti uno o entrambi i denominatori si annullerebbero e l'equazione perderebbe di significato.

Eccezione
La formula della retta per due punti si può usare solo se la retta **non è** parallela agli assi.

Tutte le *rette parallele agli assi* hanno la forma $x = k$ (se parallele all'asse y) e $y = k$ (se parallele all'asse x). Il valore di k è il valore comune a tutti punti della retta: l'ascissa per le rette parallele all'asse y e l'ordinata per le rette parallele all'asse x.

Tuttavia, se scriviamo l'equazione (in maniera abbastanza inusuale) in una forma in cui non compaiano le frazioni allora l'equazione varrà in ogni caso.

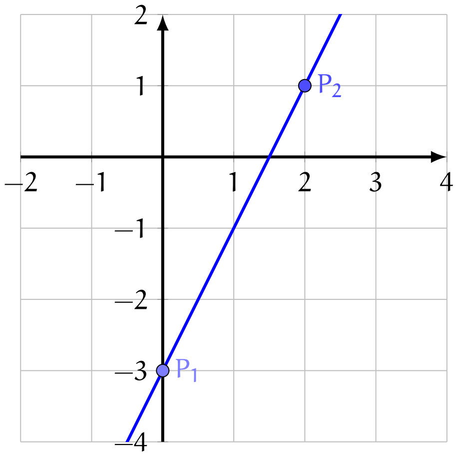
$$(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A) \tag{3.6}$$

Infatti, se la retta è parallela all'asse x scomparirà il primo membro, se la retta è parallela all'asse y scomparirà il secondo membro, ma in nessun caso avremo un'equazione impossibile.

3.5 Scrivere l'equazione di una retta dal suo grafico

Per scrivere l'equazione di una retta a partire dal grafico dobbiamo ricavare dal grafico le coordinate di due punti della retta. Dopodiché il problema diviene quello di trovare la retta passante per due punti.

Esercizio 9 *Trova l'equazione della retta descritta dal seguente grafico.*



Di solito prendiamo come punti i due punti eventuali che sono intersezione della retta con gli assi, oppure i punti facilmente identificabili nel grafico, come i punti P_1 e P_2, che stanno esattamente sulla griglia associata agli assi cartesiani. La scelta di chi sia il punto 1 o 2 è indifferente perché la retta risultante sarà la stessa.

Le coordinate dei due punti sono $P_1(0;-3)$ e $P_2(2;1)$ e non hanno né la stessa ascissa né la stessa ordinata. Possiamo quindi applicare la formula che ci dà l'equazione di una retta per due punti di coordinate note.

$$\begin{gathered} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad ; \quad \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-(-3)}{1-(-3)} \\ \frac{x}{2} = \frac{y+3}{4} \end{gathered} \tag{3.7}$$

Per chi avesse problemi con l'algebra questa è una proporzione: per eliminare i denominatori si può applicare la proprietà delle proporzioni (il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi).
Per cui scriviamo:

$$4x = 2(y+3) \tag{3.8}$$

Se dividiamo primo e secondo membro per uno stesso numero (qui ci starebbe bene un 2) l'equazione rappresenta sempre la stessa retta, ma l'espressione è più semplice.

$$2x = y+3 \tag{3.9}$$

Se portiamo tutti i termini a primo membro otteniamo la retta in forma implicita:

$$2x - y - 3 = 0 \tag{3.10}$$

Se mettiamo in evidenza la y otteniamo la retta in forma esplicita:

$$y = 2x - 3 \tag{3.11}$$

Da qui si vede che il coefficiente angolare (il numero che moltiplica la x) vale 2 e la retta è crescente da sinistra verso destra, così come giustamente appare nella figura iniziale.

Esercizio 10 *Trova l'equazione delle due rette rappresentate nel seguente grafico.*

La retta orizzontale che appare nel disegno è parallela all'asse x: ha quindi la forma $y = k$. Inoltre ha tutti i punti con ordinata 2 quindi k vale proprio 2.

La retta è $y = 2$.

La retta verticale che appare nel disegno è parallela all'asse y: ha quindi la forma $x = k$. Inoltre ha tutti i punti con ascissa 5 quindi k vale proprio 5.

La retta è $x = 5$.

3.6 Rette parallele agli assi cartesiani, passanti per l'origine, bisettrici dei quadranti

Tra le tipologie di rette fondamentali possiamo ricordare:

- L'equazione dell'asse delle ascisse, quindi parallela all'asse x: $\mathbf{y = 0}$.
- L'equazione dell'asse delle ordinate, quindi parallela all'asse y: $\mathbf{x = 0}$.
- Le rette passanti per l'origine, se in forma esplicita, hanno il parametro $q = 0$:

$$y = mx \tag{3.12}$$

- La retta bisettrice del I e III quadrante passa per l'origine e forma un angolo di 45 con l'asse delle ascisse, quindi con un coefficiente angolare che vale 1:

$$y = x \tag{3.13}$$

- La retta bisettrice del II e IV quadrante passa per l'origine e forma un angolo di −45 con l'asse delle ascisse, quindi con un coefficiente angolare che vale −1:

$$y = -x \tag{3.14}$$

3.7 Posizione reciproca di due rette

Nel piano euclideo due rette possono essere:

1. **Incidenti**, se si incontrano in un solo punto.
2. **Parallele e distinte**, se non si incontrano in nessun punto.
3. **Parallele e coincidenti**, se sono sovrapposte e hanno tutti i punti in comune.

Il problema di trovare cosa abbiano in comune due rette equivale a sapere come sono messe tra loro. Analiticamente (cioè riferendoci all'algebra) il problema si traduce nel cercare le soluzioni comuni (e quindi le coordinate dei punti) tra le equazioni delle due rette. Per cercare le soluzioni comuni tra due equazioni risolviamo il sistema che le considera entrambi.

In relazione alla classificazione prima esposta abbiamo tre possibilità:

1. *Il sistema ha una sola soluzione*. La soluzione rappresenta le coordinate del punto d'intersezione tra le rette. Le rette sono incidenti.
2. *Il sistema non ha soluzioni*. Le rette non hanno punti comuni e quindi sono parallele e distinte.
3. *Il sistema è indeterminato* e ha quindi infinite soluzioni. Le soluzioni sono date dalle coordinate di ogni punto di entrambe le rette. Le rette coincidono totalmente.

Tuttavia, senza procedere nella risoluzione completa del sistema, possiamo subito dire quale di questi tre casi riguarda le nostre rette, scrivendo le rette in forma implicita.

Se le rette hanno equazione $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ allora:

1. $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ una soluzione
2. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ nessuna soluzione
3. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ infinite soluzioni

Esercizio 11 *Trova la posizione reciproca tra le rette* $3x + 6y - 2 = 0$ *e* $y = 2x + 8$ *e l'eventuale loro punto di intersezione.*

Scriviamo anche la seconda retta in forma implicita e compariamo i coefficienti corrispondenti delle due rette.

$$2x - y + 8 = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{3}{2} \neq \frac{6}{-1} \neq \frac{-2}{8} \tag{3.16}$$

I primi due rapporti sono diversi: *le rette sono incidenti*. Se i primi due rapporti sono diversi il valore del terzo rapporto non ha importanza.

Troviamo il punto di intersezione tra le rette mettendo a sistema le loro equazioni (in generale è indifferente usare la forma implicita o esplicita).

$$\begin{cases} 3x + 6y - 2 = 0 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \tag{3.17}$$

Risolviamo il sistema col metodo di sostituzione mettendo in evidenza la y nella seconda (è già così) e sostituendola nella prima.

$$3x + 6(2x + 8) - 2 = 0 \quad ; \quad 3x + 12x + 48 - 2 = 0 \quad ; \quad 15x = -46 \quad ; \quad x = -\frac{46}{15} \tag{3.18}$$

Sostituendo questa valore nella seconda retta otteniamo:

$$y = 2\left(-\frac{46}{15}\right) + 8 = -\frac{92}{15} + 8 = \frac{-92 + 120}{15} = \frac{28}{15} \tag{3.19}$$

Il punto di intersezione è:

$$P\left(-\frac{46}{15}; \frac{28}{15}\right) \tag{3.20}$$

Esercizio 12 *Trova la posizione reciproca tra le rette* $3x + 6y - 2 = 0$ *e* $x = 3$.

Scriviamo anche la seconda retta in forma implicita e compariamo i coefficienti corrispondenti delle due rette.

$$x - 3 = 0 \tag{3.21}$$

$$\frac{3}{1} \neq \frac{6}{0} \neq \frac{-2}{-3} \tag{3.22}$$

I primi due rapporti sono diversi: *le rette sono incidenti*.

In particolare il secondo rapporto non ha neanche senso perché il denominatore è zero. Inoltre la seconda retta è del tipo parallelo ad un asse, mentre la prima no: era immediatamente evidente che le rette non avrebbero potuto essere parallele.

3.8 Coefficiente angolare di un segmento note le coordinate degli estremi

Se abbiamo un segmento *non verticale* di estremi $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ allora la retta sul quale giace (e quindi il segmento stesso) ha un coefficiente angolare dato da:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{3.23}$$

L'ordine dei punti non ha importanza.

Se il segmento è verticale non possiamo indicare un coefficiente angolare, così come per la retta associata: il denominatore della precedente espressione avrebbe denominatore nullo, perdendo di significato.

3.9 Retta passante per un punto e di coefficiente angolare noto

Una retta passante per un punto $P(x_0; y_0)$ e di coefficiente angolare m ha la forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{3.24}$$

Esercizio 13 *Trova la retta passante per il punto* $P(3; -8)$ *e di coefficiente angolare* $m = -5$.

Immediatamente possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} y - (-8) &= -5(x - 3) \\ y + 8 &= -5x + 15 \\ y &= -5x + 15 - 8 \\ y &= -5x + 7 \end{aligned} \tag{3.25}$$

3.10 Retta passante per un punto e parallela a una retta data

Vogliamo trovare l'equazione di una retta parallela a una retta data e che passa per un punto (dato anch'esso).

Tutte le rette tra loro parallele hanno la stessa direzione e quindi la stessa inclinazione rispetto all'asse x e lo stesso coefficiente angolare (se esiste).

I metodo

1. Scriviamo la retta in forma *esplicita* in modo da conoscere il suo coefficiente angolare.
2. Scriviamo la generica retta con lo stesso coefficiente angolare di quella data ($y = mx + q$).
3. Imponiamo che passi per il punto dato per ricavare il parametro q.

Tuttavia quando la retta è verticale non esiste un coefficiente angolare. Tutte le rette di questo tipo hanno la forma $x = k$. Se la retta parallela a quella data deve passare per un punto $P(x_0; y_0)$ deve avere la stessa ascissa e quindi la retta cercata è $x = x_0$.

II metodo

1. Scriviamo la retta in forma *implicita* $ax + by + c = 0$.
2. La generica retta ad essa parallela ha la forma $ax + by + k = 0$.
3. Imponiamo che passi per il punto dato in modo da trovare il valore di k.

Questo metodo vale sempre.

Esercizio 14 *Trova la retta parallela alla retta* $3x - 7y + 5 = 0$ *e passante per il punto* $P(-3; 2)$.

La scriviamo in forma esplicita:

$$\begin{aligned} 7y &= 3x + 5 \\ y &= \frac{3}{7}x + \frac{5}{7} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Il coefficiente angolare è $m = \frac{3}{7}$.
Scriviamo l'equazione della generica retta parallela alla retta data:

$$y = \frac{3}{7}x + q \tag{3.27}$$

Dobbiamo trovare il valore del parametro q specifico di questa retta: lo troviamo imponendo che la retta passi per il punto P. Questa condizione significa che le coordinate del punto P devono soddisfare l'equazione della retta.

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{3}{7}(-3) + q \\ q &= 2 + \frac{9}{7} = \frac{14+9}{7} = \frac{23}{7} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Quindi la retta è:

$$y = \frac{3}{7}x + \frac{23}{7} \tag{3.29}$$

Oppure

La retta parallela alla retta data ha la forma $3x - 7y + k = 0$. Per trovare il valore del parametro k imponiamo che passi per il punto dato.

$$3(-3) - 7(2) + k = 0 \quad ; \quad k = 9 + 14 = 23 \tag{3.30}$$

La retta cercata è:

$$3x - 7y + 23 = 0 \tag{3.31}$$

Esercizio 15 *Trova la retta parallela alla retta* $x = 40$ *e passante per il punto* $P(6; -5)$.

La retta data è parallela all'asse y: è il caso particolare del primo metodo. La retta cercata ha la stessa forma e passa per l'ascissa del punto P.

$$x = 6 \tag{3.32}$$

3.11 Retta passante per un punto e perpendicolare a una retta data

Vogliamo trovare l'equazione di una retta perpendicolare a una retta data e che passa per un certo punto (dato anch'esso).

I metodo

Bisogna ricordare che le rette tra loro perpendicolari hanno i coefficienti angolari legati dalla seguente relazione:

$$m^{'} = -\frac{1}{m} \tag{3.33}$$

Dove m e $m^{'}$ sono i coefficienti angolari della retta di partenza e della sua perpendicolare.

1. Scriviamo la retta in forma *esplicita* in modo da conoscere il suo coefficiente angolare.
2. Troviamo il coefficiente angolare della generica perpendicolare.
3. Scriviamo l'equazione della retta perpendicolare come retta passante per un punto e di coefficiente angolare dato.

Tuttavia quando la retta di partenza o la perpendicolare sono verticali allora non esiste un coefficiente angolare.

- Se la retta di partenza è parallela all'asse y allora la perpendicolare è parallela all'asse x e ha equazione del tipo $y = y_0$, dove y_0 è l'ordinata del punto in cui deve passare la perpendicolare.
- Se la retta di partenza è parallela all'asse x allora la perpendicolare è parallela all'asse y e ha equazione del tipo $x = x_0$, dove x_0 è l'ascissa del punto in cui deve passare la perpendicolare.

II metodo

Abbiamo due rette in forma implicita: $ax + by + c = 0$ e $a^{'}x + b^{'}y + c^{'} = 0$ associate rispettivamente ai vettori direzione $\vec{v} = (a; b)$ e $\vec{w} = (a^{'}; b^{'})$. Se le rette sono perpendicolari allora anche i loro vettori direzione sono perpendicolari tra loro. Questo significa che il loro prodotto scalare vale zero. Di conseguenza:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = aa^{'} + bb^{'} = 0 \tag{3.34}$$

Questa condizione di perpendicolarità ci consente di trovare le componenti del vettore $\vec{w}$ a meno di una constante di proporzionalità, dato che esistono infiniti vettori perpendicolari ad un vettore dato, anche se tutti con la stessa direzione.

Per cui, dalla condizione precedente, attribuiamo ad $a^{'}$ o $b^{'}$ un valore a piacimento e di conseguenza un valore per l'altro coefficiente. Infine imponiamo il passaggio per il punto dato per dare un valore al coefficiente $c^{'}$.

Questo metodo si può usare sempre.

Esercizio 16 *Trova la retta perpendicolare alla retta* $2x + 8y - 5 = 0$ *e passante per il punto* $P(5 : -2)$

Scriviamo la retta data in forma esplicita.

$$\begin{aligned} 8y &= -2x + 5 \\ y &= -\frac{2}{8}x + \frac{5}{8} \\ y &= -\frac{1}{4}x + \frac{5}{8} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Il coefficiente angolare è $m = -\frac{1}{4}$. Scriviamo il coefficiente angolare della perpendicolare:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)} = 4 \tag{3.36}$$

Scriviamo l'equazione della retta passante per il punto P e di coefficiente angolare m'.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m'(x - x_0) \\ y - (-2) &= 4(x - 5) \\ y + 2 &= 4x - 20 \\ y &= 4x - 22 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Oppure

La condizione di perpendicolarità tra la retta data e quella incognita è:

$$2a' + 8b' = 0 \tag{3.38}$$

Mettiamo in evidenza un coefficiente e diamo un valore a piacimento all'altro.

$$\begin{aligned} 2a' = -8b' \quad &; \quad a' = -4b' \\ b' = 1 \ \Rightarrow \ a' &= -4 \cdot 1 = -4 \end{aligned} \tag{3.39}$$

La retta ha la forma $-4x + y + c' = 0$. Imponiamo che passi per il punto dato.

$$-4(5) + 1(-2) + c' = 0 \quad ; \quad c' = 20 + 2 = 22 \tag{3.40}$$

Infine la retta è:

$$-4x + y + 22 = 0 \tag{3.41}$$

Esercizio 17 *Trova la retta perpendicolare alla retta* $y = 4$ *e passante per il punto* $P(1 : -2)$

La retta di partenza è parallela all'asse x e la retta ad essa perpendicolare sarà quindi parallela all'asse y. La sua forma generica è: $x = k$. Imponiamo che abbia l'ascissa del punto P.

La retta cercata è:

$$x = 1 \tag{3.42}$$

3.12 Fasci propri e impropri di rette

Esistono due tipi di fasci di rette:

1. **Fascio proprio**: l'insieme delle infinite rette passanti per un punto.

   Se consideriamo l'equazione di una retta passante per un punto $P(x_0; y_0)$ (il centro del fascio) e di coefficiente angolare m (incognito) allora il *fascio proprio* di rette per un punto è dato dall'equazione:
   $$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{3.43}$$
   Al variare di m si hanno tutte le rette del fascio *tranne* quella parallela all'asse y: infatti le rette parallele all'asse y (cioè quelle della forma $x = h$) non possono essere rappresentate in questa forma, dal momento che per esse non esiste un coefficiente angolare.

2. **Fascio improprio**: l'insieme delle infinite rette parallele ad una retta data.

   Se consideriamo l'insieme di rette parallele tra loro e quindi con lo stesso coefficiente angolare allora il *fascio improprio* di rette per un punto è dato dall'equazione:
   $$y = mx + k \tag{3.44}$$
   dove m è il coefficiente angolare (fisso) della retta a cui sono parallele tutte le rette del fascio. Al variare di k si hanno tutte le rette del fascio e anche in questo caso le rette parallele all'asse y (cioè quelle della forma $x = h$) non possono essere rappresentate in questa forma.
   In alternativa, considerando la condizione di parallelismo tra rette espresse in forma implicita, *tutte* le rette del fascio, senza eccezioni, sono date da un'equazione del tipo:
   $$ax + by + k = 0 \tag{3.45}$$
   al variare anche qui del parametro k. Le rette del fascio saranno tutte parallele ad una retta data di equazione $ax + by + c = 0$.

Esercizio 18 *Scrivi l'equazione del fascio proprio di rette passanti per il punto* $P(1 : -2)$.

Il fascio è formato dall'equazione del tipo 3.43 più la retta parallela all'asse y per passante per il punto P. Il primo tipo di equazione è:

$$\begin{aligned} y - (-2) &= m(x - 1) \\ y &= m(x - 1) - 2 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Insieme alla retta verticale il fascio è:

$$y = m(x - 1) - 2 \ \vee \ x = 1 \tag{3.47}$$

3.13 Fascio generato da due rette

Abbiamo due rette in forma implicita:

$$r : ax + by + c = 0 \quad \text{e} \qquad s : a'x + b'y + c' = 0 \tag{3.48}$$

Chiamiamo *fascio generato dalle due rette* l'insieme costituito dalla retta s e dalle rette associate all'equazione:

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0 \tag{3.49}$$

al variare di $k \in \Re$.
L'equazione è detta combinazione lineare delle due equazioni delle rette.

Esercizio 19 *Scrivi l'equazione del fascio di rette generato dalle rette* $3x - 6y = 0$ *e* $7x + 2y + 8 = 0$.

Il fascio è dato dalla combinazione lineare delle due equazioni più l'equazione della retta moltiplicata per il parametro.

$$3x - 6y + k(7x + 2y + 8) = 0 \ \vee \ 7x + 2y + 8 = 0 \tag{3.50}$$

Esercizio 20 *Studia il fascio individuato dall'equazione* $(3k + 6)x + (3 + 2k)y - 3 = 0$ *trovando le rette generatrici, il tipo di fascio e l'eventuale punto comune.*

Per trovare le rette generatrici e capire di che tipo di fascio si tratti sviluppiamo l'equazione, separando i termini col k da quelli senza.

$$\begin{gathered} (3k + 6)x + (3 + 2k)y - 3 = 0 \\ 3kx + 6x + 3y + 2ky - 3 = 0 \\ 6x + 3y - 3 + k(3x + 2y) = 0 \end{gathered} \tag{3.51}$$

Per cui le rette generatrici sono:

$$6x + 3y - 3 = 0 \quad ; \quad 3x + 2y = 0 \tag{3.52}$$

Le rette non sono parallele perché i loro parametri non sono proporzionali ($6/3 \neq 3/2$) e quindi il fascio è proprio; possiamo trovare il punto comune facendo sistema tra le due rette.

$$\begin{cases} 6x + 3y - 3 = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \tag{3.53}$$

$$\begin{gathered} 3x = -2y \quad ; \quad x = -\frac{2y}{3} \\ 6\left(-\frac{2y}{3}\right) + 3y - 3 = 0 \\ -4y + 3y - 3 = 0 \\ -y = 3 \\ y = -3 \quad ; \quad x = -\frac{2(-3)}{3} = 2 \end{gathered}$$

Il punto è $P(2; -3)$.

Esercizio 21 *Trova la retta appartenente al fascio di rette di equazione* $(5k-1)x+(7-k)y-k+1=0$ *e passante per il punto* $P(1;4)$.

Per trovare quale retta del fascio passi per il punto dato imponiamo il passaggio del fascio per il punto e troviamo l'opportuno valore di k.

$$\begin{aligned} (5k-1)(1)+(7-k)(4)-k+1&=0 \\ \cancel{5k}-1+28\cancel{-4k}\cancel{-k}+1&=0 \\ 28&=0 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Abbiamo ottenuto un'equazione impossibile e nessun valore di k: come è possibile?
La retta del fascio è la generatrice del fascio che risulta moltiplicata per il parametro k, cioè l'unica retta del fascio proprio che non è rappresentata dall'equazione data. Per trovarla troviamo le generatrici del fascio.

$$\begin{aligned} (5k-1)x+(7-k)y-k+1&=0 \\ 5kx-x+7y-ky-k+1&=0 \\ -x+7y+1+k(5x+7y-1)&=0 \end{aligned} \tag{3.55}$$

La retta cercata è:

$$5x+7y-1=0 \tag{3.56}$$

3.14 Distanza di un punto da una retta

La distanza di un punto da un retta è la lunghezza del segmento della retta perpendicolare alla retta data compreso tra il punto stesso e il punto di intersezione della perpendicolare con la retta data.

In pratica, se la retta ha equazione $ax+by+c=0$ e il punto è $P(x_0;y_0)$, la distanza tra la retta e il punto è data dalla seguente formula.

$$d_{rP}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{3.57}$$

Esercizio 22 *Trova la distanza del punto* $P(6;-8)$ *dalla retta* $y=-3x+2$.

Scriviamo la retta in forma implicita.

$$3x+y-2=0 \tag{3.58}$$

Applichiamo direttamente la formula.

$$d_{rP}=\frac{|3(6)+1(-8)-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|18-8-2|}{\sqrt{9+1}}=\frac{8}{\sqrt{10}} \tag{3.59}$$

Ricordiamoci che le distanze assumono *sempre* valori positivi.

3.15 Asse di un segmento: definizione e metodo per la sua individuazione

L'asse di un segmento è la retta luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento.

Supponiamo di avere due punti $A(x_a; y_a)$ e $B(x_b; y_b)$, estremi del segmento AB.
I punti $P(x; y)$ dell'asse hanno la stessa distanza dal punto A e B. Ricordando l'espressione della distanza tra due punti possiamo scrivere:

$$\begin{gathered}\overline{PA} = \overline{PB} \\ \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2} = \sqrt{(x - x_b)^2 + (y - y_b)^2}\end{gathered} \tag{3.60}$$

Dal momento che le radici sono entrambe sempre positive possiamo elevare al quadrato entrambi i membri dell'ultima equazione e scrivere:

$$(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 \tag{3.61}$$

Questa è l'equazione dell'asse.

Oppure

L'asse di un segmento è una retta passante per il punto medio del segmento e perpendicolare al segmento stesso.

*Se il segmento **non** è orizzontale*, per costruire l'asse:

1. Troviamo le coordinate del punto medio del segmento.
2. Troviamo la direzione del segmento.
3. Troviamo il coefficiente angolare della retta perpendicolare al segmento.
4. Imponiamo che quella generica retta passi per il punto medio.

Se il segmento è orizzontale possiamo procedere così:

1. Troviamo le coordinate del punto medio del segmento.
   (Se il segmento è orizzontale allora il coefficiente angolare del segmento è zero e non esiste il coefficiente angolare della perpendicolare)
2. L'asse è la retta verticale che ha per ascissa quella del punto medio: $x = x_m$

Esercizio 23 *Trova l'asse del segmento di estremi* $A(-2; 1)$ *e* $B(5; 9)$.

Scriviamo immediatamente la relazione (3.61).

$$\begin{aligned}(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 &= (x - 5)^2 + (y - 9)^2 \\ \cancel{x^2} + 4x + 4 + \cancel{y^2} - 2y + 1 &= \cancel{x^2} - 10x + 25 + \cancel{y^2} - 18y + 81 \\ 14x + 16y - 101 &= 0\end{aligned} \tag{3.62}$$

Oppure

Il segmento non è orizzontale: i due punti hanno ordinate diverse. Allora usiamo il primo metodo e troviamo le coordinate del punto medio.

$$P(x_m; y_m) = \left(\frac{-2 + 5}{2}; \frac{1 + 9}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}; 5 \right) \tag{3.63}$$

Troviamo la direzione del segmento (ovvero il coefficiente angolare della retta passante per gli estremi del segmento)

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-1}{5-(-2)} = \frac{8}{7} \tag{3.64}$$

Troviamo il coefficiente angolare della retta perpendicolare al segmento

$$m' = -\frac{1}{\frac{8}{7}} = -\frac{7}{8} \tag{3.65}$$

La retta perpendicolare al segmento e passante per il punto medio (cioè l'asse) è:

$$\begin{aligned} y - y_m &= m'(x - x_m) \\ y - 5 &= -\frac{7}{8}\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ y &= -\frac{7}{8}x + \frac{21}{16} + 5 \\ y &= -\frac{7}{8}x + \frac{21+80}{16} \\ y &= -\frac{7}{8}x + \frac{101}{16} \end{aligned} \tag{3.66}$$

Esercizio 24 *Trova l'asse del segmento di estremi* $A(-2;1)$ *e* $B(5;1)$.

Il segmento è orizzontale: i due punti hanno la stessa ordinata. Allora usiamo il secondo metodo e troviamo le coordinate del punto medio.

$$P(x_m; y_m) = \left(\frac{-2+5}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; 1\right) \tag{3.67}$$

Infine l'asse, essendo una retta verticale, ha equazione del tipo $x = x_m$:

$$x = \frac{3}{2} \tag{3.68}$$

3.16 Bisettrici degli angoli formati da due rette: definizione e metodo per la loro individuazione

La bisettrice di un angolo è la semiretta che divide l'angolo in due angoli congruenti (uguali).

Se abbiamo due rette che si intersecano in un punto allora esse formano quattro angoli a due a due congruenti: formano coppie di angoli opposti al vertice e quindi tra loro congruenti.

Chiamiamo bisettrice anche la retta che divide queste coppie di angoli opposti al vertice. Questa retta è il luogo dei punti equidistanti dalle due rette che formano l'angolo. Se usiamo la formula della distanza di un punto generico $P(x;y)$ della bisettrice dalle due rette $ax+by+c=0$ e $a^{'}x+b^{'}y+c=0$ che formano l'angolo possiamo scrivere:

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a^{'}x+b^{'}y+c|}{\sqrt{a^{'2}+b^{'2}}} \tag{3.69}$$

L'uguaglianza tra i due valori assoluti è equivalente alla seguente relazione che ci fornisce le due rette bisettrici delle due coppie di angoli formati dalle rette.

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a^{'}x+b^{'}y+c}{\sqrt{a^{'2}+b^{'2}}} \tag{3.70}$$

Esercizio 25 *Trova le equazioni delle bisettrici individuate dalle rette* $y=-2x+7$ *e* $y=5x+8$.

Scriviamo le due rette in forma implicita.

$$y=-2x+7 \quad ; \quad 2x+y-7=0 \tag{3.71}$$

$$y=5x+8 \quad ; \quad 5x-y+8=0 \tag{3.72}$$

Scriviamo la relazione fondamentale per ricavare le bisettrici e poi sviluppiamo la relazione col più e poi quella col meno.

$$\begin{gathered}\frac{2x+y-7}{\sqrt{2^2+1^2}}=\pm\frac{5x-y+8}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}\\ \frac{2x+y-7}{\sqrt{5}}=\pm\frac{5x-y+8}{\sqrt{26}}\\ \sqrt{26}(2x+y-7)=\pm\sqrt{5}(5x-y+8)\end{gathered} \tag{3.73}$$

Bisettrice col più.

$$\begin{gathered}\sqrt{26}(2x+y-7)=\sqrt{5}(5x-y+8)\\ 2\sqrt{26}x+\sqrt{26}y-7\sqrt{26}-5\sqrt{5}x+\sqrt{5}y-8\sqrt{5}=0\\ x(2\sqrt{26}-5\sqrt{5})+y(\sqrt{26}+\sqrt{5})-7\sqrt{26}-8\sqrt{5}=0\end{gathered} \tag{3.74}$$

Bisettrice col meno.

$$\begin{gathered}\sqrt{26}(2x+y-7)=-\sqrt{5}(5x-y+8)\\ 2\sqrt{26}x+\sqrt{26}y-7\sqrt{26}+5\sqrt{5}x-\sqrt{5}y+8\sqrt{5}=0\\ x(2\sqrt{26}+5\sqrt{5})+y(\sqrt{26}-\sqrt{5})-7\sqrt{26}+8\sqrt{5}=0\end{gathered} \tag{3.75}$$

Esercizio 26 *Trova la bisettrice relativa al vertice* A *del triangolo di vertici* $A(-3;2)$, $B(2;1)$, $C(1;5)$.

La formula relativa alle bisettrici di un angolo ci consente di trovare due bisettrici relative allo stesso vertice di quattro angoli a due a due congruenti. Si tratta quindi di trovare prima le rette che formano gli angoli e poi di scegliere quale delle due bisettrici è quella che a noi interessa.

Rette relative ai lati

Cominciamo allora col trovare la retta per $\overline{AB}$, come retta passante per due punti.

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}$$
$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-1}{2-1} \quad ; \quad \frac{x-2}{-5}=\frac{y-1}{1} \tag{3.76}$$
$$(x-2)=-5(y-1) \quad ; \quad x-2=-5y+5 \quad ; \quad x+5y-7=0$$

Poi la retta per $\overline{AC}$.

$$\frac{x-1}{-3-1}=\frac{y-5}{2-5} \quad ; \quad \frac{x-1}{-4}=\frac{y-5}{-3} \tag{3.77}$$
$$-3(x-1)=-4(y-5) \quad ; \quad -3x+3=-4y+20 \quad ; \quad -3x+4y-17=0$$

Bisettrici

Troviamo le bisettrici relative ai lati $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ ovvero all'angolo in A. Scriviamo la relazione fondamentale per ricavare le bisettrici e poi sviluppiamo la relazione col più e poi quella col meno.

$$\frac{x+5y-7}{\sqrt{1^2+5^2}}=\pm\frac{-3x+4y-17}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}$$
$$\frac{x+5y-7}{\sqrt{26}}=\pm\frac{-3x+4y-17}{\sqrt{25}} \tag{3.78}$$
$$5(x+5y-7)=\pm\sqrt{26}(-3x+4y-17)$$

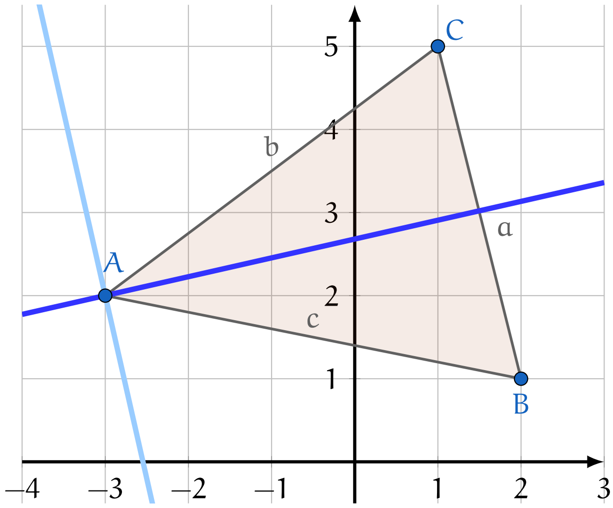
Bisettrice col più.

$$5(x+5y-7)=\sqrt{26}(-3x+4y-17) \tag{3.79}$$
$$5x+25y-35=-3\sqrt{26}x+4\sqrt{26}y-17\sqrt{26}$$
$$(5+3\sqrt{26})x+(25-4\sqrt{26})y-35+17\sqrt{26}=0$$

Bisettrice col meno.

$$5(x+5y-7)=-\sqrt{26}(-3x+4y-17) \tag{3.80}$$
$$5x+25y-35=3\sqrt{26}x-4\sqrt{26}y+17\sqrt{26}$$
$$(5-3\sqrt{26})x+(25+4\sqrt{26})y-35-17\sqrt{26}=0$$

Per capire quale delle due rette sia quella giusta rappresentiamo il triangolo dato e disegniamo, approssimativamente, le due bisettrici relative all'angolo dato.



In questo disegno le due bisettrici sono disegnate in blu e celeste. La bisettrice cercata è quella blu e quindi col coefficiente angolare piccolo; invece l'altra ha un coefficiente angolare molto alto perché molto più verticale. Calcoliamo quindi il coefficiente angolare della prima e della seconda retta, ricordando che, se abbiamo al forma implicita, esso vale $m = -a/b$ dove a e b sono i coefficienti della retta.

$$m_1 = -\frac{(5 + 3\sqrt{26})}{(25 - 4\sqrt{26})} \simeq -4{,}4 \tag{3.81}$$

$$m_2 = -\frac{(5 - 3\sqrt{26})}{(25 + 4\sqrt{26})} \simeq 0{,}2 \tag{3.82}$$

La bisettrice cercata è la seconda:

$$(5 - 3\sqrt{26})x + (25 + 4\sqrt{26})y - 35 - 17\sqrt{26} = 0 \tag{3.83}$$

4 Punti notevoli di un triangolo

Tutti i punti qui descritti sono l'intersezione di tre rette o segmenti. Per la loro determinazione basta trovare due di queste rette o segmenti.

4.1 Baricentro

Il baricentro di un triangolo, oltre a poter essere considerato come baricentro di un poligono qualsiasi, è anche il punto di intersezione delle mediane dei suoi lati.

La mediana relativa ad un lato è il segmento che congiunge il punto medio di un lato con il vertice dell'angolo opposto.

Esercizio 27 *Trova il baricentro del triangolo di vertici* $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(5;-3)$.

Possiamo trovare il baricentro immediatamente con la formula relativa al baricentro di un poligono.

$$G(x_G;y_G) = \left(\frac{-2+2+5}{3};\frac{1+4-3}{3}\right) = \left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right) \tag{4.1}$$

Oppure

Cerchiamo il baricentro come intersezione di due mediane.
Il punto medio del lato $\overline{AB}$ è:

$$P_{AB} = \left(\frac{-2+2}{2};\frac{1+4}{2}\right) = \left(0;\frac{5}{2}\right) \tag{4.2}$$

Il vertice opposto a questo lato è il punto C. La mediana è la retta per P_{AB} e C.

$$\begin{gathered}\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2}\\ \frac{x-5}{0-5} = \frac{y-(-3)}{\frac{5}{2}-(-3)} \quad ; \quad \frac{x-5}{-5} = \frac{y+3}{\frac{5+6}{2}} \quad ; \quad \frac{x-5}{-5} = \frac{2(y+3)}{11}\\ 11(x-5) = -5(2)(y+3) \quad ; \quad 11x-55 = -10y-30 \quad ; \quad 11x+10y-25 = 0\end{gathered} \tag{4.3}$$

Il punto medio del lato $\overline{BC}$ è:

$$P_{BC} = \left(\frac{2+5}{2};\frac{4-3}{2}\right) = \left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right) \tag{4.4}$$

Il vertice opposto a questo lato è il punto A. La mediana è la retta per P_{BC} e A.

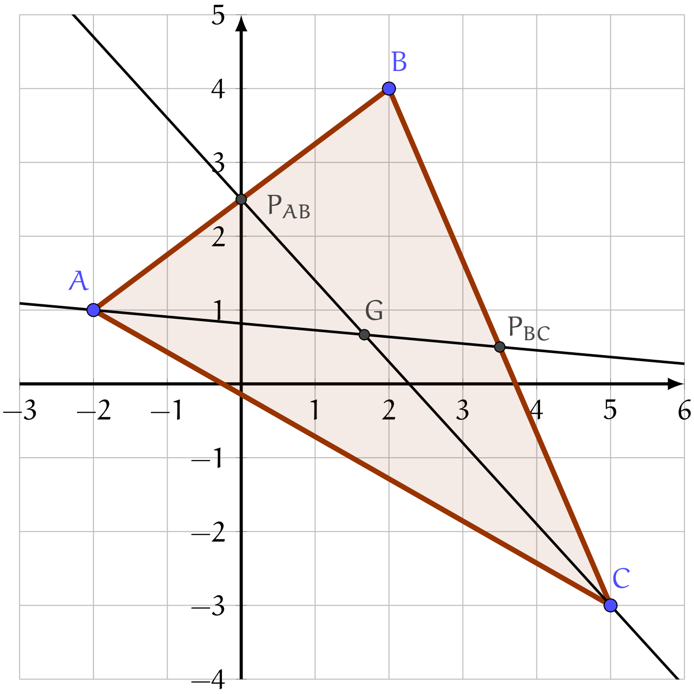
$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}$$
$$\frac{x-(-2)}{\frac{7}{2}-(-2)}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}-1} \quad ; \quad \frac{x+2}{\frac{7+4}{2}}=\frac{y-1}{\frac{1-2}{2}} \quad ; \quad \frac{x+2}{\frac{11}{2}}=\frac{y-1}{-\frac{1}{2}} \tag{4.5}$$
$$-(x+2)=11(y-1) \quad ; \quad -x-2=11y-11 \quad ; \quad x+11y-9=0$$

Cerchiamo il punto di intersezione delle due rette.

$$\begin{cases} 11x+10y-25=0 \\ x+11y-9=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 11(-11y+9)+10y-25=0 \\ x=-11y+9 \end{cases} \tag{4.6}$$

$$-121y+99+10y-25=0 \quad ; \quad -111y=-74$$
$$y=\frac{-74}{-11}=\frac{2}{3}$$
$$x=-11y+9=-11\left(\frac{2}{3}\right)+9=\frac{-22+27}{3}=\frac{5}{3} \tag{4.7}$$
$$G\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$$

Il baricentro è un punto sempre interno al triangolo, come si vede dal grafico seguente.



4.2 Circocentro

Il circocentro di un triangolo è il punto di incontro degli assi relativi ai lati del triangolo.

Asse relativo ad un lato è la retta che passa per il punto medio del lato ed è ad esso perpendicolare o il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.

Esercizio 28 *Trova il circocentro del triangolo di vertici* $A(-2;-1)$, $B(2;4)$, $C(5;2)$.

Cerchiamo il circocentro come intersezione di due assi.
Prendiamo l'asse relativo ai lati $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Applichiamo il II metodo illustrato in [3.15].
L'equazione dell'asse relativo ad $\overline{AB}$ è:

$$\begin{aligned} (x-(-2))^2+(y-(-1))^2 &= (x-2)^2+(y-4)^2 \\ \cancel{x^2}+4x+\cancel{4}+\cancel{y^2}+2y+1 &= \cancel{x^2}-4x+\cancel{4}+\cancel{y^2}-8y+16 \\ 8x+10y-15 &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

L'equazione dell'asse relativo ad $\overline{AC}$ è:

$$\begin{aligned} (x-(-2))^2+(y-(-1))^2 &= (x-5)^2+(y-2)^2 \\ \cancel{x^2}+4x+\cancel{4}+\cancel{y^2}+2y+1 &= \cancel{x^2}-10x+25+\cancel{y^2}-4y+\cancel{4} \\ 14x+6y-24 &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Infine intersechiamo i due assi trovati.

$$\begin{cases} 8x+10y-15=0 \\ 14x+6y-24=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{7}{3}x+4 \end{cases} \quad ; \quad -\frac{4}{5}x+\frac{3}{2}=-\frac{7}{3}x+4 \tag{4.10}$$

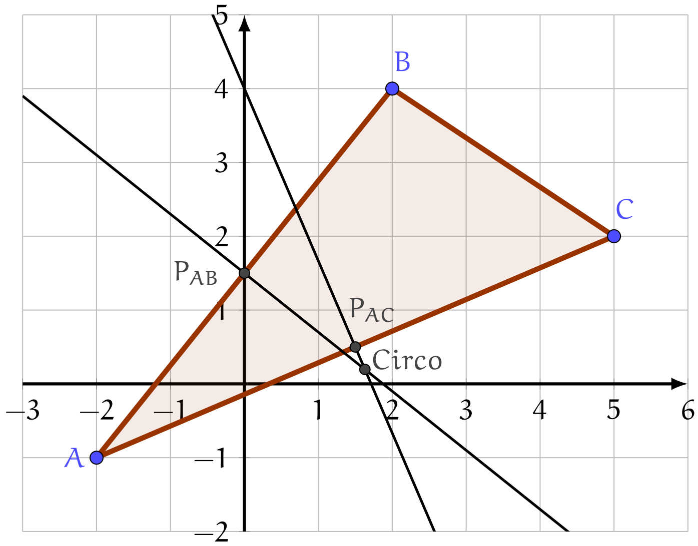
Moltiplichiamo per 30 l'ultima equazione trovata.

$$\begin{aligned} -24x+45=-70x+120 \quad &; \quad -24x+70x=120-45 \\ 46x=75 \quad &; \quad x=\frac{75}{46} \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$y=-\frac{7}{3}x+4=-\frac{7}{3}\cdot\frac{75}{46}+4=\frac{-174+184}{46}=\frac{9}{46} \tag{4.12}$$

Il circocentro ha coordinate $\left(\frac{75}{46};\frac{9}{46}\right)$.

Questo punto non sta dentro il triangolo, come vediamo dal grafico seguente.



4.3 Ortocentro

Ortocentro di un triangolo è il punto di incontro delle altezze del triangolo.

Altezza relativa ad un lato è il segmento perpendicolare ad un lato che lo congiunge con il vertice che ad esso si oppone.

Esercizio 29 *Trova l'ortocentro del triangolo di vertici* $A(-1;2)$, $B(-3;-1)$, $C(5;1)$.

Troviamo le altezze relative ai lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. La direzione del segmento AB è:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-2}{-3-(-1)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \tag{4.13}$$

La direzione della perpendicolare e quindi dell'altezza è:

$$m'_{AB} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \tag{4.14}$$

L'equazione dell'altezza (retta passante per il punto C e coefficiente angolare m'_{AB}) è:

$$\begin{aligned} y-1 &= -\frac{2}{3}(x-5) \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} + 1 \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{10+3}{3} \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3} \end{aligned} \tag{4.15}$$

La direzione del segmento BC è:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-(-1)}{5-(-3)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \tag{4.16}$$

La direzione della perpendicolare e quindi dell'altezza è:

$$m'_{BC} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4 \tag{4.17}$$

L'equazione dell'altezza (retta passante per il punto A e coefficiente angolare m'_{BC}) è:

$$\begin{aligned} y-2 &= -4(x-(-1)) \\ y &= -4x-4+2 \\ y &= -4x-2 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Infine intersechiamo le due altezze trovate.

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3} \\ y = -4x-2 \end{cases} \quad ; \quad -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3} = -4x - 2 \tag{4.19}$$

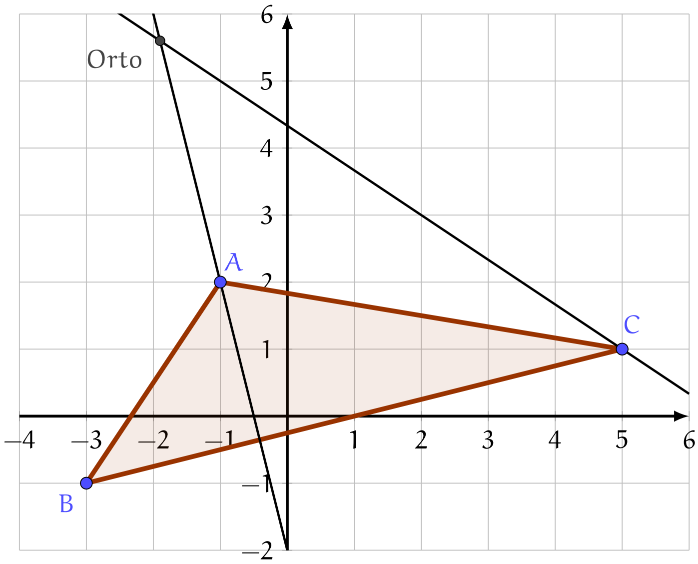
Moltiplichiamo per 3 l'ultima equazione trovata.

$$-2x + 13 = -12x - 6 \quad ; \quad -2x + 12x = -6 - 13 \quad ; \quad 10x = -19 \quad ; \quad x = -\frac{19}{10} \tag{4.20}$$

$$y = -4x - 2 = -4 \cdot \left(-\frac{19}{10}\right) - 2 = \frac{76 - 20}{10} = \frac{56}{10} = \frac{28}{5} \tag{4.21}$$

L'ortocentro ha coordinate $\left(-\frac{19}{10}; \frac{28}{5}\right)$.

Questo punto non sta dentro il triangolo, come vediamo dal grafico seguente.



4.4 Incentro

L'incentro di un triangolo è il punto di incontro delle bisettrici relative agli angoli del triangolo.

Bisettrice è ogni semiretta che passa per un vertice e divide l'angolo relativo in due parti uguali.

Esercizio 30 *Trova l'incentro del triangolo di vertici* $A(-1;3)$, $B(2;-4)$, $C(5;3)$.

Abbiamo bisogno di tracciare due bisettrici e per tracciare queste abbiamo bisogno dell'equazione delle rette che costituiscono i lati dell'angolo che dobbiamo bisecare.

Rette relative ai lati

Cominciamo allora col trovare la retta per $\overline{AB}$, come retta passante per due punti.

$$\begin{gathered} \frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2} \\ \frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-(-4)}{3-(-4)} \quad ; \quad \frac{x-2}{-3}=\frac{y+4}{7} \\ 7(x-2)=-3(y+4) \quad ; \quad 7x-14=-3y-12 \quad ; \quad 7x+3y-2=0 \end{gathered} \tag{4.22}$$

Poi la retta per $\overline{BC}$.

$$\begin{gathered} \frac{x-5}{2-5}=\frac{y-3}{-4-3} \quad ; \quad \frac{x-5}{-3}=\frac{y-3}{-7} \\ -7(x-5)=-3(y-3) \quad ; \quad -7x+35=-3y+9 \quad ; \quad -7x+3y+26=0 \end{gathered} \tag{4.23}$$

Infine la retta per $\overline{AC}$.

$$\begin{gathered} \frac{x-5}{-1-5}=\frac{y-3}{3-3} \quad ; \quad \frac{x-5}{-6}=\frac{y-3}{0} \\ y-3=0 \end{gathered} \tag{4.24}$$

Bisettrici

Troviamo le bisettrici relative ai lati $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ ovvero all'angolo in A. Scriviamo la relazione fondamentale per ricavare le bisettrici e poi sviluppiamo la relazione col più e poi quella col meno.

$$\begin{gathered} \frac{7x+3y-2}{\sqrt{7^2+3^2}}=\pm\frac{y-3}{\sqrt{1^2}} \\ \frac{7x+3y-2}{\sqrt{58}}=\pm(y-3) \\ (7x+3y-2)=\pm\sqrt{58}(y-3) \end{gathered} \tag{4.25}$$

Bisettrice col più.

$$(7x+3y-2)=\sqrt{58}(y-3) \tag{4.26}$$

$$7x+3y-2=\sqrt{58}y-3\sqrt{58}$$

$$7x+(3-\sqrt{58})y-2+3\sqrt{58}=0$$

Bisettrice col meno.

$$\begin{aligned}(7x+3y-2) &= -\sqrt{58}(y-3) \\ 7x+3y-2 &= -\sqrt{58}y+3\sqrt{58} \\ 7x+(3+\sqrt{58})y-2-3\sqrt{58} &= 0\end{aligned} \tag{4.27}$$

Troviamo le bisettrici relative ai lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ ovvero all'angolo in B.

$$\begin{aligned}\frac{7x+3y-2}{\sqrt{7^2+3^2}} &= \pm\frac{-7x+3y+26}{\sqrt{(-7)^2+3^2}} \\ \frac{7x+3y-2}{\cancel{\sqrt{58}}} &= \pm\frac{-7x+3y+26}{\cancel{\sqrt{58}}} \\ (7x+3y-2) &= \pm(-7x+3y+26)\end{aligned} \tag{4.28}$$

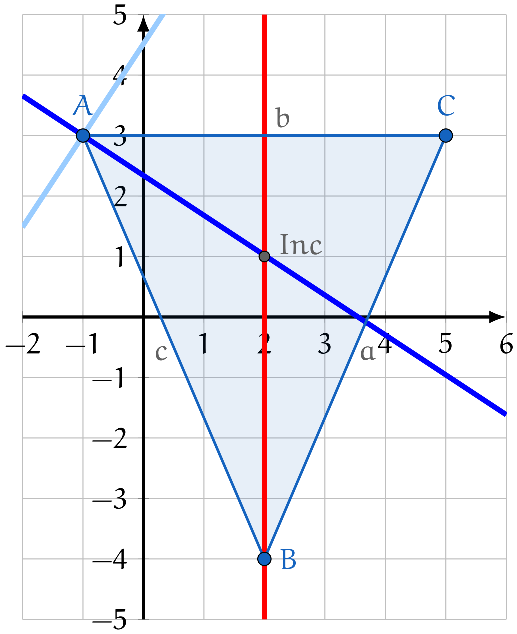
Bisettrice col più.

$$\begin{aligned}(7x+3y-2) &= (-7x+3y+26) \\ 7x+3y-2+7x-3y-26 &= 0 \\ 14x-28 &= 0 \\ x &= 2\end{aligned} \tag{4.29}$$

Bisettrice col meno.

$$\begin{aligned}(7x+3y-2) &= -(-7x+3y+26) \\ 7x+3y-2-7x+3y+26 &= 0 \\ 6y+24 &= 0 \\ y &= -4\end{aligned} \tag{4.30}$$

Ora rappresentiamo il triangolo con le bisettrici che passano per il vertici A e B.



Per quanto riguarda le bisettrici in B è evidente che la bisettrice è data dalla retta parallela all'asse y. Per quanto riguarda le bisettrici in A la retta cercata è quella blu, che ha un coefficiente angolare negativo, al contrario di quella celeste. Calcoliamo quindi il coefficiente angolare delle due bisettrici in A.

$$m_1 = -\frac{7}{3-\sqrt{58}} \simeq 1{,}51 \tag{4.31}$$

$$m_2 = -\frac{7}{3+\sqrt{58}} \simeq -0{,}66 \tag{4.32}$$

La bisettrice è la seconda retta (quella "col meno").

Incentro

Infine l'incentro è dato dall'intersezione delle due bisettrici scelte.

$$\begin{cases} 7x + (3+\sqrt{58})y - 2 - 3\sqrt{58} = 0 \\ x = 2 \end{cases} \tag{4.33}$$

$$7(2) + (3+\sqrt{58})y - 2 - 3\sqrt{58} = 0$$

$$(3+\sqrt{58})y = -12 + 3\sqrt{58}$$

$$y = \frac{-12+3\sqrt{58}}{3+\sqrt{58}}$$

L'incentro ha coordinate:

$$P = \left(2; \frac{-12+3\sqrt{58}}{3+\sqrt{58}}\right) \tag{4.34}$$

Il risultato ottenuto, pur partendo da un triangolo con coordinate intere e per di più isoscele e con una lato parallelo agli assi, ha dato un risultato abbastanza complicato. Difatti il valore di questi punti caratteristici è in generale estremamente complicato.

Parte II

Circonferenze

5 Introduzione

5.1 Trovare centro e raggio di una circonferenza

Se abbiamo una circonferenza in forma normale, di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, allora il centro e il raggio sono dati da:

$$\begin{aligned} C(\alpha;\beta) &= \left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right) \\ r &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2-c} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Esercizio 31 *Trova centro e raggio della circonferenza di equazione* $2x^2 + 2y^2 + 3x - 5y - 11 = 0$

Per poter applicare le opportune formule la circonferenza deve essere in forma normale, ovvero con il coefficiente dei termini di secondo grado uguale ad uno.

Dividiamo per due l'equazione e poi applichiamo le formule.

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y - \frac{11}{2} = 0 \\ a = \frac{3}{2} \quad ; \quad b = -\frac{5}{2} \quad ; \quad c = -\frac{11}{2} \end{gathered} \tag{5.2}$$

$$C = \left(-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{2};-\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)}{2}\right) = \left(-\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right) \tag{5.3}$$

Per trovare il raggio, se sappiamo già le coordinate del centro, è meglio usare direttamente la seconda espressione prima indicata.

$$r = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(-\frac{11}{2}\right)} = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{25}{16}+\frac{11}{2}} = \sqrt{\frac{9+25+88}{16}} = \sqrt{\frac{122}{16}} = \frac{\sqrt{122}}{4} \tag{5.4}$$

Esercizio 32 *Trova centro e raggio della circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 + 3x + 6 = 0$

$$C = \left(-\frac{3}{2};-\frac{0}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2};0\right) \tag{5.5}$$

$$\begin{gathered} r = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{0}{2}\right)^2 - 6} = \\ \sqrt{\frac{9}{4} - 6} = \sqrt{\frac{9-24}{4}} = \frac{\sqrt{-15}}{4} \end{gathered} \tag{5.6}$$

In questo caso il raggio ha un valore immaginario e la circonferenza si dice degenere.

5.2 Disegnare una circonferenza a partire dall'equazione

Per disegnare una circonferenza a partire dall'equazione dobbiamo:

1. scrivere la circonferenza in forma normale;
2. trovare centro e raggio;
3. tracciare un cerchio con quel centro e raggio.

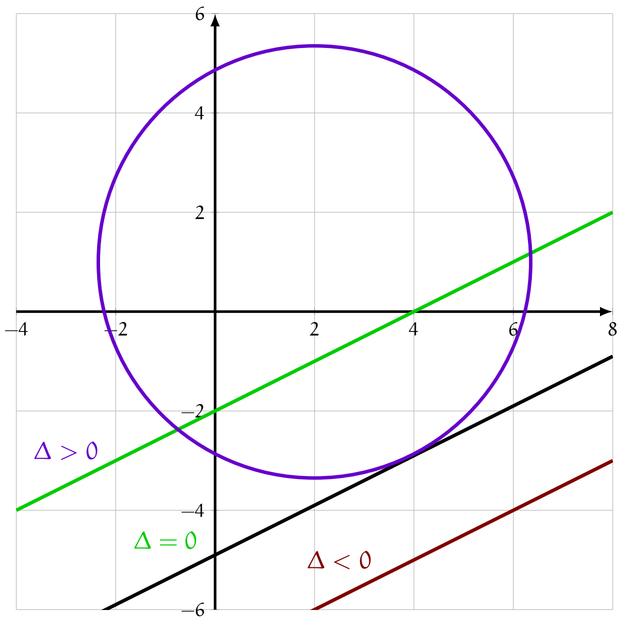
5.3 Posizione reciproca tra circonferenza e retta

Una retta, rispetto ad una circonferenza, può essere esterna, tangente o secante.

Se prendiamo un sistema con l'equazione della circonferenza e della retta otteniamo un'equazione di secondo grado in x o y il cui Δ ci fornisce informazioni sul numero di soluzioni.

Oppure possiamo riferirci alla distanza tra il centro della circonferenza e la retta.

1. *Esterna*. Se la retta è esterna non ci sono punti di intersezione tra retta e circonferenza. Il sistema formato dalle equazioni delle due figure non ha soluzioni e $\Delta < 0$. La distanza della retta dal centro è maggiore del raggio: $d_{Cr} > R$.
2. *Tangente*. Se la retta è tangente c'è un solo punto di intersezione tra retta e circonferenza. Il sistema formato dalle equazioni delle due figure ha una sola soluzione e $\Delta = 0$. La distanza della retta dal centro è uguale al raggio: $d_{Cr} = R$.
3. *Secante*. Se la retta è secante ci sono due punti di intersezione tra retta e circonferenza. Il sistema formato dalle equazioni delle due figure ha due soluzioni distinte e $\Delta > 0$. La distanza della retta dal centro è minore del raggio: $d_{Cr} < R$.



Esercizio 33 *Trova la posizione reciproca tra la retta* $y = 2x+7$ *e la circonferenza* $x^2+y^2-3x+1 = 0$ *e gli eventuali punti di intersezione.*

Per stabile la posizione reciproca facciamo sistema tra l'equazione della retta e della circonferenza: a seconda delle soluzioni che troviamo possiamo stabilire immediatamente la posizione reciproca e gli eventuali punti di intersezione.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0 \\ y = 2x + 7 \end{cases} \quad ; \quad x^2 + (2x+7)^2 - 3x + 1 = 0 \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x^2 + 28x + 49 - 3x + 1 = 0 \\ & 5x^2 + 25x + 50 = 0 \\ & x^2 + 5x + 10 = 0 \\ & \Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -15 < 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Per cui non esistono soluzioni ovvero punti di intersezione e la retta è esterna alla circonferenza.

6 Circonferenza date alcune condizioni

6.1 Circonferenza dato centro e raggio

Una circonferenza di centro $C(\alpha;\beta)$ e raggio r ha equazione:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \tag{6.1}$$

Esercizio 34 *Trova l'equazione della circonferenza di centro* $C(-2;3)$ *e raggio* $r=4$.

Immediatamente scriviamo:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=16 \tag{6.2}$$

Possiamo lasciare la precedente espressione con le parentesi o svilupparla e scrivere la circonferenza in forma normale.

$$\begin{aligned} x^2+4x+4+y^2-6y+9=16 \\ x^2+y^2+4x-6y-3=0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

6.2 Circonferenza dati un punto e il centro

Per trovare la circonferenza ci manca il raggio: è la distanza tra il punto dato $A(x_A;y_A)$ e il centro $C(\alpha;\beta)$.

$$r=\sqrt{(\alpha-x_A)^2+(\beta-y_A)^2} \tag{6.4}$$

Esercizio 35 *Trova la circonferenza passante per il punto* $P(-2,5)$ *e con il centro* $C(2;-3)$.

Il raggio della circonferenza è la distanza tra i due punti dati:

$$r=\sqrt{(x_0-x_A)^2+(y_0-y_A)^2}=\sqrt{(2-(-2))^2+(-3-5)^2}=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80} \tag{6.5}$$

Possiamo scrivere la circonferenza di centro e raggio dati.

$$(x-2)^2+(x+3)^2=(\sqrt{80})^2=80 \tag{6.6}$$

6.3 Circonferenza dati due punti diametralmente opposti

Se i punti A e B che abbiamo sono diametralmente opposti allora il centro della circonferenza è il punto medio tra A e B:

$$C(\alpha; \beta) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right) \tag{6.7}$$

Invece il raggio è la metà della distanza tra i due punti:

$$r = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2} \tag{6.8}$$

Esercizio 36 *Trova la circonferenza passante per i punti* $A(-3; 2)$ *e* $B(-1; 7)$*, sapendo che sono gli estremi di un diametro.*

Il centro ha come coordinate:

$$C(\alpha; \beta) = \left(\frac{-3 + (-1)}{2}; \frac{2 + 7}{2} \right) = \left(-\frac{4}{2}; \frac{9}{2} \right) = \left(-2; \frac{9}{2} \right) \tag{6.9}$$

Il raggio è la metà del diametro:

$$r = \frac{\sqrt{(-1 - (-3))^2 + (7 - 2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(2)^2 + (5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 25}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2} \tag{6.10}$$

Quindi la circonferenza ha equazione:

$$(x + 2)^2 + \left(y - \frac{9}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{29}}{2} \right)^2 = \frac{29}{4} \tag{6.11}$$

6.4 Circonferenza passante per tre punti non allineati

L'equazione generale di una circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ dipende da tre parametri indipendenti (a, b e c). Per trovarli possiamo costruire un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b e c, imponendo il passaggio della circonferenza per i tre punti.

Se i punti hanno coordinate $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$ possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 + x_A \cdot a + y_A \cdot b + c = 0 \\ x_B^2 + y_B^2 + x_B \cdot a + y_B \cdot b + c = 0 \\ x_C^2 + y_C^2 + x_C \cdot a + y_C \cdot b + c = 0 \end{cases} \tag{6.12}$$

Esercizio 37 *Trova l'equazione della circonferenza passante per il punti* $A(1; -3)$, $B(4; 5)$ *e* $C(6; -2)$.

Imponiamo il passaggio della circonferenza per i punti dati:

$$\begin{cases} 1^2 + (-3)^2 + a - 3b + c = 0 \\ 4^2 + 5^2 + 4a + 5b + c = 0 \\ 6^2 + (-2)^2 + 6a - 2b + c = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 10 + a - 3b + c = 0 \\ 41 + 4a + 5b + c = 0 \\ 40 + 6a - 2b + c = 0 \end{cases} \tag{6.13}$$

Abbiamo un sistema lineare in tre incognite: risolviamolo col metodo di sostituzione, mettendo in evidenza la c nella prima equazione e sostituendola nella altre due.

$$\begin{cases} c = -10 - a + 3b \\ 41 + 4a + 5b - 10 - a + 3b = 0 \\ 40 + 6a - 2b - 10 - a + 3b = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 31 + 3a + 8b = 0 \\ 30 + 5a + b = 0 \end{cases} \tag{6.14}$$

Mettiamo in evidenza b nella seconda e sostituiamola nella prima.

$$\begin{cases} b = -30 - 5a \\ 31 + 3a + 8(-30 - 5a) = 0 \end{cases} \quad ; \quad 31 + 3a - 240 - 40a = 0 \quad ; \quad -37a = 209 \quad ; \quad a = -\frac{209}{37} \tag{6.15}$$

Sostituiamo a ritroso e troviamo:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{209}{37} \\ b = -30 - 5a = -30 + \dfrac{1045}{37} = \dfrac{1110 - 1045}{37} = -\dfrac{65}{37} \\ c = -10 - a + 3b = -10 + \dfrac{209}{37} + 3 \cdot \dfrac{65}{37} = \dfrac{-370 + 209 - 195}{37} = -\dfrac{356}{37} \end{cases} \tag{6.16}$$

Infine l'equazione della circonferenza è:

$$x^2 + y^2 - \frac{209}{37}x - \frac{65}{37}y - \frac{356}{37} = 0 \tag{6.17}$$

6.5 Circonferenza di centro dato e tangente ad una retta

Per trovare la circonferenza ci manca il raggio: è la distanza tra la retta tangente $ax + by + c = 0$ e il centro $C(\alpha; \beta)$ della circonferenza.

$$r = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{6.18}$$

Esercizio 38 *Trova la circonferenza tangente alla retta* $x - 5y + 2 = 0$ *e di centro* $C(-2; 4)$.

Il raggio della circonferenza è la distanza del centro dalla retta:

$$r = \frac{|1(-2) - 5(4) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{|-2 - 20 + 2|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{20}{\sqrt{26}} \tag{6.19}$$

Quindi la circonferenza ha equazione:

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{26}}\right)^2 = \frac{400}{26} = \frac{200}{13} \tag{6.20}$$

6.6 Circonferenza passante per due punti e con il centro su una retta

L'equazione generale di una circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$ dipende da tre parametri indipendenti (a, b e c). Per trovarli possiamo costruire un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b e c. I punti hanno coordinate $A(x_A;y_A)$ e $B(x_B;y_B)$; la retta ha equazione $dx+ey+f=0$.

Due equazioni le troviamo imponendo il passaggio della circonferenza per i due punti. La terza la troviamo imponendo che le coordinate del centro $C(\alpha;\beta)$ della circonferenza stiano sulla retta ovvero che le coordinate del centro soddisfano l'equazione della retta.

$$C(\alpha;\beta)=\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right) \tag{6.21}$$

$$\begin{cases} x_A^2+y_A^2+x_A\cdot a+y_A\cdot b+c=0 \\ x_B^2+y_B^2+x_B\cdot a+y_B\cdot b+c=0 \\ d\left(-\frac{a}{2}\right)+e\left(-\frac{b}{2}\right)+f=0 \end{cases} \tag{6.22}$$

Esercizio 39 *Trova la circonferenza passante per il punti* $A(2;3)$ *e* $B(-1;1)$ *e avente centro sulla retta* $2x-4y+1=0$.

La circonferenza generica da trovare ha equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e il centro ha coordinate $\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$.

Imponiamo il passaggio della circonferenza per i due punti e il passaggio della retta per il centro.

$$\begin{cases} 2^2+3^2+2a+3b+c=0 \\ (-1)^2+1^2-a+b+c=0 \\ 2\left(-\frac{a}{2}\right)+4\left(-\frac{b}{2}\right)+1=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 13+2a+3b+c=0 \\ 2-a+b+c=0 \\ -a-2b+1=0 \end{cases} \tag{6.23}$$

Mettiamo in evidenza la a nella terza equazione e sostituiamola nelle prime due.

$$\begin{cases} 13+2(-2b+1)+3b+c=0 \\ 2-(-2b+1)+b+c=0 \\ a=-2b+1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 13-4b+2+3b+c=0 \\ 2+2b-1+b+c=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 15-b+c=0 \\ 1+3b+c=0 \end{cases} \tag{6.24}$$

Mettiamo in evidenza c nella prima e sostituiamola nella seconda.

$$\begin{cases} c=-15+b \\ 1+3b-15+b=0 \end{cases} \quad ; \quad 4b-14=0 \quad ; \quad b=\frac{14}{4}=\frac{7}{2} \tag{6.25}$$

Sostituiamo a ritroso e troviamo:

$$\begin{cases} b=\frac{7}{2} \\ c=-15+b=-15+\frac{7}{2}=\frac{-30+7}{2}=\frac{-23}{2} \\ a=-2b+1=-2\left(\frac{7}{2}\right)+1=-7+1=-6 \end{cases} \tag{6.26}$$

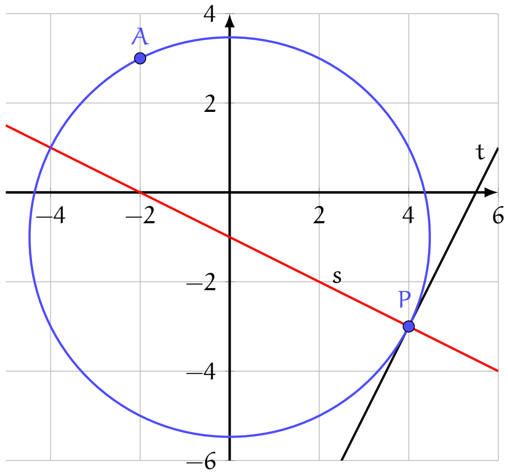
Quindi la circonferenza ha equazione:

$$x^2+y^2-6x+\frac{7}{2}y-\frac{23}{2}=0 \tag{6.27}$$

6.7 Circonferenza passante per un punto e tangente in un altro punto ad una retta

Dobbiamo trovare la circonferenza che passa per un punto A ed è tangente in un punto P ad una retta t.

Se conosciamo la tangente t e il punto di tangenza P possiamo trovare la retta s per quel punto perpendicolare alla tangente: questa retta è una retta che passa per il centro della circonferenza. Abbiamo quindi una circonferenza per due punti (A e P) e con il centro su una retta data s, ovvero il problema precedente a questo.



Esercizio 40 *Trova la circonferenza passante per il punto* $A(-2;3)$ *e tangente nel punto* $P(4;-3)$ *alla retta* $t: 2x - y - 11 = 0$.

Troviamo la retta s perpendicolare alla retta data t e passante per il punto P. Scriviamo la retta r in forma esplicita.

$$y = 2x - 11 \tag{6.28}$$

Il coefficiente angolare della retta t è $m = 2$. Il coefficiente $m^{'}$ della perpendicolare s è;

$$m^{'} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2} \tag{6.29}$$

La retta s perpendicolare è quindi (retta per un punto di coefficiente angolare dato):

$$\begin{aligned} y - (-3) &= -\frac{1}{2}(x-4) \\ y &= -\frac{1}{2}x + 2 - 3 \\ y &= -\frac{1}{2}x - 1 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Possiamo costruire ora un sistema con la condizione di passaggio per i due punti e con il centro sulla retta s.

$$\begin{cases} (-2)^2 + 3^2 - 2a + 3b + c = 0 \\ 4^2 + (-3)^2 + 4a - 3b + c = 0 \\ \left(-\frac{b}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{a}{2}\right) - 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 13 - 2a + 3b + c = 0 \\ 25 + 4a - 3b + c = 0 \\ -2b = a - 4 \end{cases} \tag{6.31}$$

Mettiamo in evidenza a nella terza equazione e sostituiamola nelle altre.

$$\begin{cases} 13-2(-2b+4)+3b+c=0 \\ 25+4(-2b+4)-3b+c=0 \\ a=-2b+4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 13+4b-8+3b+c=0 \\ 25-8b+16-3b+c=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 5+7b+c=0 \\ 41-11b+c=0 \end{cases} \tag{6.32}$$

Mettiamo in evidenza c nella prima e sostituiamola nella seconda.

$$\begin{cases} c=-5-7b \\ 41-11b-5-7b=0 \end{cases} \quad ; \quad 36=18b \quad ; \quad b=\frac{36}{18}=2 \tag{6.33}$$

Sostituiamo a ritroso e troviamo:

$$\begin{cases} b=2 \\ c=-5-7b=-5-7\cdot 2=-19 \\ a=-2b+4=-4+4=0 \end{cases} \tag{6.34}$$

Quindi la circonferenza ha equazione:

$$x^2+y^2+2y-19=0 \tag{6.35}$$

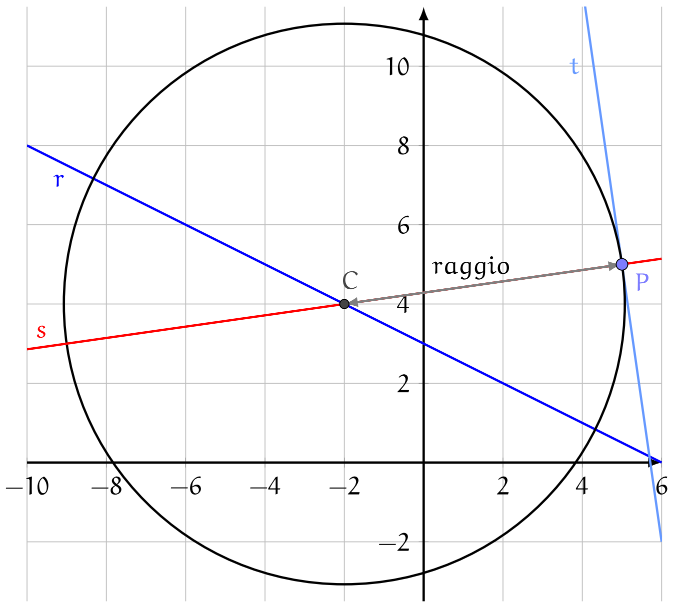
La figura precedente è relativa ai dati di questo esercizio.

6.8 Circonferenza con il centro su una retta e tangente in un punto ad un’altra retta

Dobbiamo trovare la circonferenza che ha il centro su una retta r ed è tangente in un punto P ad una retta t.

Se mandiamo la perpendicolare s alla tangente t per il punto di tangenza P abbiamo un’altra retta passante per il centro.

- Se intersechiamo le due rette, r ed s, otteniamo il centro della circonferenza. Infine il raggio è la distanza tra il centro C e il punto di tangenza P. Possiamo scrivere la circonferenza di centro e raggio dati.
- Oppure costruiamo un sistema di tre equazioni in tre incognite imponendo il passaggio del centro sulle due rette date e il passaggio della circonferenza per il punto P.



La figura precedente è relativa ai dati dell’esercizio che segue.

Esercizio 41 *Trova la circonferenza con il centro sulla retta* $x + 2y - 6 = 0$ *e tangente nel punto* $B(5; 5)$ *alla retta* $7x + y - 40 = 0$.

Cerchiamo la retta perpendicolare alla tangente nel punto B. La retta data è:

$$y = -7x + 40 \tag{6.36}$$

Il suo coefficiente angolare è $m = -7$. Quello della perpendicolare è:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-7} = \frac{1}{7} \tag{6.37}$$

L’equazione della perpendicolare in B è quindi:

$$\begin{aligned} y - 5 &= \frac{1}{7}(x - 5) \\ y &= \frac{x}{7} - \frac{5}{7} + 5 = \frac{x}{7} + \frac{-5 + 35}{7} = \frac{x}{7} + \frac{30}{7} \end{aligned} \tag{6.38}$$

- **I metodo**

  Questa perpendicolare è anch'essa una retta passante per il centro, così come quella data. Se le intersechiamo possiamo trovare il centro della circonferenza.

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{7} + \dfrac{30}{7} \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \quad ; \quad x + 2\left(\frac{x}{7} + \frac{30}{7}\right) - 6 = 0 \tag{6.39}$$

Moltiplico tutto per 7.

$$\begin{aligned} 7x + 2x + 60 - 42 &= 0 \\ 9x &= -18 \\ x &= \frac{-18}{9} = -2 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Invece la y è:

$$y = -\frac{2}{7} + \frac{30}{7} = \frac{28}{7} = 4 \tag{6.41}$$

Il centro è:

$$C(-2, 4) \tag{6.42}$$

Il raggio è la distanza del centro dal punto B.

$$r = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2-5)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} \tag{6.43}$$

Infine l'equazione della circonferenza è:

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{50})^2 = 50 \tag{6.44}$$

- **II metodo**

  Imponiamo che le coordinate del centro, in funzione dei parametri della circonferenza, siano soddisfatte dalle due rette, e imponiamo il passaggio della circonferenza per il punto P.

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{a}{2}\right) + 2\left(-\dfrac{b}{2}\right) - 6 = 0 \\ \left(-\dfrac{b}{2}\right) = \dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{a}{2}\right) + \dfrac{30}{7} \\ 25 + 25 + 5a + 5b + c = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -a - 2b - 12 = 0 \\ -7b = -a + 60 \\ 50 + 5a + 5b + c = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{II} \quad a = 7b + 60 \tag{6.45}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & -7b - 60 - 2b - 12 = 0 \\ & -9b = 72 \\ b &= -\frac{72}{9} = -8 \end{aligned} \quad ; \quad a = 7(-8) + 60 = 4 \tag{6.46}$$

$$\text{III} \quad 50 + 5 \cdot 4 + 5(-8) + c = 0 \quad ; \quad c = -50 - 20 + 40 = -30 \tag{6.47}$$

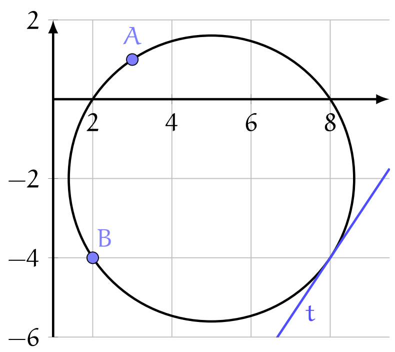
La circonferenza ha equazione:

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 30 = 0 \tag{6.48}$$

6.9 Circonferenza passante per due punti e tangente ad una retta

L'equazione generale di una circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ dipende da tre parametri indipendenti (a, b e c). I punti hanno coordinate $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$; la retta ha equazione $dx + ey + f = 0$.

Il passaggio per i due punti ci consente di eliminare due parametri, lasciando libero il terzo. La condizione di tangenza con la retta data ci consente di trovare il valore del terzo parametro: la condizione si ottiene imponendo che il sistema formato dall'equazione parziale della circonferenza e l'equazione della retta abbia una sola soluzione, ovvero due coincidenti ($\Delta = 0$).



Esercizio 42 *Trova la circonferenza passante per i punti* $A(2; -4)$ *e* $B(3; 1)$ *e tangente alla retta* $3x - 2y - 32 = 0$.

Cominciamo col scrivere un sistema di due equazioni in tre incognite con la condizione del passaggio della circonferenza per i due punti e scriviamo la circonferenza in funzione di un solo parametro a nostro piacimento.

$$\begin{cases} 9 + 1 + 3a + b + c = 0 \\ 4 + 16 + 2a - 4b + c = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 10 + 3a + b + c = 0 \\ 20 + 2a - 4b + c = 0 \end{cases} \tag{6.49}$$

$$\begin{aligned} c &= -10 - 3a - b \\ &20 + 2a - 4b - 10 - 3a - b = 0 \\ &10 - a - 5b = 0 \\ &a = 10 - 5b \end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned} c &= -10 - 3a - b \\ &= -10 - 3(10 - 5b) - b \\ &= -10 - 30 + 15b - b \\ &= -40 + 14b \end{aligned} \tag{6.51}$$

$$x^2 + y^2 + (10 - 5b)x + by + (-40 + 14b) = 0 \tag{6.52}$$

Ora imponiamo che la retta data sia tangente alla circonferenza e quindi che il sistema che otteniamo dall'equazione della circonferenza e della retta ci dia una soluzione ($\Delta = 0$).
Scrivo la retta in forma esplicita.

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 32 &= 0 \\ -2y &= -3x + 32 \\ y &= \frac{3}{2}x - 16 \end{aligned} \tag{6.53}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+(10-5b)x+by+(-40+14b)=0 \\ y=\dfrac{3}{2}x-16 \end{cases} \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned} & x^2+(\frac{3}{2}x-16)^2+(10-5b)x+b(\frac{3}{2}x-16)+(-40+14b)=0 \\ & x^2+\frac{9}{4}x^2-2\cdot\frac{3}{2}x\cdot 16+256+10x-5bx+\frac{3}{2}bx-16b-40+14b=0 \\ & \frac{13}{4}x^2-38x-\frac{7}{2}bx+216-2b=0 \\ & 13x^2+x(-152-14b)+864-8b=0 \end{aligned} \tag{6.55}$$

Imponiamo la condizione di tangenza $\Delta=0$.

$$\begin{aligned} & (-152-14b)^2-4\cdot 13\cdot(864-8b)=0 \\ & 23104+4256b+196b^2-44928+416b=0 \\ & 196b^2+4672b-21824=0 \end{aligned} \tag{6.56}$$

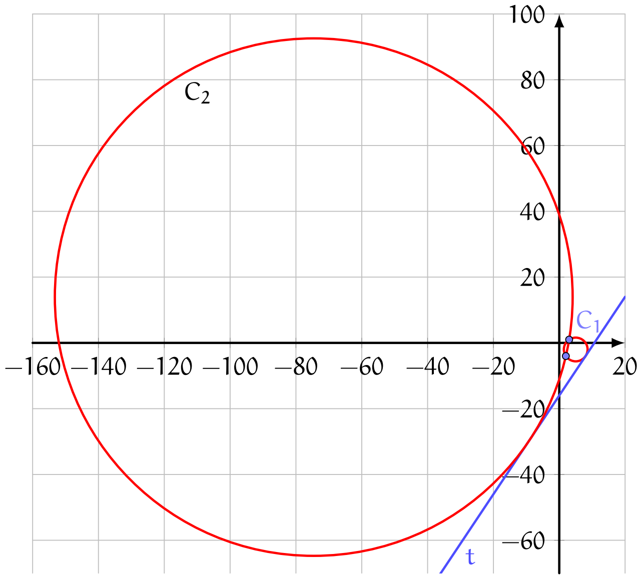
$$\begin{aligned} b_{1,2} &= \frac{-4672\pm\sqrt{4672^2-4\cdot 196\cdot(-21824)}}{2\cdot 196}=\frac{-4672\pm 6240}{392} \\ b_1 &= \frac{-4672+6240}{392}=4 \quad ; \quad b_2=\frac{-4672-6240}{392}=-\frac{1364}{49} \end{aligned} \tag{6.57}$$

Possiamo scrivere i parametri di due circonferenze:

$$\begin{cases} b=4 \\ a=10-5b=-10 \\ c=-40+14b=16 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} b=-\dfrac{1364}{49} \\ a=10-5b=\dfrac{7310}{49} \\ c=-40+14b=-\dfrac{3008}{7} \end{cases} \tag{6.58}$$

Le circonferenze cercate sono:

$$x^2+y^2-10x+4y+16=0 \quad ; \quad x^2+y^2+\frac{7310}{49}x-\frac{1364}{49}y-\frac{3008}{7}=0 \tag{6.59}$$



7 Tangenti a una circonferenza

7.1 Tangenti da un punto esterno alla circonferenza

Da un punto esterno $P(x_0; y_0)$ a una circonferenza possiamo mandare due rette tangenti. Per trovare le due rette costruiamo il fascio proprio di rette passanti per il punto P: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Abbiamo due metodi.

- Queste rette hanno una distanza dal centro della circonferenza uguale al raggio. Per trovare l'incognita m imponiamo che le rette del fascio distino come il raggio dal centro della circonferenza. Le uniche due rette che soddisfano questa condizione sono le rette cercate.
- Per trovare l'incognita m imponiamo che le rette del fascio, proprio perché tangenti, intercettino la circonferenza in un punto solo: se intersechiamo la circonferenza con il fascio dobbiamo avere un unica soluzione. Imponiamo allora che l'equazione di secondo grado che otteniamo abbia discriminante uguale a zero. Il discriminante, una volta semplificato, è a sua volta un'equazione di primo o secondo grado in m. Le soluzioni ci danno il coefficiente angolare delle rette cercate.

  Questo metodo porta a calcoli decisamente più complicati e soggetti ad errori.

Esercizio 43 *Trova le tangenti alla circonferenza* $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ *dal punto* $P(7; -1)$.

Scriviamo il fascio proprio di rette aventi centro sul punto P e di coefficiente angolare m.

$$\begin{gathered} y - (-1) = m(x - 7) \\ y + 1 = mx - 7m \\ mx - y - 7m - 1 = 0 \quad ; \quad y = mx - 7m - 1 \end{gathered} \tag{7.1}$$

I metodo

Il centro della circonferenza è:

$$C(\alpha; \beta) = \left(-\frac{-6}{2}; -\frac{-2}{2}\right) = (3; 1) \tag{7.2}$$

Il raggio:

$$r = \sqrt{3^2 + 1^2 - 6} = \sqrt{9 + 1 - 6} = \sqrt{4} = 2 \tag{7.3}$$

Imponiamo che il fascio disti quanto il raggio dal centro della circonferenza.

$$\begin{gathered} r = \frac{|3m - 1 - 7m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \\ \frac{|-4m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \\ |-4m - 2| = 2\sqrt{m^2 + 1} \end{gathered} \tag{7.4}$$

Possiamo elevare al quadrato entrambe i membri della precedente equazione: sono sicuramente positivi e l'eguaglianza viene preservata.

$$\begin{aligned}
(|-4m-2|)^2 &= (2\sqrt{m^2+1})^2 \\
16m^2+16m+4 &= 4m^2+4 \\
12m^2+16m &= 0 \\
4m(3m+4) &= 0 \\
m=0 \quad &; \quad m=-\frac{4}{3}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Abbiamo ottenuto due coefficienti angolari: ci aspettavamo infatti di avere due tangenti. Le tangenti hanno quindi equazione:

$$\begin{aligned}
y &= 0\cdot x - 7\cdot 0 - 1 = -1 \\
y &= -\frac{4}{3}x - 7\left(-\frac{4}{3}\right) - 1 = -x\frac{4}{3} + \frac{28-3}{3} = -x\frac{4}{3} + \frac{25}{3}
\end{aligned} \tag{7.6}$$

II metodo

Scriviamo il sistema che unisce circonferenza col fascio di rette.

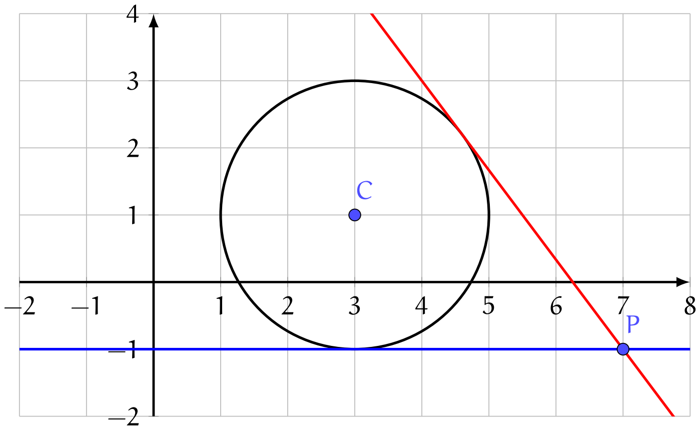
$$\begin{cases} x^2+y^2-6x-2y+6=0 \\ y=mx-7m-1 \end{cases} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}
&x^2+(mx-7m-1)^2-6x-2(mx-7m-1)+6=0 \\
&x^2+m^2x^2+49m^2+1-14m^2x-2mx+14m-6x-2mx+14m+2+6=0 \\
&x^2(1+m^2)+x(-14m^2-4m-6)+49m^2+28m+9=0
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Imponiamo che il delta dell'equazione sia uguale a zero.

$$\begin{aligned}
&\Delta = (-14m^2+4m-6)^2-4(1+m^2)(49m^2+28m+9)=0 \\
&\cancel{196m^4}+16m^2+\cancel{36}+168m^2+\cancel{112m^3}+48m \\
&\qquad -196m^2-112m-\cancel{36}-\cancel{196m^4}-\cancel{112m^3}-36m^2=0 \\
&-48m^2-64m=0 \\
&-16m(3m+4)=0 \\
&m=0 \quad ; \quad m=-\frac{4}{3}
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Se i calcoli sono corretti i termini di terzo e quarto grado si elidono sempre. Abbiamo ottenuto i due coefficienti angolari trovati prima. L'esercizio si conclude allo stesso modo.



Esercizio 44 *Trova le tangenti alla circonferenza* $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ *dal punto* $P(1; -3)$.

La circonferenza è la medesima del precedente esercizio. Conosciamo già il centro e il raggio.

$$C(3;1) \quad ; \quad r = 2 \tag{7.10}$$

Scriviamo il fascio proprio di rette aventi centro sul punto P e di coefficiente angolare m.

$$\begin{gathered} y - (-3) = m(x-1) \\ y + 3 = mx - m \\ mx - y - m - 3 = 0 \quad ; \quad y = mx - m - 3 \end{gathered} \tag{7.11}$$

Imponiamo che il fascio disti quanto il raggio dal centro della circonferenza.

$$\begin{gathered} r = \frac{|3m - 1 - m - 3|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \\ \frac{|2m-4|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \\ |2m-4| = 2\sqrt{m^2+1} \end{gathered} \tag{7.12}$$

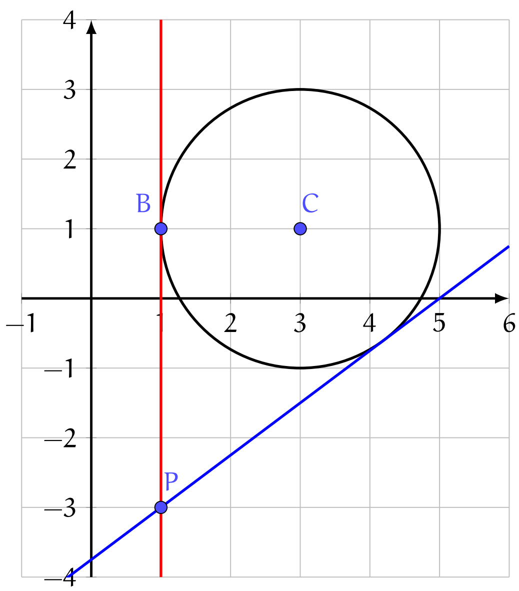
Possiamo elevare al quadrato entrambe i membri della precedente equazione: sono sicuramente positivi e l'eguaglianza viene preservata.

$$\begin{gathered} (|2m-4|)^2 = (2\sqrt{m^2+1})^2 \\ 4m^2 - 16m + 16 = 4m^2 + 4 \\ -16m = -12 \\ m = \frac{-12}{-16} = \frac{3}{4} \end{gathered} \tag{7.13}$$

Abbiamo trovato un solo coefficiente angolare e quindi una sola tangente.

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - 3 = \frac{3}{4}x + \frac{-3-12}{3} = \frac{3}{4}x - \frac{15}{3} = \frac{3}{4}x - 5 \tag{7.14}$$

Tuttavia le rette tangenti sono certamente due. Allora si presenta il caso in cui una delle rette tangenti è verticale e quindi senza coefficiente angolare. Ce ne dà dimostrazione il disegno della circonferenza e delle tangenti condotte dal punto.



Il punto B della figura è sul bordo sinistro della circonferenza e ha coordinate $(1;1)$. Si può quindi osservare che quel punto della circonferenza è allineato in verticale con il punto P e ha la stessa ascissa. Di conseguenza la tangente verticale ha tutti i punti con ascissa 1 e la sua equazione è:

$$x = 1 \tag{7.15}$$

7.2 Tangente in un punto sulla circonferenza

Da un punto $P(x_0; y_0)$ su una circonferenza possiamo mandare un'unica retta tangente.

1. Questa retta è perpendicolare al raggio della circonferenza per quel punto. Per cui, per trovare la retta, prima troviamo il coefficiente angolare della retta per il punto e il centro; poi troviamo il coefficiente della perpendicolare; quindi possiamo scrivere la retta passante per il punto e con quel coefficiente angolare.
2. Oppure, analogamente a quanto possiamo fare con una parabola, possiamo scrivere direttamente quella che si chiama *formula di sdoppiamento*. Se la circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ allora la tangente nel suo punto $P(x_0; y_0)$ ha equazione:

$$xx_0 + yy_0 + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0 \tag{7.16}$$

Esercizio 45 *Trova la perpendicolare alla circonferenza* $x^2 + y^2 + 2x - 5y - 9 = 0$ *nel suo punto* $P(3; 2)$.

Il centro della circonferenza ha coordinate:

$$C(\alpha; \beta) = \left(-\frac{2}{2}; -\frac{-5}{2}\right) = \left(-1; \frac{5}{2}\right) \tag{7.17}$$

La direzione del segmento CP è:

$$m = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \frac{2 - (-1)}{3 - \frac{5}{2}} = \frac{2 + 1}{\frac{6 - 5}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{1} = 6 \tag{7.18}$$

La direzione della perpendicolare è:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{6} \tag{7.19}$$

Infine la tangente, ovvero la perpendicolare al raggio per il punto P è:

$$\begin{aligned} y - 2 &= -\frac{1}{6}(x - 3) \\ y &= -\frac{x}{6} + \frac{3}{6} + 2 = -\frac{x}{6} + \frac{1}{2} + 2 = -\frac{x}{6} + \frac{1 + 4}{2} \\ y &= -\frac{x}{6} + \frac{5}{2} \end{aligned} \tag{7.20}$$

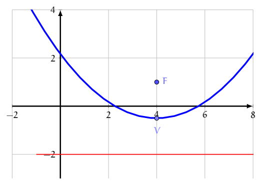
Parte III

Parabole

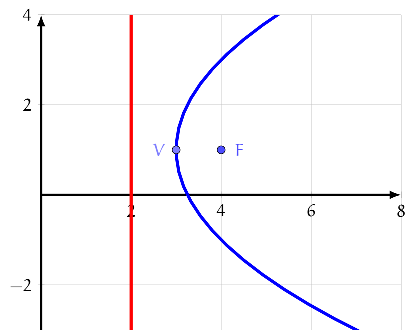
8 Introduzione

La parabola è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto detto fuoco e da una retta detta direttrice.

Nei libri di geometria analitica delle superiori compaiono solitamente solo le parabole con asse di simmetria verticale o orizzontale.



$y = ax^2 + bx + c$



$x = ay^2 + by + c$

8.1 Punti notevoli di una parabola

Qui di seguito alcune relazioni per trovare alcuni elementi fondamentali di una parabola.

Asse verticale	**Asse orizzontale**
Vertice	
$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$	$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$
Fuoco	
$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$
Asse	
$x = -\frac{b}{2a}$	$y = -\frac{b}{2a}$
Direttrice	
$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$	$x = \frac{-1-\Delta}{4a}$

8.2 Studio e disegno della parabola

Per studiare una parabola:

1. Scriviamo la parabola in forma normale.
2. Capiamo se l'asse è verticale od orizzontale.
3. Troviamo il vertice.
4. Troviamo l'intersezione con gli assi cartesiani.
5. Eventualmente troviamo fuoco e direttrice.

Per disegnare la parabola, dopo averla studiata, riportiamo nel grafico vertice e intersezione con gli assi e li congiungiamo opportunamente. Eventualmente prendiamo altri due punti prossimi al vertice, paralleli alla direttrice: i due punti sono sempre simmetrici e calcolandone uno abbiamo anche le coordinate dell'altro.

Esercizio 46 *Studia la parabola di equazione* $3y = 9x^2 - 15x + 6$.

L'equazione data è quella di una parabola perché abbiamo una variabile (la x) che compare col secondo grado e niente di più e una variabile (la y) che compare solo col primo grado.

1. La variabile y è moltiplicata per un numero diverso da uno. Per scrivere la parabola in forma normale dividiamo l'equazione per il coefficiente della y.
$$y = 3x^2 - 5x + 2 \tag{8.1}$$
2. La variabile di secondo grado è la x: abbiamo una parabola con asse verticale.
3. Possiamo scrivere le coordinate del vertice.
$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$
$$\begin{aligned} x_v &= -\frac{-5}{2\cdot 3} = \frac{5}{6} \\ y_v &= -\frac{(-5)^2 - 4(3)(2)}{4\cdot 3} = -\frac{1}{12} \end{aligned} \tag{8.2}$$
4. l'intersezione con l'asse y si ottiene facendo sistema tra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse.
$$\begin{cases} y = 3x^2 - 5x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad ; \quad x = 0; y = 2 \tag{8.3}$$
Chiamiamo il punto $A(0;2)$.
l'intersezione con l'asse x si ottiene facendo sistema tra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse.
$$\begin{cases} y = 3x^2 - 5x + 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad ; \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0 \tag{8.4}$$
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} \\ x_1 &= \frac{5+1}{6} = 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{8.5}$$
Chiamiamo i punti $B(1;0)$ e $C\left(\frac{2}{3};0\right)$.

5. Scriviamo le coordinate del fuoco.

$$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

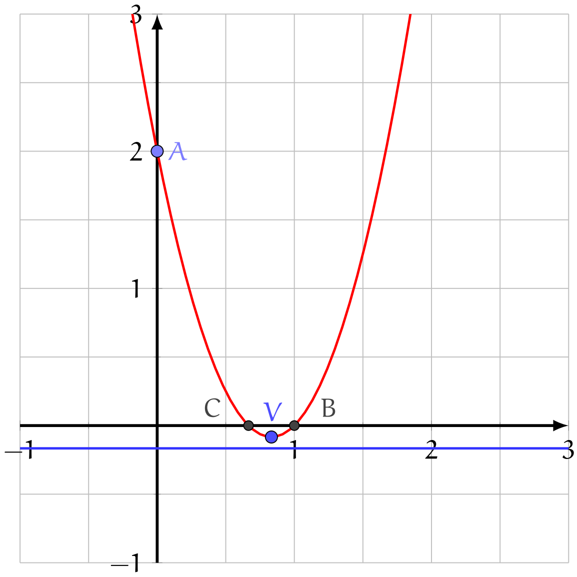
$$\begin{aligned} x_f &= -\frac{-5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6} \\ y_f &= \frac{1-[(-5)^2-4(3)(2)]}{4 \cdot 3} = \frac{0}{12} = 0 \end{aligned} \tag{8.6}$$

L'equazione della direttrice è:

$$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$$

$$y = \frac{-1-[(-5)^2-4(3)(2)]}{4 \cdot 3} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6} \tag{8.7}$$

Ora possiamo rappresentare graficamente quanto studiato.

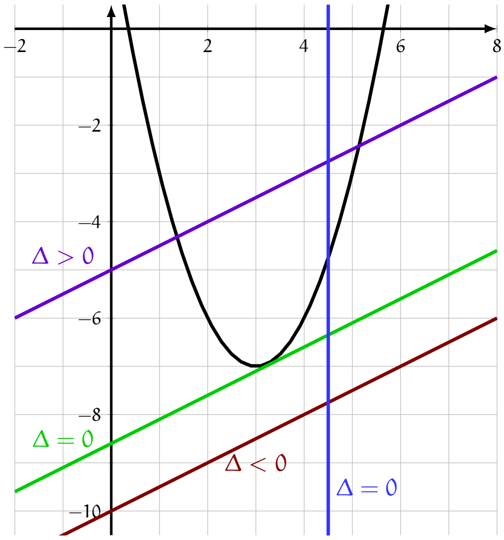


8.3 Posizione reciproca tra parabola e retta

Una retta, rispetto ad una parabola, può essere esterna, tangente o secante.

Se prendiamo un sistema con l'equazione della parabola e della retta otteniamo un'equazione di secondo grado in x o y il cui Δ ci fornisce informazioni sul numero di soluzioni.

1. *Esterna*. Se la retta è esterna non ci sono punti di intersezione tra retta e parabola. Il sistema formato dalle equazioni delle due figure non ha soluzioni e $\Delta < 0$.
2. *Tangente*. Se la retta è tangente c'è un solo punto di intersezione tra retta e parabola. Il sistema formato dalle equazioni delle due figure ha una sola soluzione e $\Delta = 0$. Questo caso ha un'*eccezione*: se la retta è parallela all'asse sarà sempre secante, ma incontrerà la parabola in un solo punto.
3. *Secante*. Se la retta è secante ci sono due punti di intersezione tra retta e parabola. Il sistema formato dalle equazioni delle due figure ha due soluzioni distinte e $\Delta > 0$.
   Tuttavia, se la retta è parallela all'asse della parabola sarà sempre secante, ma incontrerà la parabola in un solo punto. Il sistema formato dalle equazioni delle due figure ha una sola soluzione e $\Delta = 0$.



Esercizio 47 *Trova la posizione reciproca tra la retta $y = 2x + 7$ e la parabola $y = x^2 - 3x + 1$ e gli eventuali punti di intersezione.*

Risolviamo il sistema tra l'equazione della parabola e della retta.

$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = x^2 - 3x + 1 \end{cases} \quad ; \quad x^2 - 3x + 1 = 2x + 7 \quad ; \quad x^2 - 5x - 6 = 0 \tag{8.8}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(-6) = 25 + 24 = 49 > 0 \tag{8.9}$$

La retta è secante.

$$\begin{gathered} x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} \\ x_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \quad ; \quad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1 \\ y_1 = 2x_1 + 7 = 2 \cdot 6 + 7 = 19 \quad ; \quad y_2 = 2x_2 + 7 = 2(-1) + 7 = 5 \end{gathered} \tag{8.10}$$

I punti sono $A(6; 19)$ e $B(-1; 5)$.

8.4 Area del segmento parabolico

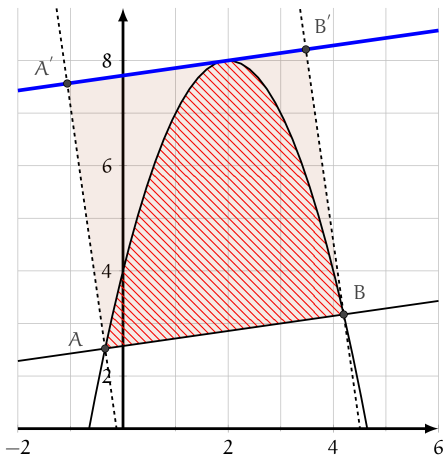
La superficie compresa tra una parabola e il segmento di retta che la interseca in due punti è detto segmento parabolico (evidenziata in rosso nella figura successiva).

Supponiamo che la retta intersechi la parabola nei punti A e B. Prendiamo poi la retta parallela alla retta data e tangente la parabola. Mandiamo le perpendicolari alla retta data per il punti A e B: queste perpendicolari intersecano la tangente nei punti A' e B'.

Fu Archimede per primo a dimostrare che:

$$\text{Area segmento parabolico} = \frac{2}{3} A_{ABA'B'} \tag{8.11}$$

dove $A_{ABA'B'}$ è l'area del rettangolo che ha per estremi quei punti.



Esercizio 48 *Trova l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola* $y = -2x^2 + 6x + 4$ *e dalla retta* $r : x - y - 3 = 0$.

Troviamo i punti di intersezione tra la retta e la parabola.

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 6x + 4 \\ y = x - 3 \end{cases} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} -2x^2 + 6x + 4 &= x - 3 \\ -2x^2 + 5x + 7 &= 0 \end{aligned} \tag{8.13}$$

$$\begin{gathered} x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25^2 - 4(-2)(7)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{-4} \\ x_1 = \frac{-5+9}{-4} = \frac{4}{-4} = -1 \quad ; \quad x_2 = \frac{-5-9}{-4} = -\frac{-14}{4} = \frac{7}{2} \end{gathered} \tag{8.14}$$

$$\begin{gathered} y_1 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{7-6}{2} = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad y_2 = -1 - 3 = -4 \\ A\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right) \qquad ; \qquad B(-1; -4) \end{gathered} \tag{8.15}$$

Adesso troviamo la retta parallela alla retta data e tangente alla parabola. La retta parallela appartiene al fascio improprio di rette con lo stesso coefficiente angolare di quella data.

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 6x + 4 \\ y = x + k \end{cases} \tag{8.16}$$

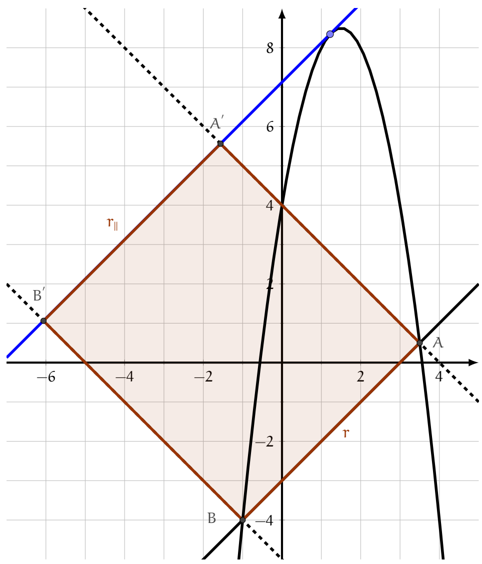
$$
\begin{aligned}
-2x^2 + 6x + 4 &= x + k \\
-2x^2 + 5x + 4 - k &= 0
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 0 \\
b^2 - 4ac &= 0 \\
(5)^2 - 4(-2)(4-k) &= 0 \\
25 + 32 - 8k &= 0 \\
57 = 8k \quad &; \quad k = \frac{57}{8}
\end{aligned}
\tag{8.18}
$$

Per cui la retta parallela $r_{\|}$ (che scriviamo in forma implicita) ha equazione:

$$
\begin{aligned}
y &= x + \frac{57}{8} \\
x - y + \frac{57}{8} &= 0 \\
8x - 8y + 57 &= 0
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

Se mandiamo le perpendicolari alla retta r passanti per i punti A e B allora queste due rette intersecheranno la retta $r_{\|}$ in due punti A' e B'. Dobbiamo trovare l'area di questo rettangolo evidenziato nella figura seguente.



Tuttavia non è necessario né tracciare queste due perpendicolari né i punti A' e B'.
Per l'area del rettangolo cerchiamo la base come distanza tra A e B.

$$
d_{AB} = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - (-4)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{81}{4}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}
\tag{8.20}
$$

L'altezza del rettangolo è la distanza della retta $r_{\|}$ dal punto A o B: scegliamo B per semplicità.

$$
d_{r_{\|}B} = \frac{|8(-1) - 8(-4) + 57|}{\sqrt{8^2 + 8^2}} = \frac{|-8 + 32 + 57|}{\sqrt{128}} = \frac{81}{8\sqrt{2}}
\tag{8.21}
$$

Infine l'area del segmento parabolico è:

$$
A_{sp} = \frac{2}{3} A_{ABA'B'} = \frac{2}{3} A_{d_{AB} \cdot d_{r_{\|}B}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{81}{8\sqrt{2}} = \frac{243}{8}
\tag{8.22}
$$

9 Parabola date alcune condizioni

9.1 Parabola passante per tre punti (non allineati)

L'equazione generale di una parabola con asse verticale $y = ax^2 + bx + c$ o asse orizzontale $x = ay^2 + by + c$ dipende da tre parametri indipendenti (a, b e c). Per trovarli possiamo costruire un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b e c, imponendo il passaggio della parabola per i tre punti.

In generale esisterà una parabola di entrambe i tipi che passa per gli stessi tre punti: nella consegna è quindi necessario indicare quale tipo di parabola dobbiamo trovare.

Se due dei tre punti sono sulla stessa retta *non può esistere* alcuna parabola con asse parallelo a quella retta.

Nessun tipo di parabola (neanche quelle con asse obliquo) può passare per tre punti allineati.

Esercizio 49 *Trova la parabola con asse orizzontale passante per il punti* $A(-2;1)$, $B(1;3)$ *e* $C(0;1)$.

I punto A e C condividono la stessa ordinata e quindi stanno sulla stessa retta parallela all'asse y: la parabola non può esistere. Se anche non ce ne fossimo accorti avremmo ottenuto un sistema indeterminato. Infatti, proviamo a sostituire le coordinate dei punti nella generica equazione della parabola $x = ay^2 + by + c$.

$$\begin{cases} -2 = a(1)^2 + b(1) + c \\ 1 = a(3)^2 + b(3) + c \\ 0 = a(1)^2 + b(1) + c \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -2 = a + b + c \\ 1 = 9a + 3b + c \\ 0 = a + b + c \end{cases} \tag{9.1}$$

Se eguagliamo il primo membro della prima e terza equazione arriviamo all'assurdo $-2 = 0$: il sistema è impossibile e non esiste parabola che soddisfi le condizioni date.

Esercizio 50 *Trova la parabola sia con asse orizzontale che con asse verticale passante per i punti* $A(-2;1)$, $B(1;3)$ *e* $C(0;-1)$.

Parabola con asse orizzontale $x = ay^2 + by + c$

$$\begin{cases} -2 = a(1)^2 + b(1) + c \\ 1 = a(3)^2 + b(3) + c \\ 0 = a(-1)^2 + b(-1) + c \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -2 = a + b + c \\ 1 = 9a + 3b + c \\ 0 = a - b + c \end{cases} \tag{9.2}$$

Mettiamo in evidenza c nell'ultima e sostituiamola nella altre.

$$\begin{cases} -2 = a + b - a + b \\ 1 = 9a + 3b - a + b \\ c = -a + b \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -2 = 2b \\ 1 = 8a + 4b \end{cases} \quad ; \quad b = -1 \tag{9.3}$$

$$\begin{cases} 1 = 8a + 4(-1) \quad ; \quad 8a = 5 \quad ; \quad a = \dfrac{5}{8} \\ c = -\dfrac{5}{8} - 1 = \dfrac{-5-8}{8} = -\dfrac{13}{8} \end{cases} \tag{9.4}$$

La parabola è quindi:

$$x = \frac{5}{8}y^2 - y - \frac{13}{8} \tag{9.5}$$

Parabola con asse verticale $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} 1 = 4a - 2b + c \\ 3 = a + b + c \\ -1 = c \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 1 = 4a - 2b - 1 \\ 3 = a + b - 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2 = 4a - 2b \\ 4 = a + b \end{cases} \tag{9.6}$$

Mettiamo in evidenza la a nella seconda.

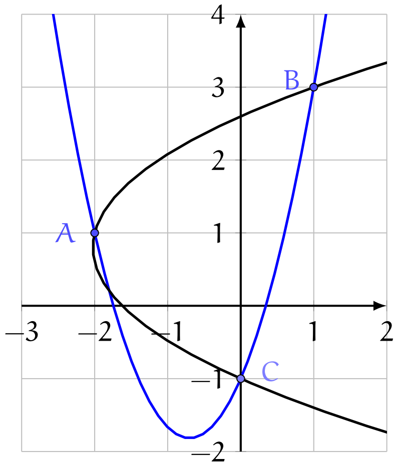
$$\begin{cases} a = 4 - b \\ 2 = 4(4-b) - 2b \quad ; \quad 2 = 16 - 4b - 2b \quad ; \quad 6b = 14 \quad ; \quad b = \dfrac{14}{6} = \dfrac{7}{3} \end{cases} \tag{9.7}$$

$$a = 4 - \frac{7}{3} = \frac{12-7}{3} = \frac{5}{3} \tag{9.8}$$

Quindi la parabola è:

$$y = \frac{5}{3}x^2 + \frac{7}{3}x - 1 \tag{9.9}$$

Rappresentiamo graficamente quanto ottenuto.



9.2 Parabola per un punto, noto il vertice

L'equazione di una parabola dipende da tre parametri. Per determinarne l'equazione dobbiamo avere tre condizioni. Il passaggio per un punto che sia il vertice ci fornisce due condizioni; il passaggio per un altro punto la terza.

Se la parabola ha asse verticale con equazione $y = ax^2 + bx + c$ e se il vertice ha coordinate $V(x_v; y_v)$ e il punto è $P(x_0; y_0)$ allora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = x_v \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = y_v \\ y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \end{cases} \tag{9.10}$$

Il passaggio per il vertice equivale al passaggio per un punto. Siccome la seconda condizione ci fornisce una relazione quadratica, a causa della presenza del Δ, è preferibile sostituirla col passaggio per il vertice, come per un altro punto. Allora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = x_v \\ y_v = ax_v^2 + bx_v + c \\ y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \end{cases} \tag{9.11}$$

Le stesse considerazioni possono essere fatte per la parabola con asse orizzontale, invertendo le x con le y.

Osservazione. Le coordinate del punto P e del vertice devono avere sia l'ascissa che l'ordinata diversa altrimenti la parabola non esiste.

Esercizio 51 *Trova la parabola con asse orizzontale, passante per il punto* $P(2; -3)$ *e di vertice* $V(1; 4)$.

La parabola con asse orizzontale ha forma $x = ay^2 + by + c$. I punti P e V hanno ascissa e ordinata diversa quindi la parabola esiste veramente. Costruiamo un sistema con queste informazioni, imponendo il passaggio per il punto P e V.

$$\begin{cases} 4 = -\dfrac{b}{2a} \\ 2 = 9a - 3b + c \\ 1 = 16a + 4b + c \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} b = -8a \\ 2 = 9a + 24a + c \\ 1 = 16a - 32a + c \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} b = -8a \\ 2 = 33a + c \\ 1 = -16a + c \end{cases} \tag{9.12}$$

Continuiamo mettendo in evidenza c nell'ultima e sostituendola nella seconda.

$$\begin{cases} c = 1 + 16a \\ 2 = 33a + 1 + 16a \end{cases} \quad ; \quad 1 = 49a \quad ; \quad a = \frac{1}{49} \tag{9.13}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{49} \\ c = 1 + 8a = 1 + 8\left(\dfrac{1}{49}\right) = \dfrac{49 + 8}{49} = \dfrac{57}{49} \\ b = -8a = -\dfrac{8}{49} \end{cases} \tag{9.14}$$

Quindi la parabola è :

$$x = \frac{1}{49}y^2 - \frac{8}{49}y + \frac{57}{49} \tag{9.15}$$

9.3 Parabola per un punto, noto il fuoco

L'equazione di una parabola dipende da tre parametri. Per determinarne l'equazione dobbiamo avere tre condizioni. Il passaggio per un punto che sia il fuoco ci fornisce due condizioni; il passaggio per un altro punto la terza.

Se la parabola ha asse verticale con equazione $y = ax^2 + bx + c$ e se il fuoco ha coordiante $F(x_f; y_f)$ e il punto è $P(x_0; y_0)$ allora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = x_f \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = y_f \\ y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \end{cases} \tag{9.16}$$

Le stesse considerazioni possono essere fatte per la parabola con asse orizzontale, invertendo le x con le y.

Esercizio 52 *Trova la parabola con asse verticale passante per il punto* $P(-1; 5)$ *e avente fuoco* $F\left(\frac{3}{8}; -\frac{5}{2}\right)$.

Costruiamo un sistema con le condizioni nate.

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{8} \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = -\dfrac{5}{2} \\ 5 = a - b + c \end{cases} \tag{9.17}$$

Mettiamo in evidenza b nella prima e sostituiamolo nella terza.

$$\begin{cases} b = -2a \cdot \dfrac{3}{8} = -\dfrac{3a}{4} \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = -\dfrac{5}{2} \\ 5 = a + \dfrac{3a}{4} + c \end{cases} \tag{9.18}$$

Poi in evidenza c nella terza e sostituiamola nella seconda.

$$c = 5 - a - \frac{3a}{4} = 5 + \frac{-4a - 3a}{4} = 5 - \frac{7a}{4} \tag{9.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{1-\Delta}{4a} &= -\frac{5}{2} \\ 2(1-\Delta) &= -5\cdot 4a \\ 1-\Delta &= -10a \\ 1-(b^2-4ac) &= -10a \\ 1-\left(-\frac{3a}{4}\right)^2+4a\left(5-\frac{7a}{4}\right) &= -10a \\ 1-\frac{9a^2}{16}+20a-7a^2 &= -10a \\ 16-9a^2+320a-112a^2+160a &= 0 \\ -121a^2+480a+16 &= 0\end{aligned} \tag{9.20}$$

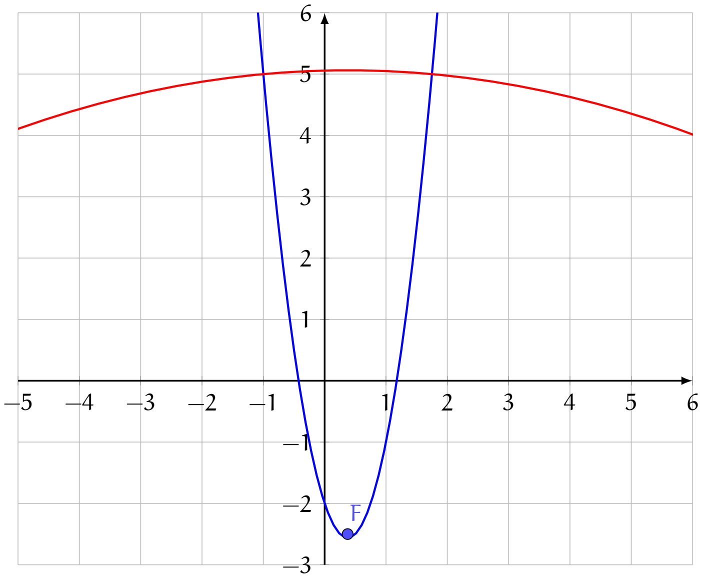
$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{-480\pm\sqrt{480^2-4(-121)(16)}}{2\cdot(-121)} = \frac{-480\pm 488}{-242} \\ a_1 &= \frac{-480+488}{-242} = -\frac{4}{121} \quad ; \quad a_2 = \frac{-480-488}{-242} = 4\end{aligned} \tag{9.21}$$

Otteniamo quindi due parabole, in conseguenza della condizione quadratica data dal fuoco.

$$\begin{cases} a = -\dfrac{4}{121} \\ b = -\dfrac{3a}{4} = -\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{4}{121}\right) = \dfrac{3}{121} \\ c = 5-\dfrac{7a}{4} = 5-\dfrac{7}{4}\cdot\left(-\dfrac{4}{121}\right) = 5+\dfrac{7}{121} = \dfrac{605+7}{121} = \dfrac{612}{121}\end{cases} \tag{9.22}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -\dfrac{3a}{4} = -\dfrac{3}{4}\cdot 4 = -3 \\ c = 5-\dfrac{7a}{4} = 5-\dfrac{7}{4}\cdot 4 = 5-7 = -2\end{cases} \tag{9.23}$$

Infine le parabole sono $\quad y = -\dfrac{4}{121}x^2+\dfrac{3}{121}x+\dfrac{612}{121} \quad$ e $\quad y = -4x^2-3x-2.$



9.4 Parabola dato il vertice e il fuoco

L'equazione di una parabola dipende da tre parametri. Per determinarne l'equazione dobbiamo avere tre condizioni. Il passaggio per il vertice ci fornisce due condizioni; l'avere il fuoco altre due condizioni. Tuttavia due delle quattro conduzioni coincidono: il fuoco e il vertice stanno sullo stesso asse, cioè hanno o l'ascissa o l'ordinata in comune. In conclusione abbiamo tre condizioni e sappiamo anche quale sia l'asse e quindi l'orientazione della parabola.

Se il vertice ha coordinate $V(x_v; y_v)$ e il fuoco $F(x_f; y_f)$ con $x_v = x_f$ allora la parabola ha asse verticale ed equazione $y = ax^2 + bx + c$. Allora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = x_v \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = y_v \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = y_f \end{cases} \tag{9.24}$$

Le condizioni date portano univocamente ad un'unica parabola.

Esercizio 53 *Trova la parabola di vertice* $V\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{7}{4}\right)$ *e fuoco* $F\left(\dfrac{3}{2}; -2\right)$

La parabola ha il vertice e il fuoco con l'ascissa in comune: la parabola ha l'asse orizzontale ed è del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Costruiamo un sistema con le condizioni note.

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = -2 \end{cases} \tag{9.25}$$

Conviene sempre trattare il Δ (che compare in due equazioni) come fosse la terza variabile del sistema e solo alla fine ricavare il valore di c. Quindi mettiamo in evidenza b nella prima e Δ nella seconda, che sostituiamo nella terza.

$$\begin{cases} b = -3a \\ \Delta = 4a \cdot \dfrac{7}{4} = 7a \\ 1 - \Delta = -8a \end{cases} \tag{9.26}$$

$$\begin{aligned} 1 - (7a) &= -8a \\ 8a - 7a &= -1 \\ a &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b &= -3a \\ b &= -3(-1) = 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Delta &= 7a \\ b^2 - 4ac &= 7a \\ (3)^2 - 4(-1)c &= 7(-1) \\ 9 + 4c &= -7 \\ 4c &= -16 \\ c &= -\frac{16}{4} = -4 \end{aligned}$$

Infine la parabola ha equazione:

$$y = -x^2 + 3x - 4 \tag{9.27}$$

9.5 Parabola dato il vertice (o il fuoco) e la direttrice

L'equazione di una parabola dipende da tre parametri. Per determinarne l'equazione dobbiamo avere tre condizioni. Il passaggio per il vertice ci fornisce due condizioni; l'avere una certa direttrice un'altra condizione. Inoltre la direttrice ci dice anche quale sia l'asse della parabola.

Se la parabola ha asse verticale con equazione $y = ax^2 + bx + c$ e se il vertice ha coordinate $V(x_v; y_v)$ e la direttrice è $y = k$ allora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = x_v \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = y_v \\ \dfrac{-1-\Delta}{4a} = k \end{cases} \tag{9.28}$$

Le stesse considerazioni possono essere fatte per la parabola con asse orizzontale, invertendo le x con le y, avendo l'asse del tipo $x = k$.

Le condizioni date portano univocamente ad un'unica parabola.

Esercizio 54 *Trova la parabola di vertice* $V\left(\dfrac{1}{2}; -2\right)$ *e direttrice* $x = -1$

La parabola è con la direttrice verticale e quindi l'asse orizzontale: è del tipo $x = ay^2 + by + c$. Costruiamo un sistema con le condizioni note. Se la parabola ha asse verticale con equazione $y = ax^2 + bx + c$ e se il vertice ha coordinate $V(x_v; y_v)$ e la direttrice è $y = k$ allora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-1-\Delta}{4a} = -1 \end{cases} \tag{9.29}$$

Conviene sempre trattare il Δ (che compare in due equazioni) come fosse la terza variabile del sistema e solo alla fine ricavare il valore di c. Quindi mettiamo in evidenza b nella prima e Δ nella seconda, che sostituiamo nella terza.

$$\begin{cases} b = 4a \\ \Delta = -4a \cdot \dfrac{1}{2} = -2a \\ \dfrac{-1-(-2a)}{4a} = -1 \end{cases} \tag{9.30}$$

Ricaviamo a dall'ultima e poi b

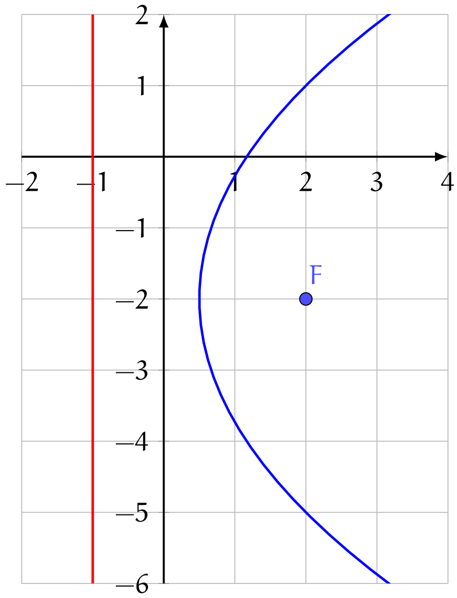
$$\begin{aligned} \frac{-1+2a}{4a} &= -1 \\ -1+2a &= -4a \\ 6a &= 1 \\ a &= \frac{1}{6} \end{aligned} \tag{9.31}$$

$$b = 4a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \tag{9.32}$$

Esplicitiamo il valore di Δ e ricaviamo c.

$$\begin{aligned}
\Delta &= -2a \\
b^2 - 4ac &= -2a \\
\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{6}\right)c &= -\frac{2}{6} \\
\frac{4}{9} - \frac{4}{6}c &= -\frac{2}{6} \\
\frac{4}{9} - \frac{2}{3}c &= -\frac{1}{3} \\
4 - 6c &= -3 \\
-6c &= -3 - 4 \\
c &= \frac{7}{6}
\end{aligned} \tag{9.33}$$

Infine la parabola ha equazione $x = \frac{y^2}{6} + \frac{2}{3}y + \frac{7}{6}$



9.6 Parabola per due punti di asse dato

L'equazione di una parabola dipende da tre parametri. Per determinarne l'equazione dobbiamo avere tre condizioni. Il passaggio per due punti ci fornisce due condizioni; l'equazione dell'asse un'altra condizione. Inoltre l'asse ci dice quale tipologia di parabola abbiamo, se con asse orizzontale o verticale.

Se la parabola ha asse di equazione $x = k$ e se passa per i punti è $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ allora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = k \\ y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \end{cases} \tag{9.34}$$

Le stesse considerazioni possono essere fatte per la parabola con asse orizzontale, invertendo le x con le y.

Le condizioni date portano univocamente ad un'unica parabola.

Esercizio 55 *Trova la parabola passante per il punti* $A(5; 2)$ *e* $B(-1; -1)$ *e avente asse di equazione* $y = \dfrac{5}{6}$.

La parabola ha asse orizzontale: ha la forma $x = ay^2 + by + c$. Costruiamo un sistema con le condizioni date.

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{5}{6} \\ 5 = 4a + 2b + c \\ -1 = a - b + c \end{cases} \tag{9.35}$$

Mettiamo in evidenza b nella prima e sostituiamola nelle successive.

$$\begin{cases} b = -\dfrac{5}{6} \cdot 2a = -\dfrac{5}{3}a \\ 5 = 4a + 2\left(-\dfrac{5}{3}a\right) + c \\ -1 = a - \left(-\dfrac{5}{3}a\right) + c \end{cases} \tag{9.36}$$

Mettiamo in evidenza c nell'ultima e sostituiamo nella seconda.

$$c = -1 - a - \frac{5}{3}a \tag{9.37}$$

$$\begin{aligned} 5 &= 4a - 2 \cdot \frac{5}{3}a - 1 - a - \frac{5}{3}a \\ 6 &= 3a - 3 \cdot \frac{5}{3}a \\ 6 &= 3a - 5a \\ 6 &= -2a \\ a &= -\frac{6}{2} = -3 \end{aligned} \tag{9.38}$$

Sostituendo a ritroso:

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -\dfrac{5}{3}a = -(-3)\dfrac{5}{3} = 5 \\ c = -1 - a - \dfrac{5}{3}a = c = -1 - (-3) - (-3)\dfrac{5}{3} = -1 + 3 + 5 = 7 \end{cases} \tag{9.39}$$

Infine la parabola ha equazione $x = -3y^2 + 5y + 7$.

9.7 Parabola per un punto e tangente ad un retta in un altro punto

L'equazione di una parabola dipende da tre parametri. Per determinarne l'equazione dobbiamo avere tre condizioni. Il passaggio per due punti ci fornisce due condizioni. Se retta è tangente alla parabola e quel punto ha coordinate $P(x_0; y_0)$ allora vale la relazione $m = 2ax_0 + b$, che è una terza condizione.

Se la parabola ha asse verticale, passa per il punto $A(x_1; y_1)$ e ed è tangente alla retta $y = mx + q$ nel punto $P(x_o; y_o)$ allora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} m = 2ax_0 + b \\ y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \end{cases} \tag{9.40}$$

Le stesse considerazioni possono essere fatte per la parabola con asse orizzontale, invertendo le x con le y.

Esercizio 56 *Trova la parabola con asse verticale passante per il punto* $A(4; -6)$ *e tangente nel punto* $P(2; 0)$ *alla retta* $x + y - 2 = 0$.

Scriviamo la retta in forma esplicita per ricavarne il coefficiente angolare.

$$y = -x + 2 \quad ; \quad m = -1 \tag{9.41}$$

La parabola ha la forma $y = x^2 + bx + c$. Scriviamo un sistema con le condizioni date.

$$\begin{cases} -1 = 2a(2) + b \\ 0 = 4a + 2b + c \\ -6 = 16a + 4b + c \end{cases} \tag{9.42}$$

Mettiamo in evidenza b dalla prima e la sostituiamo nelle altre.

$$\begin{cases} b = -1 - 4a \\ 0 = 4a + 2(-1 - 4a) + c \\ -6 = 16a + 4(-1 - 4a) + c \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 0 = 4a - 2 - 8a + c \\ -6 = 16a - 4 - 16a + c \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 0 = -4a - 2 + c \\ -6 = -4 + c \end{cases} \tag{9.43}$$

Mettiamo in evidenza c nell'ultima e la sostituiamo nella prima.

$$\begin{cases} c = -2 \\ 0 = 4a - 2 - 2 \quad ; \quad 4a = -4 \quad ; \quad a = -1 \end{cases} \tag{9.44}$$

Quindi:

$$b = -1 - 4a = -1 - 4(-1) = -1 + 4 = 3 \tag{9.45}$$

Infine la parabola ha equazione:

$$y = -x^2 + 3x - 2 \tag{9.46}$$

9.8 Parabola per due punti e tangente ad un retta

La differenza rispetto la caso precedente è che qui *non conosciamo il punto di tangenza*, quindi non possiamo applicare la condizione di primo grado sul coefficiente angolare di tale retta. Il passaggio per due punti ci fornisce comunque due condizioni. Se retta è tangente alla parabola il discriminante del sistema che si ottiene intersecando la parabola con la retta deve essere nullo.

In pratica, se la parabola ha asse verticale e passa per i punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ allora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \end{cases} \tag{9.47}$$

Avremo un sistema con un parametro indeterminato. Lo troviamo imponendo la condizione di tangenza con la retta.

Le stesse considerazioni possono essere fatte per la parabola con asse orizzontale, invertendo le x con le y.

Le condizioni date portano in generale a due parabole.

Esercizio 57 *Trova la parabola con asse verticale passante per il punto* $A(1; -4)$ *e* $B(3; 16)$ *e tangente alla retta* $8x + y + 8 = 0$.

Imponiamo il passaggio per i due punti.

$$\begin{cases} -4 = a + b + c \\ 16 = 9a + 3b + c \end{cases} \tag{9.48}$$

Mettiamo in evidenza c dalla prima e la sostituiamo nelle altre; poi esprimiamo tutto in unica variabile.

$$\begin{cases} c = -4 - a - b \\ 16 = 9a + 3b - 4 - a - b \quad ; \quad 20 = 8a + 2b \quad ; \quad 10 = 4a + b \quad ; \quad b = 10 - 4a \end{cases} \tag{9.49}$$

$$c = -4 - a - b = -4 - a - 10 + 4a = -13 + 3a \tag{9.50}$$

Esprimiamo la parabola per quel che sappiamo.

$$y = ax^2 + (10 - 4a)x - 13 + 3a \tag{9.51}$$

Adesso possiamo costruire un sistema con la parabola e la retta, imponendo che il discriminante sia nullo.

$$\begin{cases} y = ax^2 + (10 - 4a)x - 13 + 3a \\ y = -8x - 8 \end{cases} \tag{9.52}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + (10 - 4a)x - 13 + 3a &= -8x - 8 \\ ax^2 + (18 - 4a)x - 6 + 3a &= 0 \end{aligned} \tag{9.53}$$

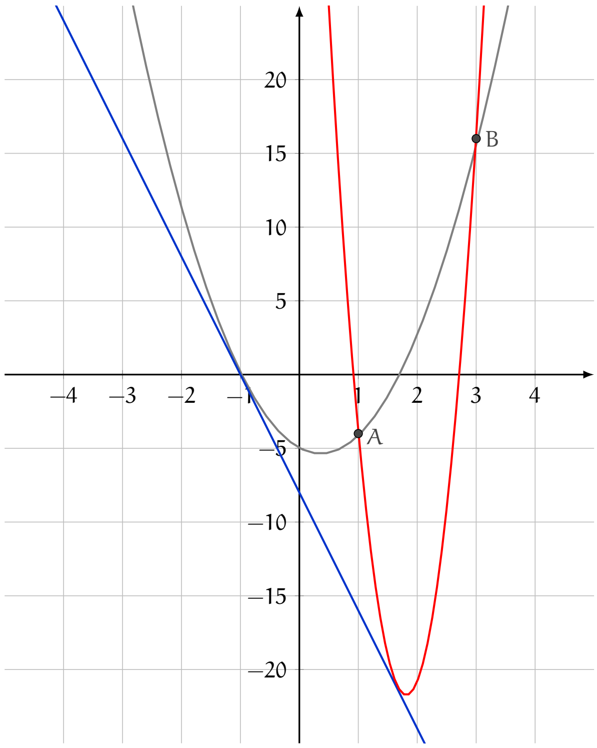
$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ (18 - 4a)^2 - 4 \cdot a \cdot (-6 + 3a) &= 0 \\ 324 - 144a + 16a^2 + 24a - 12a^2 &= 0 \\ 4a^2 - 120a + 324 &= 0 \end{aligned} \tag{9.54}$$

$$a_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4(4)(324)}}{2 \cdot 4} = \frac{120 \pm \sqrt{9216}}{8}$$
$$a_1 = \frac{120+96}{8} = -\frac{216}{8} = 3 \quad ; \quad a_2 = \frac{120-96}{8} = -\frac{24}{8} = 27 \tag{9.55}$$

$a = 3$
$b = 10 - 4a = 10 - 4(3) = -2$
$c = -13 + 3a = -13 + 3(3) = -4$

$a = 27$
$b = 10 - 4a = 10 - 4(27) = -98$
$c = -13 + 3a = -13 + 3(3) = 68$

Infine le parabole trovate sono: $\quad y = 3x^2 - 2x - 4 \quad$ e $\quad y = 27x^2 - 98x + 68$.



10 Tangenti ad una parabola

10.1 Tangenti ad una parabola, da un punto esterno o sulla parabola

Da un punto esterno $P(x_0; y_0)$ a una parabola possiamo mandare due rette tangenti. Se il punto è sulla parabola la retta tangente è una sola.

Per trovare le due rette costruiamo il fascio proprio di rette passanti per il punto P: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Per trovare l'incognita m imponiamo che le rette del fascio, proprio perché tangenti, intercettino la parabola in un punto solo: se intersechiamo la parabola con il fascio dobbiamo avere un unica soluzione. Imponiamo allora che l'equazione di secondo grado che otteniamo abbia discriminante uguale a zero. Il discriminante è a sua volta un'equazione di primo o secondo grado in m. Le soluzioni ci danno il coefficiente angolare delle rette cercate.

Esercizio 58 *Trova le tangenti alla parabola di equazione* $y = 3x^2 - 4x - 3$ *condotte dal punto* $P(-1; -8)$.

Cominciamo col costruire il fascio di rette passanti per il punto P.

$$\begin{aligned} y - (-8) &= m(x - (-1)) \\ y + 8 &= mx + m \\ y &= mx + m - 8 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Scriviamo il sistema individuato dalle rette del fascio e dalla parabola.

$$\begin{cases} y = mx + m - 8 \\ y = 3x^2 - 4x - 3 \end{cases} \tag{10.2}$$

I valori di m per il quali abbiamo delle tangenti sono quelli per cui il sistema ci da coppie di soluzioni coincidenti, ovvero un'unica soluzione data dal punto di tangenza. Eguagliamo la prima e la seconda y del sistema e imponiamo che l'equazione di secondo grado in x dia soluzioni uniche ovvero che abbia il discriminante uguale a zero.

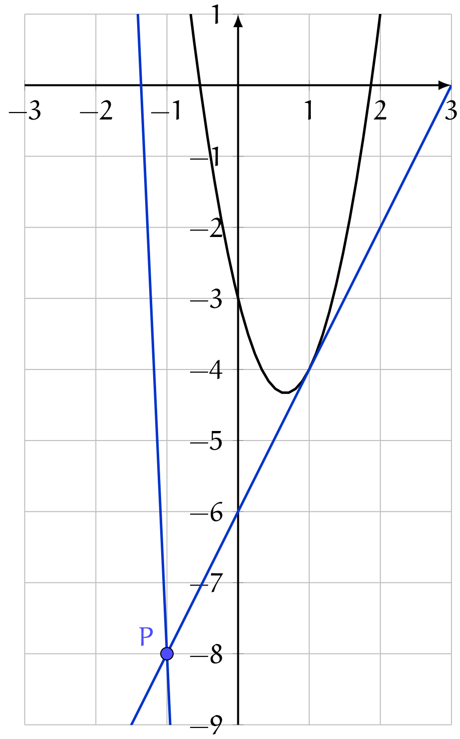
$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x - 3 &= mx + m - 8 \\ 3x^2 + (-4 - m)x - m + 5 &= 0 \end{aligned} \tag{10.3}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ b^2 - 4ac &= 0 \\ (-4 - m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-m + 5) &= 0 \\ 16 + 8m + m^2 + 12m - 60 &= 0 \\ m^2 + 20m - 44 &= 0 \end{aligned} \tag{10.4}$$

$$
\begin{gathered}
m_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(1)(-44)}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm \sqrt{576}}{2} \\
m_1 = \frac{-20 + 24}{2} = -\frac{4}{2} = 2 \quad ; \quad m_2 = \frac{-20 - 24}{2} = -\frac{44}{2} = -22
\end{gathered} \tag{10.5}
$$

Otteniamo quindi due rette. Sostituiamo i valori trovati nel fascio di rette $y = mx + m - 8$.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2x + 2 - 8 = 2x - 6 \\
y_2 &= -22x - 22 - 8 = -22x - 30
\end{aligned} \tag{10.6}
$$



10.2 Tangenti ad una parabola, da un punto sulla parabola

Per un punto $P(x_0; y_0)$ su una parabola esiste una sola tangente. Per trovare la retta possiamo considerare che il suo coefficiente angolare è dato dalla relazione:

$$m = 2ax_0 + b \tag{10.7}$$

(Se vogliamo usare questa relazione è implicito che la retta non debba essere verticale).

La tangente è la retta con quel coefficiente angolare passante per il punto P.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{10.8}$$

Esiste anche una relazione, detta *formula di sdoppiamento*, che ci consente di scrivere direttamente l'equazione della retta. Se la retta ha la forma $y = ax^2 + bx + c$ allora la retta ha la forma:

$$\frac{y + y_0}{2} = ax_0x + b\frac{x + x_0}{2} + c \tag{10.9}$$

Se la parabola ha l'asse orizzontale basta scambiare le x con le y in tutte le formule esposte. Questo vuol dire che l'm è il coefficiente angolare di una retta esplicitata in funzione di x e anche il fascio scambia le x con le y.

Esercizio 59 *Trova la retta tangente alla parabola* $x = 4y^2 - 5y + 3$ *nel suo punto* $P(9; 2)$.

Se il punto appartiene alla parabola possiamo applicare un metodo semplificato. Troviamo il coefficiente angolare della tangente con la seguente relazione.

$$m = 2ay_0 + b = 2(4)(2) + (-5) = 16 - 5 = 11 \tag{10.10}$$

Nella relazione precedente abbiamo scritto y_0 e non x_0 perché la parabola ha l'asse orizzontale. Il coefficiente trovato non è l'usuale coefficiente angolare di una retta esplicitata rispetto alla y, ma rispetto alla x. E se adesso scriviamo la retta passante per un punto e di coefficiente angolare dato scambiamo anche in questa relazione le x con le y.

$$\begin{aligned} x - x_0 &= m(y - y_0) \\ x - 9 &= 11(y - 2) \\ x &= 11y - 22 + 9 \\ x &= 11y - 13 \end{aligned} \tag{10.11}$$

Alla stessa equazione possiamo arrivare con la formula ”di sdoppiamento”, invertendo anche qui le x con le y.

$$\begin{aligned} \frac{x + x_0}{2} &= ay_0y + b\frac{y + y_0}{2} + c \\ \frac{x + 9}{2} &= 4(2)y + (-5)\frac{y + 2}{2} + 3 \\ \frac{x + 9}{2} &= 8y + \frac{-5y - 10}{2} + 3 \\ x + 9 &= 16y - 5y - 10 + 6 \\ x &= 11y - 13 \end{aligned} \tag{10.12}$$

Parte IV

Iperboli

11 Introduzione

L'iperbole è il luogo dei punti del piano per i quali la differenza delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante.

Nei libri di geometria analitica delle superiori compaiono solitamente quattro tipi di iperboli: quelle centrate nell'origine degli assi, con asse di simmetria verticale o orizzontale, quelle equilatere riferite agli assi cartesiani e quelle ottenute da quest'ultima, ma traslate, che sono il grafico di una funzione detta omografica.

Iperboli centrate nell'origine con i fuochi sull'asse x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11.1}$$

Iperboli centrate nell'origine con i fuochi sull'asse y

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{11.2}$$

Iperboli equilatere riferite agli assi cartesiani

$$xy = k \tag{11.3}$$

Iperboli e funzione omografica

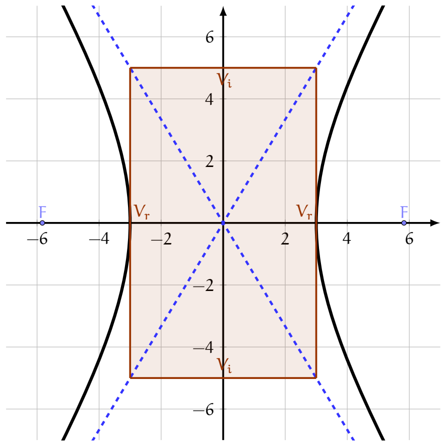
$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{11.4}$$

11.1 Iperboli centrate nell'origine con i fuochi sull'asse x

Questo tipo di iperbole ha il centro di simmetria nell'origine degli assi.
La forma normale di questo tipo di iperbole è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11.5}$$

Vertici reali	Vertici immaginari
$V(\pm a\,;0)$	$V(0\,;\pm b)$
Fuochi	**Asintoti**
$F(\pm\sqrt{a^2+b^2}\,;0)$	$y = \pm\frac{b}{a}x$



I vertici reali sono due e sono intersezione dei due rami di iperbole con l'asse x.
La distanza tra questi due vertici è detta *asse trasverso*.
Le rette tratteggiate in blu sono gli *asintoti*: esse delimitano la regione di spazio occupata dai due rami. Gli asintoti si avvicinano "asintoticamente" ai due rami di iperbole senza mai toccarli, per x che tende all'infinito. Inoltre passano per i vertici del rettangolo evidenziato in figura che a sua volta passa per i vertici reali e immaginari dell'iperbole.

Esercizio 60 *Trova gli elementi fondamentali dell'iperbole di equazione* $25x^2 - 9y^2 = 225$.

Capiamo che si tratta realmente di un iperbole perché abbiamo la differenza tra due potenze al quadrato di x e y a primo membro e un numero positivo a secondo membro. L'equazione non è però in forma normale, ovvero con un uno a secondo membro. Dividiamo quindi tutto per il numero che compare.

$$\begin{gathered} \frac{25}{255}x^2 - \frac{9}{255}y^2 = \frac{225}{255} \\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1 \end{gathered} \tag{11.6}$$

A questo punto i due coefficienti che compaiono a denominatore di x^2 e y^2 corrispondono ad a^2 e b^2.

$$a^2 = 9 \quad ; \quad a = 3 \quad ; \quad b^2 = 25 \quad ; \quad b = 5 \tag{11.7}$$

Di conseguenza i vertici hanno coordinate:

$$V_r(\pm 3;\ 0) \quad ; \quad V_i(0\,;\pm 5) \tag{11.8}$$

I fuochi sono:

$$F(\pm\sqrt{9+25};\ 0) = F(\pm\sqrt{35};\ 0) \tag{11.9}$$

Gli asintoti hanno equazione:

$$y = \pm\frac{5}{3}x \tag{11.10}$$

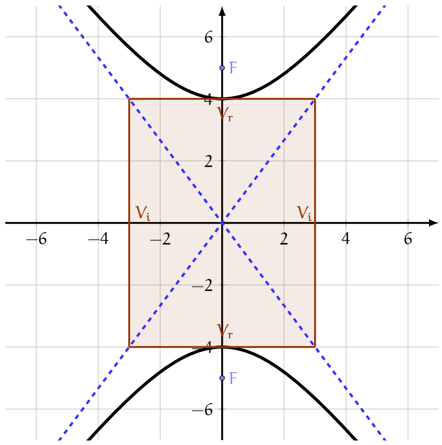
Il grafico è proprio quello mostrato nella figura precedente.

11.2 Iperboli centrate nell'origine con i fuochi sull'asse y

Questo tipo di iperbole ha il centro di simmetria nell'origine degli assi.
La forma normale di questo tipo di iperbole è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{11.11}$$

Vertici reali	Vertici immaginari
$V(0\,;\pm b)$	$V(\pm a;\,0)$
Fuochi	**Asintoti**
$F(0\,;\pm\sqrt{a^2+b^2})$	$y = \pm\frac{b}{a}x$



I vertici reali sono due e sono intersezione dei due rami di iperbole con l'asse y.
La distanza tra questi due vertici è detta *asse trasverso*.
Le rette tratteggiate in blu sono gli *asintoti*: esse delimitano la regione di spazio occupata dai due rami. Gli asintoti si avvicinano "asintoticamente" ai due rami di iperbole senza mai toccarli, per x che tende all'infinito. Inoltre passano per i vertici del rettangolo evidenziato in figura che passa a sua volta per i vertici reali e immaginari dell'iperbole.

Esercizio 61 *Trova gli elementi fondamentali dell'iperbole di equazione* $7x^2 - 6y^2 = -1$.

Questa è l'equazione di un iperbole centrata nell'origine e con i fuochi sull'asse y, ma già in forma normale. Di conseguenza, per trovare i coefficienti caratteristici possiamo scrivere:

$$a^2 = \frac{1}{7} \quad ; \quad b^2 = \frac{1}{6} \tag{11.12}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad ; \quad b = \frac{1}{\sqrt{6}} \tag{11.13}$$

I vertici hanno coordinate:

$$V_r\left(0\,;\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad ; \quad V_i\left(\pm\frac{1}{\sqrt{7}};\,0\right) \tag{11.14}$$

I fuochi sono:

$$F\left(0\,;\pm\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{6}}\right) = \left(0\,;\pm\sqrt{\frac{13}{42}}\right) \tag{11.15}$$

Gli asintoti hanno equazione:

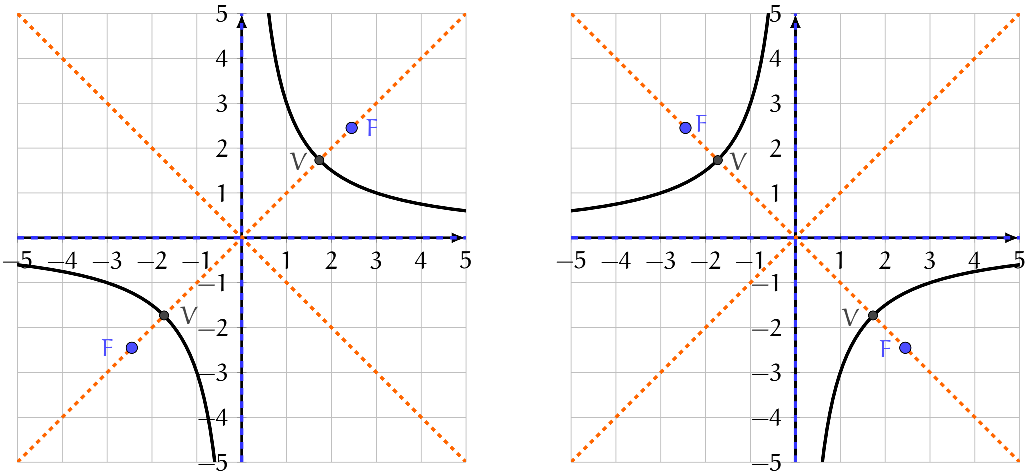
$$y = \pm\frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{1}{\sqrt{7}}}x = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}x = \pm\sqrt{\frac{7}{6}}x \tag{11.16}$$

11.3 Iperboli equilatere riferite agli assi cartesiani

Questo tipo di iperbole ha il centro di simmetria nell'origine degli assi.

La forma normale di questo tipo di iperbole è:

$$xy = k \tag{11.17}$$



$k > 0$

Vertici reali	Fuochi
$V(\pm\sqrt{k}; \pm\sqrt{k})$	$F(\pm\sqrt{2k}; \pm\sqrt{2k})$

$k < 0$

Vertici reali	Fuochi
$V(\pm\sqrt{k}; \mp\sqrt{k})$	$F(\pm\sqrt{2k}; \mp\sqrt{2k})$

I vertici reali sono due e sono intersezione dei due rami di iperbole con le bisettrici del I e III quadrante, se $k > 0$, o del II e IV, se $k < 0$.

La distanza tra questi due vertici è detta *asse trasverso*.

Le rette tratteggiate in rosso sono gli assi di simmetria.

In questo caso gli *asintoti* (tratteggiati in blu) sono gli assi cartesiani: essi delimitano la regione di spazio occupata dai due rami. Gli asintoti si avvicinano "asintoticamente" ai due rami di iperbole senza mai toccarli, per x che tende all'infinito.

Esercizio 62 *Trova gli elementi fondamentali dell'iperbole di equazione* $xy = -3$.

Questa è l'equazione di un iperbole equilatera centrata nell'origine e riferita agli assi cartesiani. Di conseguenza, per trovare i coefficienti caratteristici possiamo scrivere:

$$k = -3 \tag{11.18}$$

I vertici hanno coordinate:

$$V_r(\pm\sqrt{3}; \mp\sqrt{3}) \tag{11.19}$$

I fuochi sono:

$$F(\pm\sqrt{6}; \mp\sqrt{6}) \tag{11.20}$$

Gli asintoti sono gli assi cartesiani. Il grafico è la figura precedente sulla destra.

11.4 Iperboli e funzione omografica

Questo tipo di iperbole sono iperboli equilatere riferite agli assi cartesiani e poi traslate.

La forma normale di questo tipo di iperbole è:

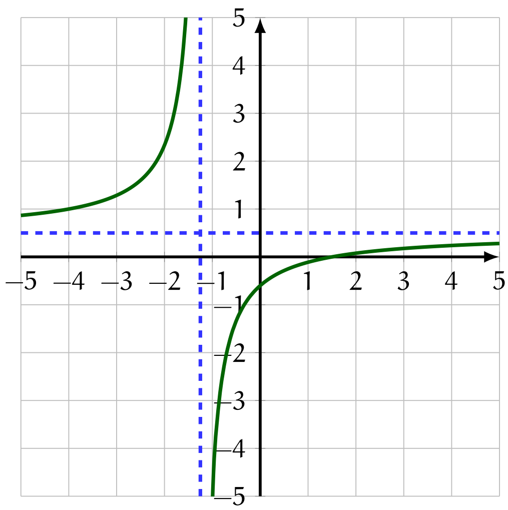
$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{11.21}$$

Asintoti

$$y = \frac{a}{c} \qquad x = -\frac{d}{c}$$

Centro di simmetria

$$\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$$



Le rette tratteggiate in blu sono gli *asintoti*: esse delimitano la regione di spazio occupata dai due rami. Gli asintoti si avvicinano "asintoticamente" ai due rami di iperbole senza mai toccarli, per x che tende all'infinito.

Esercizio 63 *Trova gli elementi fondamentali dell'iperbole di equazione* $y = \frac{2x-3}{4x+5}$.

Questa è l'equazione di un iperbole equilatera riferita agli assi cartesiani e traslata rispetto all'origine. Di conseguenza, per trovare i coefficienti caratteristici possiamo scrivere:

$$a = 2 \quad ; \quad b = -3 \quad ; \quad c = 4 \quad ; \quad d = 5 \tag{11.22}$$

Il centro di simmetria ha coordinate:

$$C\left(-\frac{5}{4}; \frac{2}{4}\right) = \left(-\frac{5}{4}; \frac{1}{2}\right) \tag{11.23}$$

Gli asintoti hanno equazione:

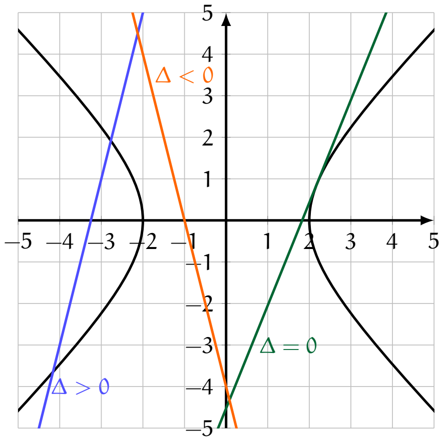
$$x = -\frac{5}{4} \quad ; \quad y = \frac{1}{2} \tag{11.24}$$

Il grafico di quest'iperbole è proprio la figura precedente.

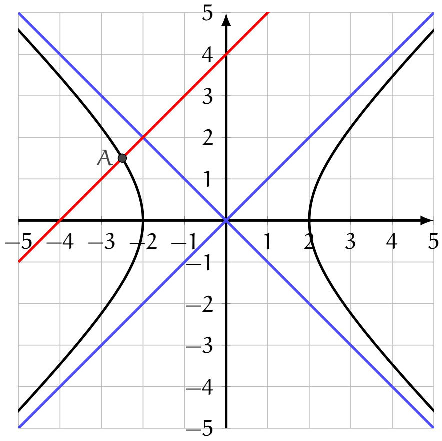
11.5 Posizione reciproca tra iperbole e retta

Una retta, rispetto ad un iperbole, può essere esterna, tangente o secante. Se prendiamo il sistema con l'equazione dell'iperbole e della retta possiamo ottenere:

1. Un'equazione di secondo grado in x o y, il cui Δ ci fornisce informazioni sul numero di soluzioni.
   (a) *Esterna*. Se la retta è esterna non ci sono punti di intersezione tra retta e iperbole. Il sistema formato dalle equazioni delle due figure non ha soluzioni e $\Delta < 0$.
   (b) *Tangente*. Se la retta è tangente c'è un solo punto di intersezione tra retta e iperbole. Il sistema formato dalle equazioni delle due figure ha una sola soluzione e $\Delta = 0$.
   (c) *Secante*. Se la retta è secante ci sono due punti di intersezione tra retta e iperbole. Il sistema formato dalle equazioni delle due figure ha due soluzioni distinte e $\Delta > 0$.



2. Un'equazione di primo grado, questo nel caso in cui la retta sia parallela ad un asintoto e le intersezioni tra retta e iperbole siano solo una, pur essendo la retta secante e non tangente all'iperbole. Di seguito in blu gli asintoti e in rosso una retta parallela ad un asintoto.



Esercizio 64 *Trova la posizione reciproca tra la retta* $y = \sqrt{3}x + 4$ *e l'iperbole* $3x^2 - y^2 = 4$ *e gli eventuali punti di intersezione.*

Risolviamo il sistema tra l'equazione dell'iperbole e della retta.

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 4 \\ 3x^2 - y^2 = 4 \end{cases} \quad ; \quad 3x^2 - (\sqrt{3}x + 4)^2 = 4 \quad ; \quad 3x^2 - 3x^2 - 8\sqrt{3}x - 16 = 4 \tag{11.25}$$

$$-8\sqrt{3}x - 16 = 4 \quad ; \quad x = -\frac{20}{8\sqrt{3}} = -\frac{5}{2\sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{6} \tag{11.26}$$

$$y = \sqrt{3}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{6}\right) + 4 = -\frac{15}{6} + 4 = \frac{-15 + 24}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \tag{11.27}$$

La retta è secante. Il sistema formato dell'equazione dell'iperbole e della retta ci porta ad una equazione di primo grado, così che il punto di intersezione é solo uno. Le coordinate del punto di intersezione sono $\left(-\frac{5\sqrt{3}}{6}; \frac{3}{2}\right)$.

Parte V

Spazio

12 Punti e vettori

Tutte le relazioni che seguono sono essenzialmente identiche a quelle che si ritrovano nel piano, ma con una coordinata spaziale in più.

12.1 Distanza tra due punti

La distanza tra un punto $A(x_A; y_A; z_A)$ e punto $B(x_B; y_B; z_B)$ si trova direttamente con la seguente formula:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \tag{12.1}$$

Ovviamente la distanza tra A e B è uguale alla distanza tra B e A. Allo stesso modo l'ordine in cui compaiono i punti nella formula non ha importanza.

Esercizio 65 *Trova la distanza tra i punti* $A(-3; 2, 0)$ *e* $B(-2; -1; 8)$.

$$\begin{aligned} d_{AB} =& \sqrt{(-2-(-3))^2 + (-1-2)^2 + (8-0)^2} = \\ & \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (8)^2} = \sqrt{1+9+64} = \sqrt{74} \end{aligned} \tag{12.2}$$

12.2 Punto medio di un segmento: definizione e formula

Il punto medio di un segmento è il punto del segmento equidistante dai suoi estremi. Se il segmento ha per estremi il punto $A(x_A; y_A; z_A)$ e il punto $B(x_B; y_B; z_B)$ allora le coordinate del punto medio P_m sono:

$$P_m\,(x_m; y_m; z_m) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right) \tag{12.3}$$

12.3 Somma e differenza tra due vettori

Un vettore $\vec{v}$ nello spazio può essere identificato con le coordinate della sua punta quando applicato nell'origine degli assi cartesiani. Queste coordinate rappresentano anche le componenti del vettore rispetto agli assi coordinati.

$$\vec{v} \equiv (v_x; v_y; v_z) \equiv v_x\vec{\mathbf{i}} + v_y\vec{\mathbf{j}} + v_z\vec{\mathbf{k}} \tag{12.4}$$

I vettori $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ e $\vec{\mathbf{k}}$ sono vettori unitari (versori) paralleli agli assi coordinati.

La somma algebrica $\vec{c}$ di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un vettore che ha per componenti la somma algebrica delle rispettive componenti di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$\begin{gathered} \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \\ (c_x; c_y; c_z) = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z) \\ c_x\vec{\mathbf{i}} + c_y\vec{\mathbf{j}} + c_z\vec{\mathbf{k}} = (a_x + b_x)\vec{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\vec{\mathbf{j}} + (a_z + b_z)\vec{\mathbf{k}} \end{gathered} \tag{12.5}$$

Esercizio 66 *Trova la somma $\vec{c}$ e la differenza $\vec{d}$ tra i vettori $\vec{a} \equiv (-7; 6; 0)$ e $\vec{b} \equiv (-3; -1; 5)$.*

Applichiamo immediatamente quanto scritto prima:

$$\vec{c} \equiv (-7-3; 6-1; 0+5) = (-10; 5; 5) \tag{12.6}$$

$$\vec{d} \equiv (-7-(-3); 6-(-1); 0-5) = (-4; 7; -5) \tag{12.7}$$

12.4 Vettore per due punti

Dati due punti A e B nello spazio possiamo ricavare il vettore $\overrightarrow{BA}$ che ha per estremi i due punti come vettore differenza tra quello associato al secondo punto meno il primo.

$$\begin{gathered} \overrightarrow{BA} = \vec{B} - \vec{A} \\ (ba_x; ba_y; ba_z) = (b_x - a_x; b_y - a_y; b_z - a_z) \end{gathered} \tag{12.8}$$

Il modulo del vettore non dipende dall'ordine con cui prendiamo i due punti, ma il verso invece sì.

12.5 Modulo di un vettore

Il modulo di un vettore $\vec{a}$ è un numero che esprime l'intensità o lunghezza del vettore.

Dalla formula della distanza tra due punti (l'origine degli assi e la punta del vettore) possiamo scrivere:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2} \tag{12.9}$$

12.6 Prodotto di uno scalare per un vettore

Il prodotto di uno scalare k per un vettore $\vec{a}$ è un vettore che ha per componenti il prodotto dello scalare k per le componenti del vettore $\vec{a}$.

$$k \cdot \vec{a} = (ka_x; ka_y; ka_z) \tag{12.10}$$

12.7 Prodotto scalare tra due vettori e coseno dell'angolo compreso

Il prodotto scalare tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un numero (uno scalare) legato al valore dei due vettori.

Se $|\vec{a}|$ è il modulo del vettore $\vec{a}$, $|\vec{b}|$ il modulo del vettore $\vec{b}$ e α l'angolo da essi formato, allora possiamo definire il loro prodotto scalare come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha \tag{12.11}$$

Oppure, prendendo le componenti dei due vettori:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{12.12}$$

In un sistema di coordinate cartesiane monometrico le due definizioni portano allo stesso risultato. La prima definizione è molto usata in fisica; nel contesto della geometria analitica la seconda risulta però molto più utile.

Dalla prima definizione, ricordando che $\cos(90) = 0$, possiamo dire che, se due vettori sono perpendicolari, allora il loro prodotto scalare è nullo.

La stessa relazione ci consente di ricavare il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{12.13}$$

Esercizio 67 *Trova il prodotto scalare* $\vec{a} \equiv (-7; 6; 0)$ *e* $\vec{b} \equiv (-3; -1; 5)$.

Immediatamente scriviamo:

$$p = -7 \cdot (-3) + 6 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 = 21 - 6 = 15 \tag{12.14}$$

Esercizio 68 *Trova l'angolo tra i vettori* $\vec{a} \equiv (-4; 3; -9)$ *e* $\vec{b} \equiv (7; 6; -5)$.

Troviamo l'angolo tra i due vettori ricavando il coseno dell'angolo compreso e poi il suo arcocoseno.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{12.15}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -4(7) + 3(6) - 9(-5) = -28 + 18 + 45 = 35 \tag{12.16}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{16 + 9 + 81} = \sqrt{106} \tag{12.17}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(7)^2 + (6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{49 + 36 + 25} = \sqrt{110} \tag{12.18}$$

$$\cos\alpha = \frac{35}{\sqrt{106} \cdot \sqrt{110}} \simeq 0,354 \tag{12.19}$$

$$\alpha = \arccos(0{,}354) \simeq 71 \tag{12.20}$$

12.8 Prodotto vettoriale tra due vettori e seno dell'angolo compreso

Il prodotto vettoriale $\vec{v}$ tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un vettore perpendicolare al piano su chi giacciono gli altri due.

Se $|\vec{a}|$ è il modulo del vettore $\vec{a}$, $|\vec{b}|$ il modulo del vettore $\vec{b}$ e α l'angolo più piccolo da essi formato, allora possiamo definire il modulo del prodotto vettoriale come:

$$|\vec{v}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\alpha \tag{12.21}$$

Oppure, prendendo le componenti dei due vettori:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - b_y a_z) - \vec{j}(a_x b_z - b_x a_z) + \vec{k}(a_x b_y - b_x a_y) \tag{12.22}$$

Proprietà del prodotto vettoriale:

1. É un prodotto anticommutativo cioè $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$.
2. É un vettore perpendicolare al piano degli altri due.
3. Il prodotto vettoriale $\vec{c}$ e i due vettori da cui deriva formano una terna destra; ovvero, allineando l'indice e medio rispettivamente ai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ allora il pollice risulta allineato al vettore $\vec{c}$.

Dalla prima definizione, ricordando che $\sin(0) = 0$, possiamo dire che, se due vettori sono paralleli, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.

La stessa relazione ci consente di ricavare il seno dell'angolo compreso tra i due vettori:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{a} \wedge \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{12.23}$$

Il simbolo che in questo documento useremo per il prodotto vettoriale è $\wedge$. Questo simbolo può avere altri significati, ma nel contesto scolastico e soprattutto pensando alla sua scrittura a mano è meno ambiguo del più corretto simbolo $\times$.

Esercizio 69 *Trova il prodotto vettoriale tra i vettori $\vec{a} \equiv (4; -5; 1)$ e $\vec{b} \equiv (-3; -8; 6)$.*

Immediatamente scriviamo:

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 1 \\ -3 & -8 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(-5(6) - (-8)1) - \vec{j}(4 \cdot 6 - (-3)1) + \vec{k}(4(-8) - (-3)(-5)) \\ &= -22\vec{i} - 27\vec{j} - 47\vec{k} \end{aligned} \tag{12.24}$$

13 Piano

13.1 Riconoscere l'orientazione di un piano dai suoi coefficienti

Un piano espresso nella forma cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ ci dice, dai coefficienti mancanti, come è orientato rispetto agli assi coordinati. Se manca il termine con la x il piano è parallelo all'asse x e così via per gli altri termini. Se manca il termine noto d il piano passa per l'origine.

Esercizio 70 *Trova l'orientazione del piano di equazione* $7x - 2z + 4 = 0$ *rispetto agli assi cartesiani.*

Manca il termine in y: il piano è parallelo all'asse y.

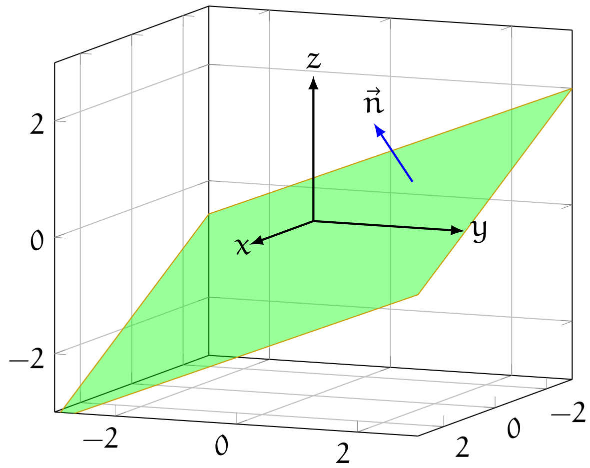
13.2 Vettore normale a un piano

Un piano nello spazio ha la forma cartesiana $ax + by + cz + d = 0$, dove i coefficienti a, b e c sono le componenti di un vettore perpendicolare al piano, ovvero il vettore normale al piano.

$$\vec{n} = (a; b; c) \tag{13.1}$$

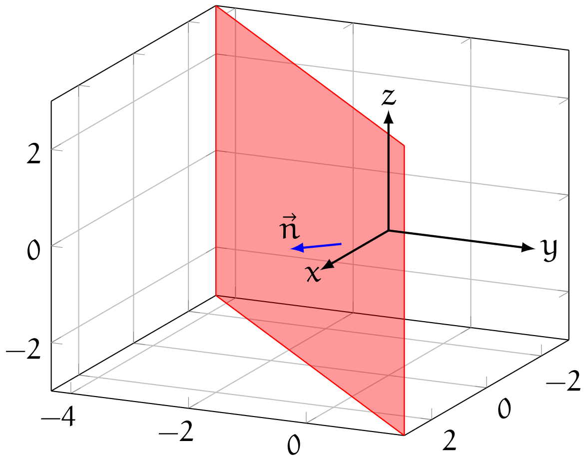
Esercizio 71 *Trova il vettore normale al piano di equazione* $3x - 3y + 7z + 4 = 0$.

Immediatamente possiamo scrivere $\vec{n} = (3; -3; 7)$.



Esercizio 72 *Trova il vettore normale al piano di equazione* $3x - 3y + 4 = 0$.

In questo caso manca il coefficiente c: questo significa che il piano è parallelo all'asse z. Attribuiamo alla terza componente il valore nullo: il vettore normale al piano è perpendicolare all'asse z e quindi non ha componenti lungo quell'asse.
Scriviamo quindi $\vec{n} = (3; -3; 0)$.



13.3 Posizione reciproca di due piani

Abbiamo due piani di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e $a^{'}x + b^{'}y + c^{'}z + d^{'} = 0$. I due piani possono essere: *paralleli e distinti, paralleli e coincidenti, incidenti* (secondo una retta).

I coefficienti a, b e c dell'equazione cartesiana sono le componenti di un vettore perpendicolare al piano, ovvero il vettore normale al piano. Se i vettori normali ai due piani sono paralleli i piani sono paralleli; altrimenti sono incidenti.

Detto altrimenti:

$$\frac{a}{a^{'}} = \frac{b}{b^{'}} = \frac{c}{c^{'}} = \frac{d}{d^{'}} \quad \text{piani coincidenti} \tag{13.2}$$

$$\frac{a}{a^{'}} = \frac{b}{b^{'}} = \frac{c}{c^{'}} \neq \frac{d}{d^{'}} \quad \text{piani paralleli distinti} \tag{13.3}$$

$$\text{altrimenti piani incidenti} \quad \frac{a}{a^{'}} \neq \frac{b}{b^{'}} \quad \text{o} \quad \frac{b}{b^{'}} \neq \frac{c}{c^{'}} \quad \text{o} \quad \frac{a}{a^{'}} \neq \frac{c}{c^{'}} \tag{13.4}$$

Inoltre, se tutti i parametri dei due piani sono proporzionali le due equazioni rappresentano lo stesso piano: la forma cartesiana di un piano individua un piano a meno di una costante di proporzionalità.

Ricordiamoci che i vettori sono paralleli anche quando una stessa componente è nulla in entrambe i vettori e le altre componenti sono proporzionali. Un caso particolare si ha quando i piani sono paralleli a un asse: in quel caso il coefficiente della variabile relativa all'asse è nullo. Se entrambe i piani sono paralleli a un asse allora nelle relazioni precedenti comparirà uno zero su zero: quali che siano i rapporti relativi alle altre direzioni (se uguali tra di loro) allora i piani sono paralleli.

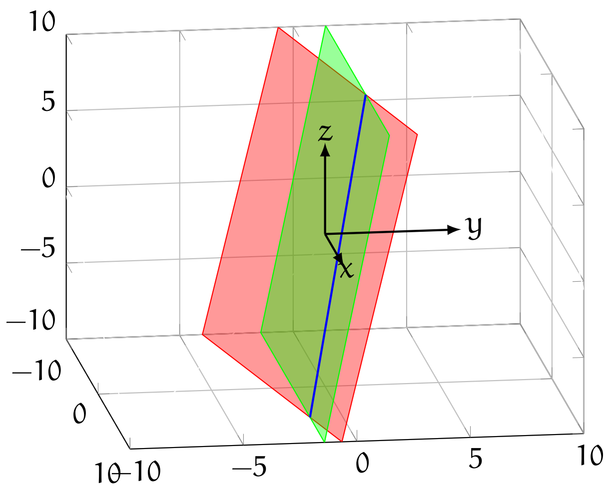
Esercizio 73 *Trova la posizione reciproca dei piani di equazione* $x - 6y + z - 4 = 0$ *e* $7y - z = 0$.

Mettiamo in relazione i coefficienti dei due piani.

$$\frac{1}{0} \neq \frac{-6}{7} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-4}{0} \tag{13.5}$$

Di conseguenza i piani sono distinti ed incidenti.

Se rappresentassimo graficamente i due piani (come fatto qui di seguito) sembrerebbero quasi paralleli; il metodo puramente algebrico ci permette di identificare la posizione reciproca molto più facilmente.



Esercizio 74 *Trova la posizione reciproca dei piani di equazione* $6y + z - 4 = 0$ *e* $12y + 2z = 0$.

Mettiamo in relazione i coefficienti dei due piani.

$$\frac{0}{0} \neq \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \neq \frac{-4}{0} \tag{13.6}$$

Il primo rapporto, pur non essendo uguale ai successivi due, significa che entrambi i piani sono paralleli a uno stesso asse: l'asse x. Gli altri due rapporti sono uguali tra loro e l'ultimo è diverso, quindi i piani sono paralleli e distinti.

13.4 Piano passante per un punto e di vettore normale dato

Il piano passante per un punto $P(x_0; y_0; z_0)$ di vettore normale $\vec{n} = (a; b; c)$ ha equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{13.7}$$

Esercizio 75 *Trova il piano di direzione* $\vec{n} = (3; -1; 0)$ *e passante per il punto* $P(4; -1; 2)$.

Scriviamo immediatamente:

$$\begin{aligned} &3(x - 4) - 1(y - (-1)) + 0(z - 2) = 0 \\ &3x - 12 - y - 1 = 0 \\ &3x - y - 13 = 0 \end{aligned} \tag{13.8}$$

13.5 Piano per tre punti

Per tre punti non allineati dello spazio passa un solo piano.

L'equazione cartesiana di un piano nello spazio $ax + by + cz + d = 0$ dipende da quattro parametri. Questi parametri sono definiti a meno di una costante di proporzionalità: questo vuol dire che un parametro può avere un valore qualsiasi (diverso da zero) e gli altri devono essere ad esso proporzionali. In pratica ci sono solo tre parametri indipendenti.

Per determinare i tre parametri indipendenti basta avere un sistema con tre equazioni indipendenti, le equazioni che si ottengono imponendo il passaggio del piano per i tre punti.

Oppure, se abbiamo tre punti $1, 2, 3$ possiamo ricavare l'equazione del piano direttamente dalla seguente equazione:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{13.9}$$

Esercizio 76 *Trova il piano passante per i punti* $A(6; 2; -3)$; $B(1; -2; 0)$; $C(4; 2; -1)$.

Sostituiamo le coordinate dei tre punti nell'equazione del piano $ax + by + cz + d = 0$.

$$\begin{cases} 6a + 2b - 3c + d = 0 \\ a - 2b + d = 0 \\ 4a + 2b - c + d = 0 \end{cases} \tag{13.10}$$

Risolviamo il sistema lineare ottenuto con il metodo di sostituzione, mettendo evidenza a nella seconda equazione e sostituendola nelle altre due.

$$\begin{cases} 6(2b - d) + 2b - 3c + d = 0 \\ a = 2b - d \\ 4(2b - d) + 2b - c + d = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 12b - 6d + 2b - 3c + d = 0 \\ 8b - 4d + 2b - c + d = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 14b - 5d - 3c = 0 \\ 10b - 3d - c = 0 \end{cases} \tag{13.11}$$

Poi mettiamo in evidenza c nelle seconda rimasta.

$$\begin{cases} c = 10b - 3d \\ 14b - 5d - 3(10b - 3d) = 0 \end{cases} ; \quad 14b - 5d - 30b + 9d = 0 \tag{13.12}$$
$$-16b + 4d = 0 \quad ; \quad 4d = 16b \quad ; \quad d = 4b$$

Tornando a ritroso per a e per c.

$$a = 2b - d \quad ; \quad a = 2b - 4b = -2b \tag{13.13}$$

$$c = 10b - 3d \quad ; \quad c = 10b - 3(4b) = 10b - 12b = -2b \tag{13.14}$$

A questo punto abbiamo espresso tutti i coefficienti in funzione di uno di essi (la b).
Poiché l'equazione cartesiana di un piano è espressa a meno di una costante di proporzionalità, possiamo attribuire a un parametro il valore che vogliamo e agli altri un valore proporzionale a quello. Poniamo per semplicità $b = 1$ e calcoliamo a cascata il valore degli altri parametri.

$$\begin{cases} b = 1 \\ d = 4b = 4 \\ c = -2b = -2 \\ a = -2b = -2 \end{cases} \tag{13.15}$$

Infine l'equazione del piano è: $-2x + y - 2z + 4 = 0$.

Si usa attribuire al primo coefficiente il segno positivo, ma non è certo sbagliato lasciare il meno.

Oppure

Utilizziamo la formula che esprime il piano come determinante

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-2 & z-(-3) \\ 1-6 & -2-2 & 0-(-3) \\ 4-6 & 2-2 & -1-(-3) \end{vmatrix} = 0 \tag{13.16}$$

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-2 & z+3 \\ -5 & -4 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-6)[-4(2)-0(3)] - (y-2)[-5(2)-(-2)(3)] + (z+3)[-5(0)-(-2)(-4)] = 0$$

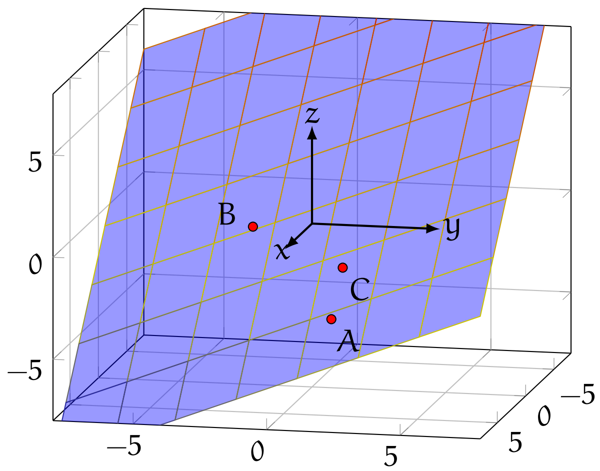
$$(x-6)[-8] - (y-2)[-4] + (z+3)[-8] = 0$$

$$-8x + 48 + 4y - 8 - 8z - 24 = 0$$

$$-8x + 4y - 8z + 16 = 0$$

$$-2x + y - 2z + 4 = 0$$

La preferenza per l'uno o l'altro metodo è essenzialmente personale. Il secondo metodo è riportato soprattutto nei testi universitari.



13.6 Verificare se un punto appartiene a un piano o a una retta

Se due figure hanno dei punti in comune il sistema con le loro equazioni deve avere una o più soluzioni. Se un punto appartiene a un piano o a una retta il sistema ottenuto con il punto e il piano o la retta deve avere un'unica soluzione.

In pratica basta sostituire le coordinate del punto nell'equazione del piano o retta e verificare se c'è una sola soluzione.

Esercizio 77 *Verifica se il punto* $P(3;4;-5)$ *appartiene al piano di equazione* $7x - y + 2 = 0$

Sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del piano abbiamo:

$$7 \cdot 3 - 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-5) + 2 = 21 - 4 + 2 = 19 \neq 0 \tag{13.17}$$

L'equazione non è soddisfatta: il punto non appartiene al piano.

Esercizio 78 *Verifica se il punto* $P(-1;-6;2)$ *appartiene alla retta di equazione* $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2t \\ z = -7 + 3t \end{cases}$.

Sostituiamo le coordinate del punto nell'equazione della retta: tutte e tre le equazioni devono essere soddisfatte.

$$\begin{cases} -1 = 2 - t \\ -6 = -2t \\ 2 = -7 + 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 3 \\ -6 = -2 \cdot 3 \\ 2 = -7 + 3 \cdot 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 3 \\ -6 = -6 \\ 2 = 2 \end{cases} \tag{13.18}$$

Il punto appartiene alla retta.

13.7 Piano parallelo a un piano e passante per un punto

Due piani paralleli appartengono a un fascio di piani improprio della forma $ax + by + cz + k = 0$. Il parametro k può assumere qualsiasi valore e al suo variare individua tutti i piani del fascio. Se il piano dato è $ax + by + cz + d = 0$ basta scrivere il fascio associato $ax + by + cz + k = 0$, imporre il passaggio del fascio per il punto P e infine trovare il valore di k associato.

Esercizio 79 *Trova il piano parallelo al piano di equazione* $x - 2y + 3z + 1 = 0$ *e passante per il punto* $P(2;3;-1)$.

Il piano incognito appartiene al fascio improprio di equazione $x - 2y + 3z + k = 0$.
Imponendo il passaggio per il punto P otteniamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + k &= 0 \\ 2 - 6 - 3 + k &= 0 \\ k &= 7 \end{aligned} \tag{13.19}$$

Quindi il piano cercato è $x - 2y + 3z + 7 = 0$.

13.8 Piano perpendicolare a un piano e passante per due punti

Abbiamo l'equazione cartesiana di un piano $a^{'}x + b^{'}y + c^{'}z + d^{'} = 0$ e le coordinate di due punti $A(x_A; y_A; z_A)$ e $B(x_B; y_B; z_B)$.

L'equazione cartesiana di un piano $ax+by+cz+d = 0$ dipende da tre parametri indipendenti. Per determinare questi tre parametri abbiamo bisogno di tre condizioni. La prima condizione è data dalla condizione di perpendicolarità tra il vettore direzione del piano dato $\vec{n^{'}} = (a^{'}; b^{'}; c^{'})$ e il vettore direzione del piano incognito $\vec{n} = (a; b; c)$. La seconda e la terza condizione sono date dal passaggio del piano per il punto A e B.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{n^{'}} = aa^{'} + bb^{'} + cc^{'} = 0 \\ ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\ ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \end{cases} \tag{13.20}$$

Esercizio 80 *Trova il piano perpendicolare al piano di equazione* $3x - y - z + 2 = 0$ *e passante per i punti* $A(1; -4; 3)$ *e* $B(2; -1; 2)$.

Il piano dato ha come vettore normale $\vec{n^{'}} = (3; -1; -1)$; quello incognito il vettore $\vec{n} = (a; b; c)$. Imponiamo la perpendicolarità del piano incognito col piano dato e il passaggio per i punti A e B.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{n^{'}} = 3a - 1b - 1c = 0 \\ a - 4b + 3c + d = 0 \\ 2a - b + 2c + d = 0 \end{cases} \tag{13.21}$$

Usiamo il metodo di sostituzione per risolvere il sistema. Mettiamo in evidenza la c nella prima relazione e sostituiamola nelle altre.

$$\begin{cases} c = 3a - b \\ a - 4b + 3(3a - b) + d = 0 \\ 2a - b + 2(3a - b) + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - 4b + 9a - 3b + d = 0 \\ 2a - b + 6a - 2b + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10a - 7b + d = 0 \\ 8a - 3b + d = 0 \end{cases} \tag{13.22}$$

Mettiamo in evidenza d nella prima e sostituiamola nella seconda.

$$\begin{cases} d = -10a + 7b \\ 8a - 3b - 10a + 7b = 0 \end{cases} \qquad -2a + 4b = 0 \quad 2a = 4b \quad a = 2b \tag{13.23}$$

A questo punto abbiamo espresso tutti i coefficienti in funzione di uno di essi (la b). Poiché l'equazione cartesiana di un piano è espressa a meno di una costante di proporzionalità, possiamo attribuire a un parametro il valore che vogliamo e agli altri un valore proporzionale. Poniamo per semplicità $b = 1$ e calcoliamo a cascata il valore degli altri parametri.

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = 2b = 2 \\ c = 3a - b = 6 - 1 = 5 \\ d = -10a + 7b = -20 + 7 = -13 \end{cases} \tag{13.24}$$

Infine l'equazione del piano è: $2x + y + 5z - 13 = 0$.

13.9 Piano perpendicolare a due piani e passante per un punto

L'equazione cartesiana di un piano $ax + by + cz + d = 0$ dipende da tre parametri indipendenti. Per determinare questi tre parametri abbiamo bisogno di tre condizioni. La prima e seconda condizione è data dalla condizione di perpendicolarità tra il vettore direzione dei due piani dati $\vec{n'} = (a'; b'; c')$ e $\vec{n''} = (a''; b''; c'')$ con il vettore direzione del piano incognito $\vec{n} = (a; b; c)$. La terza condizione é data dal passaggio del piano per il punto A.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{n'} = aa' + bb' + cc' = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{n''} = aa'' + bb'' + cc'' = 0 \\ ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \end{cases} \tag{13.25}$$

Esercizio 81 *Trova il piano perpendicolare ai piani di equazione* $y - 2z - 1 = 0$ *e* $x + 4y - 3 = 0$ *e passante per il punto* $P(-3; -1; 4)$.

I vettori direzione dei due piani dati sono rispettivamente $\vec{n'} = (0; 1; -2)$ e $\vec{n''} = (1; 4; 0)$. Imponiamo la condizione di perpendicolarità del vettore $\vec{n} = (a; b; c)$ del piano da trovare con i due vettori e il passaggio del piano incognito $ax + by + cz + d = 0$ per il punto P.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0a + 1b - 2c = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{n''} = 1a + 4b + 0c = 0 \\ -3a - b + 4c + d = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} b - 2c = 0 \\ a + 4b = 0 \\ -3a - b + 4c + d = 0 \end{cases} \tag{13.26}$$

Usiamo il metodo di sostituzione per risolvere il sistema. Mettiamo in evidenza la b nella prima relazione e a nella seconda e sostituiamole nelle altre.

$$\begin{cases} b = 2c \\ a = -4b = -8c \\ -3(-8c) - (2c) + 4c + d = 0 \end{cases} \qquad 24c - 2c + 4c + d = 0 \quad d = -26c \tag{13.27}$$

A questo punto abbiamo espresso tutti i coefficienti in funzione di uno di essi (la c). Poiché l'equazione cartesiana di un piano è espressa a meno di una costante di proporzionalità, possiamo attribuire a un parametro il valore che vogliamo e agli altri un valore proporzionale. Poniamo per semplicità $c = 1$ e calcoliamo a cascata il valore degli altri parametri.

$$\begin{cases} c = 1 \\ a = -8c = -8 \\ b = 2c = 2 \\ d = -26c = -26 \end{cases} \tag{13.28}$$

Infine l'equazione del piano è: $-8x + 2y + z - 26 = 0$.

13.10 Piano parallelo a due rette e passante per un punto

Abbiamo l'equazione parametrica di due rette $\begin{cases} x = x_1 + tl \\ y = y_1 + tm \\ z = z_1 + tn \end{cases}$ e $\begin{cases} x = x_2 + kl^{'} \\ y = y_2 + km^{'} \\ z = z_2 + kn^{'} \end{cases}$
e le coordinate di un punto $A(x_A; y_A; z_A)$.

L'equazione cartesiana di un piano $ax+by+cz+d = 0$ dipende da tre parametri indipendenti. Per determinare questi tre parametri abbiamo bisogno di tre condizioni. Sappiamo che un piano è parallelo a una retta se il suo vettore direzione è perpendicolare al vettore della retta. Allora la prima e la seconda condizione sono date dalla condizione di perpendicolarità tra il vettore direzione delle due rette $\vec{v} = (l; m; n)$ e $\vec{v}^{'} = (l^{'}; m^{'}; n^{'})$ e il vettore direzione del piano $\vec{n} = (a; b; c)$. La terza condizione é data dal passaggio del piano per il punto A.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{v} = al + bm + cn = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v}^{'} = al^{'} + bm^{'} + cn^{'} = 0 \\ ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \end{cases} \tag{13.29}$$

Esercizio 82 *Trova il piano parallelo alle rette di equazione* $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 2 \end{cases}$ *e* $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$
e passante per il punto $P(2; -3; 1)$.

Per trovare il piano indicato dobbiamo conoscere i vettori direzione delle due rette: mentre nella prima retta il vettore direzione si ricava immediatamente dai coefficienti del parametro t, per l'altra retta dobbiamo prima trasformarla in forma parametrica. Per trasformarla attribuiamo a nostro arbitrio alla variabile x il parametro k (deve formalmente essere distinto da quello dell'altra retta) e ricaviamo l'espressione delle altre coordinate in funzione dello stesso parametro.

$$\begin{cases} x = k \\ y = -x + 3 = -k + 3 \\ 3z = -2x = -2k \quad ; \quad z = -\dfrac{2}{3}k \end{cases} \tag{13.30}$$

Per cui i vettori direzione delle due rette sono rispettivamente $\vec{v} = (3; 4; 0)$ e $\vec{w} = \left(1; -1; -\dfrac{2}{3}\right)$.
Per semplificare i calcoli successivi moltiplichiamo il vettore $\vec{w}$ per 3, ottenendo un vettore proporzionale e quindi equivalente, ma eliminando la frazione: quindi $\vec{w} = (3; -3; -2)$.
A questo punto possiamo costruire un sistema di tre equazioni, imponendo la perpendicolarità del vettore direzione $\vec{n} = (a; b; c)$ con i due vettori e il passaggio del piano $ax + by + cz + d = 0$ per il punto.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{v} = 3a + 4b + 0c = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{w} = 3a - 3b - 2c = 0 \\ 2a - 3b + c + d = 0 \end{cases} \tag{13.31}$$

Usiamo il metodo di sostituzione per risolvere il sistema. Mettiamo in evidenza la a nella prima relazione e sostituiamola nelle altre.

$$\begin{cases} 3a = -4b \quad ; \quad a = -\dfrac{4}{3}b \\ 3\left(-\dfrac{4}{3}b\right) - 3b - 2c = 0 \\ 2\left(-\dfrac{4}{3}b\right) - 3b + c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4b - 3b - 2c = 0 \\ -\dfrac{8}{3}b - 3b + c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -7b - 2c = 0 \\ -\dfrac{17}{3}b + c + d = 0 \end{cases} \tag{13.32}$$

Mettiamo in evidenza c nella prima e sostituiamola nell'altra.

$$\begin{cases} c = -\dfrac{7}{2}b \\ -\dfrac{17}{3}b - \dfrac{7}{2}b + d = 0 \end{cases} \qquad \frac{-34b - 21b}{6} + d = 0 \qquad d = -\frac{55}{6}b \tag{13.33}$$

A questo punto, in ultima analisi, abbiamo espresso tutti i coefficienti in funzione di uno di essi (la b). Poiché l'equazione cartesiana di un piano è espressa a meno di una costante di proporzionalità, possiamo attribuire a un parametro il valore che vogliamo e agli altri un valore proporzionale. Poniamo per semplicità $b = 1$ e calcoliamo a cascata il valore degli altri parametri.

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = -\dfrac{4}{3}b = -\dfrac{4}{3} \\ c = -\dfrac{7}{2}b = -\dfrac{7}{2} \\ d = -\dfrac{55}{6}b = -\dfrac{55}{6} \end{cases} \tag{13.34}$$

Infine l'equazione del piano è: $-\dfrac{4}{3}x + y - \dfrac{7}{2}z - \dfrac{55}{6} = 0$.

L'equazione così ottenuta è formalmente ineccepibile, ma ai più piace non avere frazioni nei coefficienti e con il coefficiente della x positivo. Possiamo moltiplicare tutto per il m.c.m. dei denominatori cambiato di segno (-6), ottenendo $8x - 6y + 21z + 55 = 0$.

13.11 Piano contenente una retta e passante per un punto

Se un piano α contiene una retta allora appartiene anche al fascio di piani individuati dalla retta. Il fascio può essere scritto come combinazione lineare di due piani la cui intersezione individua la retta. Il passaggio del fascio per il punto dato individua il particolare piano del fascio che soddisfa tutte le condizioni.

Esercizio 83 *Trova il piano passante per il punto* $P(2; -1; 1)$ *e contenente la retta* $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3 \\ z = -2t \end{cases}$

Scriviamo il piano nella forma cartesiana ovvero come intersezione di piani, mettendo in evidenza il parametro t nell'equazione e uguagliando i rapporti ottenuti.

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{z}{-2} \quad ; \quad y = 3 \tag{13.35}$$

Nella coordinata y non compare il parametro; la relazione rimane così da sola.
Riscriviamo la prima relazione in forma normale.

$$\begin{aligned} -2(x-2) &= z \cdot 1 \\ -2x+4 &= z \\ 2x-4+z &= 0 \end{aligned} \tag{13.36}$$

La retta infine ha equazione cartesiana:

$$\begin{cases} 2x+z-4=0 \\ y-3=0 \end{cases} \tag{13.37}$$

Costruiamo un fascio di piani con le due equazioni di piano che costituiscono l'equazione della retta.

$$2x+z-4+h(y-3)=0 \tag{13.38}$$

Imponiamo il passaggio per il punto P.

$$\begin{aligned} 2\cdot 2+1-4+h(-1-3) &= 0 \\ 4+1-4-4h &= 0 \\ 4h &= 1 \\ h &= \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{13.39}$$

Infine il piano cercato ha equazione:

$$\begin{aligned} 2x+z-4+\frac{1}{4}(y-3) &= 0 \\ 8x+4z-16+y-3 &= 0 \\ 8x+y+4z-19 &= 0 \end{aligned} \tag{13.40}$$

13.12 Distanza di un punto da un piano

La distanza tra un punto $P(x_0; y_0; z_0)$ e un piano α di equazione $ax+by+cz+k=0$ si trova direttamente con la seguente formula:

$$d_{P\alpha} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{13.41}$$

Esercizio 84 *Trova la distanza tra il piano di equazione* $6x-5y+3=0$ *e il punto* $P(7;-1;-4)$.

Applichiamo immediatamente la formula:

$$d_{P\alpha} = \frac{|6\cdot 7-5(-1)+0\cdot(-4)+3|}{\sqrt{6^2+(-5)^2+0^2}} = \frac{|42+5+3|}{\sqrt{36+25}} = \frac{50}{\sqrt{61}} = \frac{50\sqrt{61}}{61} \tag{13.42}$$

13.13 Distanza di una retta da un piano

La distanza tra una retta ed un piano (ad essa parallelo) è la distanza tra un punto qualsiasi della retta e il piano. Per trovare un punto qualsiasi della retta attribuiamo un valore qualsiasi al parametro della retta. Dopodiché applichiamo la formula della distanza di un punto da un piano.

$$d_{P\alpha} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{13.43}$$

Esercizio 85 *Trova la distanza tra il piano di equazione* $x - 5y + 7z - 1 = 0$ *e la retta* $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Il vettore direzione della retta è $\vec{v}(1; 3; 2)$; quello del piano è $\vec{n} = (1; -5; 7)$. Se il piano e la retta sono paralleli i loro vettori direzione sono perpendicolari e quindi il loro prodotto scalare vale zero.

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) + 2 \cdot 7 = 1 - 15 + 14 = 0 \tag{13.44}$$

Abbiamo verificato che la retta è parallela al piano. Ricaviamo un punto qualsiasi della retta attribuendo un valore a piacimento al parametro ($t = 0$): il punto ha coordinate $P(0; 2; 1)$.
Infine la distanza tra punto e piano è:

$$d_{P\alpha} = \frac{|1 \cdot 0 - 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 7^2}} = \frac{|-10 + 7 - 1|}{\sqrt{1 + 25 + 49}} = \frac{4}{\sqrt{75}} = \frac{4}{5\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{15} \tag{13.45}$$

13.14 Distanza tra due piani paralleli

La distanza tra due piani paralleli è la distanza tra un punto qualsiasi di un piano e l'altro piano. Per trovare un punto qualsiasi del piano attribuiamo un valore qualsiasi ad ogni variabile presente nella sua equazione, tranne una, che invece ricaviamo dal valore delle altre. Se una coordinata non è presente possiamo attribuirle qualsiasi valore.

Esercizio 86 *Trova la distanza tra i piani di equazione* $x + 5y + 2z - 4 = 0$ *e* $x + 5y + 2z - 3 = 0$.

Che i piani siano paralleli lo vediamo dal fatto che nelle due equazioni cambia solo il termine noto. Per individuare un punto sul primo piano attribuiamo un valore qualsiasi a due delle tre coordinate presenti e ricaviamo la terza.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2z - 4 = 0 \quad ; \quad 2z = 4 \quad ; \quad z = 2 \end{cases} \tag{13.46}$$

Il punto ha coordinate $P(0; 0; 2)$. Applichiamo immediatamente la formula per la distanza tra questo punto del primo piano e il secondo piano.

$$d_{P\alpha} = \frac{|1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}} = \frac{|4 - 3|}{\sqrt{1 + 25 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{30}} = 30\sqrt{30} \tag{13.47}$$

14 Retta

14.1 Coefficienti direttori di una retta

I coefficienti direttori di una retta sono le componenti di un vettore parallelo alla retta stessa. Queste componenti, se la retta è espressa in forma parametrica, sono i coefficienti del parametro che compare nelle tre coordinate.

Esercizio 87 *Scrivi i coefficienti direttori della retta di equazione* $\begin{cases} x = 7 \\ y = -6 + 8t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$.

I coefficienti sono i numeri che moltiplicano il parametro della retta; scriviamo zero per le componenti in cui non compare il parametro.

$$\vec{v} = (0; 8; -2) \tag{14.1}$$

14.2 Retta passante per un punto e parallela a un vettore

Abbiamo un punto dello spazio $P_0(x_0; y_0; z_0)$ e un vettore $\vec{v} = (l; m; n)$.

La retta può essere considerata come l'insieme dei punti $P(x, y, z)$ di un vettore $\overrightarrow{P_0P}$ proporzionale al vettore $\vec{v}$. Il parametro t è la costante di proporzionalità tra i due vettori.

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} \qquad \begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \tag{14.2}$$

Esercizio 88 *Trova l'equazione della retta passante per il punto* $P(5; -6; -1)$ *e parallela al vettore* $\vec{v} = (1; 3; -2)$.

Applicando l'opportuna formula possiamo scrivere immediatamente:

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -6 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \tag{14.3}$$

14.3 Retta passante per due punti

La retta passante per due punti A e B è l'analogo di una retta passante per un punto e parallela a un vettore, in cui il vettore è il vettore $\overrightarrow{AB}$.

Esercizio 89 *Trova la retta passante per i punti* $A(3;1;-1)$ *e* $B(8;-2;5)$.

Troviamo le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$: è indifferente scrivere il vettore $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{BA}$ perché sono paralleli.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (8-3; -2-1; 5-(-1)) = (5; -3; 6) \tag{14.4}$$

Adesso possiamo scrivere l'equazione della retta passante per un punto e parallela a un vettore. Come punto possiamo scegliere indifferentemente il punto A o B: scegliamo A. L'equazione della retta non è quindi univocamente determinata.

$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 1 - 3t \\ z = -1 + 6t \end{cases} \tag{14.5}$$

14.4 Trasformare l'equazione parametrica di una retta in quella cartesiana (e viceversa)

Se abbiamo l'equazione di una retta in forma parametrica $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$ possiamo trasformarla in forma cartesiana mettendo in evidenza il parametro t e eguagliando le espressioni ottenute.

$$\begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases} \qquad (t =)\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{14.6}$$

Se abbiamo la forma cartesiana, solitamente espressa come intersezione di due piani, attribuiamo a una variabile il ruolo di parametro, e ricaviamo il valore delle altre variabili in funzione di esso.

Esercizio 90 *Scrivi in forma cartesiana l'equazione della seguente retta* $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2 \\ z = 6t \end{cases}$.

Per scrivere la forma cartesiana della retta mettiamo in evidenza il parametro nelle tre equazioni del sistema dato (quando possibile), eguagliando le espressioni ottenute e lasciando scritte come sono le altre espressioni.

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{-3} = t \\ y = 2 \\ \dfrac{z}{6} = t \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{z}{6} \\ y = 2 \end{cases} \tag{14.7}$$

Possiamo scrivere più elegantemente la prima equazione ottenuta portando tutti i termini a primo membro ed eliminando i denominatori.

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{z}{6} \quad ; \quad 6(x-2)=-3z \quad 6x-12+3z=0 \quad ; \quad 6x+3z-12=0 \tag{14.8}$$

L'equazione della retta diviene infine:

$$\begin{cases} 6x+3z-12=0 \\ y=2 \end{cases} \tag{14.9}$$

Esercizio 91 *Scrivi in forma cartesiana l'equazione della seguente retta* $\begin{cases} x=2 \\ y=2-4t \\ z=3 \end{cases}$.

Se procediamo come nell'esercizio precedente ci ritroviamo comunque con tre equazioni distinte, quando invece l'equazione cartesiana di una retta è data dall'intersezione di soli due piani e quindi con un sistema di due equazioni. In pratica la prima e terza equazione sono l'equazione di due piani. La seconda equazione ci dice invece che la variabile y può assumere qualsiasi valore.
Allora possiamo scrivere l'equazione della retta come:

$$\begin{cases} x=2 \\ z=3 \end{cases} \tag{14.10}$$

Il fatto che nel sistema la variabile y non compaia ci dice implicitamente che può assumere qualsiasi valore.

Esercizio 92 *Scrivi in forma parametrica l'equazione della seguente retta* $\begin{cases} 3y-4z+1=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$.

Attribuiamo a nostro piacimento a una delle variabili il valore del parametro e alle altre variabili il valore che assumono di conseguenza.

$$\begin{cases} y=t \\ 3t-4z+1=0 \quad ; \quad 4z=3t+1 \quad ; \quad z=\frac{3}{4}t+\frac{1}{4} \\ x-2t+z=0 \quad ; \quad x=2t-z=2t-\left(\frac{3}{4}t+\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{4}t-\frac{3}{4}t-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}t-\frac{1}{4} \end{cases} \tag{14.11}$$

Se ci sembra più elegante possiamo usare come vettore direzione della retta quello ottenuto, ma moltiplicato per quattro, in modo da non avere le frazioni come parametri direttori.

$$\begin{cases} x=5t-\frac{1}{4} \\ y=t \\ z=3t+\frac{1}{4} \end{cases} \tag{14.12}$$

14.5 Retta perpendicolare a un piano e passante per un punto

Abbiamo l'equazione cartesiana di un piano $ax + by + cz + d = 0$ e le coordinate di un punto $A(x_A; y_A; z_A)$.

Il vettore direzione $\vec{n} = (a; b; c)$ del piano è un vettore perpendicolare al piano stesso.

La retta cercata è la retta di vettore $\vec{n} = (a; b; c)$ passante per il punto A.

Esercizio 93 *Trova la retta perpendicolare al piano di equazione* $6x - 4y + z - 3 = 0$ *e passante per il punto* $P(1; 5; -3)$.

Il vettore direzione del piano è $\vec{n} = (6; -4; 1)$. Quindi la retta ha equazione:

$$\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 5 - 4t \\ z = -3 + t \end{cases} \tag{14.13}$$

14.6 Posizione reciproca di due rette

Due rette nel piano possono essere: parallele distinte, parallele coincidenti, non parallele e incidenti o non parallele e non incidenti ovvero sghembe. Per controllare la loro posizione reciproca prima verifichiamo se sono parallele e poi se hanno punti in comune.

É preferibile porre le rette nella forma esplicita.

Esercizio 94 *Trova la posizione reciproca delle rette di equazione* $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 - 4t \\ z = 6t \end{cases}$ *e* $\begin{cases} x = 2k \\ y = 1 + 4k \\ z = -3 \end{cases}$.

Se prendiamo i coefficienti direttori delle due rette vediamo subito che non sono parallele, perché le componenti non sono proporzionali.

$$\vec{v} = (0; -4; 6) \quad ; \quad \vec{w} = (2; 4; 0) \tag{14.14}$$

$$\frac{0}{2} \neq \frac{-4}{4} \neq \frac{6}{0} \tag{14.15}$$

Per verificare se sono o no incidenti mettiamo a sistema le due equazioni, eguagliando le coordinate. Se le rette sono incidenti il sistema deve avere un'unica soluzione.

$$\begin{cases} 2 = 2k \\ 2 - 4t = 1 + 4k \\ 6t = -3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} k = 1 \\ 2 - 4t = 1 + 4k \\ t = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{14.16}$$

$$2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4 \cdot 1 \quad ; \quad 2 + 2 = 1 + 4 \quad ; \quad 4 \neq 5 \tag{14.17}$$

La seconda equazione non è soddisfatta: le rette non sono incidenti e quindi sono *sghembe*.

14.7 Verificare se una retta appartiene a un piano

Se due figure hanno dei punti in comune il sistema con le loro equazioni deve avere una o più soluzioni. Se una retta appartiene a un piano il sistema ottenuto con la retta e il piano deve avere infinite soluzioni, ovvero dev'essere indeterminato.

In pratica basta sostituire le coordinate della retta nell'equazione del piano e verificare se c'è una sola soluzione, infinite o nessuna.

Esercizio 95 *Verifica se la retta* $\begin{cases} x = -2t \\ y = 2 + t \\ z = 3t \end{cases}$ *appartiene al piano* $4x + 5y + z - 1 = 0$.

Sostituiamo le coordinate della retta nell'equazione del piano.

$$\begin{aligned} 4(-2t) + 5(2+t) + 1(3t) - 1 &= 0 \\ -8t + 10 + 5t + 3t - 1 &= 0 \\ 9 &\neq 0 \end{aligned} \tag{14.18}$$

L'equazione è impossibile. La retta non appartiene al piano. Deve essere ad esso parallela. Infatti i vettori direzione della retta e del piano devono essere perpendicolari tra loro e il loro prodotto scalare valere zero:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (-2; 1; 3) \cdot (4; 5; 1) = -2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = -8 + 5 + 3 = 0 \tag{14.19}$$

Esercizio 96 *Verifica se la retta* $\begin{cases} x = -2t \\ y = 2 + t \\ z = 3t \end{cases}$ *appartiene al piano* $3x - 5y + z - 1 = 0$.

Sostituiamo le coordinate della retta nell'equazione del piano.

$$\begin{aligned} 3(-2t) - 5(2+t) + 1(3t) - 1 &= 0 \\ -6t - 10 - 5t + 3t - 1 &= 0 \\ -8t &= 11 \\ t &= -\frac{11}{8} \end{aligned} \tag{14.20}$$

L'equazione ha un'unica soluzione. La retta interseca il piano in un punto.

Esercizio 97 *Verifica se la retta* $\begin{cases} x = -2t \\ y = 2 + t \\ z = 3t \end{cases}$ *appartiene al piano* $4x + 5y + z - 10 = 0$.

Sostituiamo le coordinate della retta nell'equazione del piano.

$$\begin{aligned} 4(-2t) + 5(2+t) + 1(3t) - 1 &= 0 \\ -8t + 10 + 5t + 3t - 10 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \tag{14.21}$$

L'equazione ha infinite soluzioni. La retta appartiene al piano.

14.8 Distanza di un punto da una retta

La distanza di un punto P da una retta r è la lunghezza del segmento individuato dalla perpendicolare alla retta e passante per il punto P e per il piede H della perpendicolare alla retta.

In pratica troviamo il piano α passante per il punto P e di direzione $\vec{n}$ parallela alla retta data. Intersechiamo il piano α con la retta r e troviamo il punto H. Infine la distanza tra P e H è la distanza cercata.

Esercizio 98 *Trova la distanza tra la retta* $\begin{cases} x = -2t \\ y = 2 + t \\ z = 3t \end{cases}$ *e il punto* $P(4; 2; -1)$.

Il vettore direzione della retta è $\vec{v} = (-2; 1; 3)$.
Costruiamo il piano di vettore direzione $\vec{n} = \vec{v}$ e passante per il punto P.

$$\begin{aligned} &-2(x-4) + 1(y-2) + 3(z-(-1)) = 0 \\ &-2x + 4 + y - 2 + 3z + 3 = 0 \\ &-2x + y + 3z + 5 = 0 \end{aligned} \tag{14.22}$$

Troviamo il punto H, intersezione tra il piano e la retta, ponendo a sistema l'equazione del piano con quella della retta: sostituiamo le coordinate della retta nell'equazione del piano e troviamo il valore del parametro t associato al punto H.

$$\begin{aligned} &-2(-2t) + (2+t) + 3(3t) + 5 = 0 \\ &4t + 2 + t + 9t + 5 = 0 \\ &14t + 7 = 0 \quad ; \quad t = -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{14.23}$$

Sostituiamo il valore trovato nell'equazione della retta per trovare le coordinate del punto H.

$$\begin{cases} x = -2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 \\ y = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4-1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ z = 3\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \quad ; \quad H\left(1; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) \tag{14.24}$$

Ora possiamo calcolare la distanza tra il punto P e H.

$$\begin{aligned} d_{PH} &= \sqrt{(4-1)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-1 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + \left(\frac{4-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2+3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{9 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{36+1+1}{4}} = \frac{\sqrt{38}}{2} \end{aligned} \tag{14.25}$$

14.9 Distanza tra due rette parallele

La distanza tra due rette parallele è la distanza di un punto qualsiasi di una delle due rette dall'altra.

Esercizio 99 *Trova la distanza tra le rette di equazione* $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$ *e* $\begin{cases} x = -1 - k \\ y = 3k \\ z = 4 + k \end{cases}$.

Cominciamo col trovare un punto P qualsiasi della prima retta, ponendo un valore a piacimento per il parametro t ($t = 0$).

$$P = (2 - 0; 1 + 3 \cdot 0; z = 0) = (2; 1; 0) \tag{14.26}$$

Scriviamo il piano perpendicolare alla prima retta e passante per il punto P, sapendo che il vettore direzione del piano $\vec{n}$ è uguale a quello $\vec{v}$ parallelo alla retta .

$$\vec{n} = \vec{v} = (-1; 3; 1) \tag{14.27}$$

$$\begin{aligned} &-1(x-2) + 3(y-1) + 1(z-0) = 0 \\ &-x + 2 + 3y - 3 + z = 0 \\ &-x + 3y + z - 1 = 0 \end{aligned} \tag{14.28}$$

Troviamo il punto H, intersezione tra il piano e la seconda retta, ponendo a sistema l'equazione del piano con quella della retta: sostituiamo le coordinate della retta nell'equazione del piano e troviamo il valore del parametro k associato al punto H.

$$\begin{aligned} &-(-1-k) + 3(3k) + (4+k) - 1 = 0 \\ &1 + k + 9k + 4 + k - 1 = 0 \\ &11k + 4 = 0 \\ &k = -\frac{4}{11} \end{aligned} \tag{14.29}$$

Per cui il punto H è:

$$H\left(-1 - \left(-\frac{4}{11}\right); 3 \cdot \left(-\frac{4}{11}\right); 4 - \frac{4}{11}\right) = \left(\frac{-11+4}{11}; -\frac{12}{11}; \frac{44-4}{11}\right) = \left(-\frac{7}{11}; -\frac{12}{11}; \frac{40}{11}\right) \tag{14.30}$$

Infine la distanza tra il punto P e H e quindi la distanza tra le rette vale:

$$\begin{aligned} d_{PH} &= \sqrt{\left(-\frac{7}{11} - 2\right)^2 + \left(-\frac{12}{11} - 1\right)^2 + \left(\frac{40}{11} - 0\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-7-22}{11}\right)^2 + \left(\frac{-12-11}{11}\right)^2 + \left(\frac{40}{11}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{29}{11}\right)^2 + \left(-\frac{23}{11}\right)^2 + \left(\frac{40}{11}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{841 + 529 + 1600}{121}} = \sqrt{\frac{2970}{121}} = \sqrt{\frac{270}{11}} \end{aligned} \tag{14.31}$$

14.10 Distanza tra due rette sghembe

Esiste ed è unica la retta perpendicolare a due rette sghembe. La distanza tra i punti di intersezione di questa retta con le altre due è la distanza tra le rette.

15 Sfera

15.1 Riconoscere l'equazione di una sfera

La forma normale dell'equazione di una sfera nello spazio è:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \tag{15.1}$$

In questa forma compaiono sempre i tre termini al quadrato, con lo stesso coefficiente uguale a uno. Potremmo avere comunque una sfera anche se i coefficienti fossero sempre uguali, ma diversi da uno: cambierebbe però il significato dei coefficienti a, b e c. Possono comparire i tre termini lineari: uno, due o tutti e tre. Il termine noto d vale zero se la sfera passa per l'origine degli assi; diverso da zero altrimenti.

Esercizio 100 *Riconosci quale delle seguenti equazioni è quella di una sfera (reale o immaginaria) nello spazio.*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 5y = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3 = 0 \quad ; \quad 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4y + 5 = 0$$

La prima equazione risponde ai canoni indicati nella teoria: è l'equazione di una sfera. La seconda non è l'equazione di una sfera per la presenza del termine con xy. La terza è l'equazione di una sfera, ma non in forma normale: dovremmo dividere per tre tutti gli addendi dell'equazione.

15.2 Sfera di raggio e centro dati

Per trovare l'equazione di una sfera abbiamo bisogno del centro $C(x_0; y_0; z_0)$ e del raggio r.
Immediatamente la sua equazione è data dalla seguente relazione.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{15.2}$$

Esercizio 101 *Trova l'equazione della sfera centro* $C(4; -2; -1)$ *raggio* $r = 3$.

Scriviamo immediatamente:

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 3^2 \tag{15.3}$$

Non è certo sbagliato lasciare l'equazione in questa forma, ma più spesso ci si aspetta di vedere l'equazione in forma normale.

$$\begin{aligned} &x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 - 9 = 0 \\ &x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z + 12 = 0 \end{aligned} \tag{15.4}$$

15.3 Raggio e centro di una sfera

Data la sfera in forma normale $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ con le seguenti relazioni troviamo immediatamente le coordinate del centro della sfera e il suo raggio.

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right) \tag{15.5}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d} = \sqrt{(x_c)^2 + (y_c)^2 + (z_c)^2 - d} \tag{15.6}$$

Esercizio 102 *Trova centro e raggio della sfera di equazione* $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z + 12 = 0$.

Questa è la sfera dell'esercizio precedente, quindi ci aspettiamo di riottenere i dati da cui siamo partiti prima.

$$C = \left(-\frac{(-8)}{2}; -\frac{4}{2}; -\frac{2}{2}\right) = (4; -2; -1) \tag{15.7}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 12} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (1)^2 - 12} \\ &= \sqrt{16 + 4 + 1 - 12} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned} \tag{15.8}$$

15.4 Sfera passante per un punto e di centro dato

Per trovare l'equazione di una sfera abbiamo bisogno del centro $C(x_0; y_0; z_0)$ e del raggio r.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{15.9}$$

Come raggio possiamo prendere la distanza del punto della circonferenza dal centro: $r = d_{CP}$

15.5 Sfera passante per quattro punti (non allineati)

Per quattro punti dello spazio non allineati passa una sola sfera.

L'equazione cartesiana di una sfera nello spazio $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ dipende da quattro parametri, tutti indipendenti.

Per determinare i quattro parametri basta avere un sistema con quattro equazioni indipendenti, le equazioni che si ottengono imponendo il passaggio della sfera per i quattro punti.

Esercizio 103 *Trova l'equazione della sfera passante per i punti*
$A(-2;1;1)$; $B(0;3;1)$; $C(1;2;-3)$; $D(1;0;0)$.

Sostituiamo le coordinate dei quattro punti nell'equazione della sfera $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

$$\begin{cases} (-2)^2+1^2+1^2-2a+b+c+d=0 \\ 0^2+3^2+1^2+0\cdot a+3b+c+d=0 \\ 1^2+2^2+(-3)^2+a+2b-3c+d=0 \\ 1^2+0^2+0^2+a+0\cdot b+0\cdot c+d=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 6-2a+b+c+d=0 \\ 10+3b+c+d=0 \\ 14+a+2b-3c+d=0 \\ 1+a+d=0 \end{cases} \tag{15.10}$$

Usiamo il metodo di sostituzione, mettiamo in evidenza d nell'ultima equazione e sostituiamola nelle altre.

$$\begin{cases} 6-2a+b+c-1-a=0 \\ 10+3b+c-1-a=0 \\ 14+a+2b-3c-1-a=0 \\ d=-1-a \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 5-3a+b+c=0 \\ 9+3b+c-a=0 \\ 13+2b-3c=0 \end{cases} \tag{15.11}$$

Mettiamo in evidenza c nell'ultima.

$$\begin{cases} 5-3a+b+\dfrac{13}{3}+\dfrac{2}{3}b=0 \\ 9+3b+\dfrac{13}{3}+\dfrac{2}{3}b-a=0 \\ 3c=13+2b\,;\ c=\dfrac{13}{3}+\dfrac{2}{3}b \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dfrac{28}{3}-3a+\dfrac{5}{3}b=0 \\ \dfrac{40}{3}+\dfrac{11}{3}b-a=0 \end{cases} \tag{15.12}$$

Mettiamo in evidenza a nell'ultima.

$$\begin{cases} \dfrac{28}{3}-3\left(\dfrac{40}{3}+\dfrac{11}{3}b\right)+\dfrac{5}{3}b=0 \\ a=\dfrac{40}{3}+\dfrac{11}{3}b \end{cases} \quad ; \tag{15.13}$$

$$-\frac{92}{3}-\frac{28}{3}b=0 \quad ; \quad \frac{28}{3}b=-\frac{92}{3} \quad ; \quad b=-\frac{92}{28}=-\frac{23}{7} \tag{15.14}$$

Sostituiamo a ritroso il valore ottenuto.

$$\begin{cases} b=-\dfrac{23}{7} \\ a=\dfrac{40}{3}+\dfrac{11}{3}b=\dfrac{40}{3}+\dfrac{11}{3}\cdot\left(-\dfrac{23}{7}\right)=\dfrac{40}{3}-\dfrac{253}{21}=\dfrac{9}{7} \\ c=\dfrac{13}{3}+\dfrac{2}{3}b=c=\dfrac{13}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{23}{7}\right)=\dfrac{13}{3}-\dfrac{46}{21}=\dfrac{15}{7} \\ d=-1-a=-1-\dfrac{9}{7}=-\dfrac{16}{7} \end{cases} \tag{15.15}$$

Infine l'equazione della sfera é:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{9}{7}x-\frac{23}{7}y+\frac{15}{7}z-\frac{16}{7}=0 \tag{15.16}$$

15.6 Sfera di centro e tangente a un piano dati

La sfera da trovare è quella che ha come raggio la distanza tra il centro della sfera e il piano.
Si tratta quindi di trovare la sfera di centro e raggio dati.

Esercizio 104 *Trova l'equazione della sfera di centro* $C(2;1;-5)$ *e tangente al piano* $5x-y+5=0$.

Troviamo subito la distanza tra il centro e il piano α.

$$r=d_{C\alpha}=\frac{|5\cdot 2-1\cdot 1+0\cdot(-5)+5|}{\sqrt{5^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{|10-1+5|}{\sqrt{25+1}}=\frac{14}{\sqrt{26}} \tag{15.17}$$

Quindi la sfera ha equazione:

$$\begin{aligned}
&(x-2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=\left(\frac{14}{\sqrt{26}}\right)^2\\
&x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2+10z+25=\frac{198}{26}=\frac{98}{13}\\
&x^2+y^2+z^2-4x-2y+10z+30-\frac{98}{13}=0\\
&x^2+y^2+z^2-4x-2y+10z-\frac{292}{13}=0
\end{aligned} \tag{15.18}$$

15.7 Piano tangente a una sfera in un suo punto

Il piano da trovare è quello passante per un punto (il punto P che è dato) e avente come vettore direzione $\vec{n}$ il vettore $\overrightarrow{CP}$ individuato dal punto P e dal centro C della sfera.

Esercizio 105 *Trova il piano tangente alla sfera di equazione* $x^2+y^2+z^2+8x+6y-5z-9=0$ *nel suo punto* $P(2;-1;3)$.

Il vettore direzione $\vec{n}$ perpendicolare al piano è dato dal vettore $\overrightarrow{CP}$.
Troviamo le coordinate del centro.

$$C=\left(-\frac{8}{2};-\frac{6}{2};-\frac{-(5)}{2}\right)=\left(-4;-3;\frac{5}{2}\right) \tag{15.19}$$

E poi le componenti del vettore $\vec{n}$.

$$\vec{n}=\overrightarrow{CP}=\left(2-(-4);-1-(-3);3-\frac{5}{2}\right)=\left(6;2;\frac{1}{2}\right) \tag{15.20}$$

Infine il piano (passante per il punto P) ha equazione:

$$
\begin{aligned}
&a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\
&6(x - 2) + 2(y - (-1)) + \frac{1}{2}(z - 3) = 0 \\
&6x - 12 + 2y + 2 + \frac{z}{2} - \frac{3}{2} = 0 \\
&6x + 2y + \frac{z}{2} - \frac{23}{2} = 0 \\
&12x + 4y + z - 23 = 0
\end{aligned}
\tag{15.21}
$$

15.8 Punto di tangenza tra sfera di centro dato e piano ad essa tangente

Il punto di tangenza di un piano con una sfera di cui conosciamo il centro è dato dall'intersezione tra la retta perpendicolare al piano, passante per il centro della sfera, e il piano stesso.

Esercizio 106 *Trova il punto di tangenza della sfera di centro* $C(-2; 1; 0)$ *e il piano* $3x - 2y + 4z - 1 = 0$.

Il piano dato ha direzione individuata dal vettore $\vec{n} = (3, -2, 4)$.
La retta passante per il centro della sfera e di direzione $\vec{n}$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4t \end{cases} \tag{15.22}$$

Intersechiamo questa retta col piano per trovare il valore del parametro t a cui corrisponde il punto di tangenza: sostituiamo le coordinate della retta in quelle del piano.

$$\begin{aligned} 3(-2 + 3t) - 2(1 - 2t) + 4(4t) - 1 &= 0 \\ -6 + 9t - 2 + 4t + 16t - 1 &= 0 \\ 29t &= 9 \\ t &= \frac{9}{29} \end{aligned} \tag{15.23}$$

Sostituiamo questo valore di t nella retta per trovare le coordinate del punto.

$$\begin{cases} x = -2 + 3\left(\dfrac{9}{29}\right) = -\dfrac{58}{29} + \dfrac{27}{29} = -\dfrac{31}{29} \\ y = 1 - 2\left(\dfrac{9}{29}\right) = \dfrac{29}{29} - \dfrac{18}{29} = \dfrac{11}{29} \\ z = 4\left(\dfrac{9}{29}\right) = \dfrac{36}{29} \end{cases} \tag{15.24}$$

Quindi il punto è $P\left(-\frac{31}{29}; \frac{11}{29}; \frac{36}{29}\right)$.

15.9 Posizione reciproca tra sfera e piano

Una sfera data, a seconda della distanza del suo centro C dal piano α, può essere:

- Secante: se il raggio è maggiore della distanza centro piano, $r > d_{C\alpha}$
- Tangente: se il raggio è uguale alla distanza centro piano, $r = d_{C\alpha}$
- Esterna: se il raggio è minore della distanza centro piano, $r < d_{C\alpha}$

Esercizio 107 *Trova la posizione reciproca tra la sfera* $x^2 + y^2 + z^2 + 7x + 6y - 5z + 2 = 0$ *e il piano* $7x + 8y - z - 1 = 0$.

Cerchiamo innanzi tutto il centro e raggio della sfera.

$$C = \left(-\frac{7}{2}; -\frac{6}{2}; -\frac{(-5)}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}; -3; \frac{5}{2}\right) \tag{15.25}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + (-3)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2} \\ &= \sqrt{\frac{49}{4} + 9 + \frac{25}{4} - 2} \\ &= \sqrt{\frac{49 + 36 + 25 - 8}{4}} = \sqrt{\frac{102}{4}} = \frac{\sqrt{102}}{2} \simeq 5,05 \end{aligned} \tag{15.26}$$

Invece la distanza tra centro C e piano α è:

$$\begin{aligned} d_{C\alpha} &= \frac{\left|7\left(-\frac{7}{2}\right) + 8(-3) - 1\left(\frac{5}{2}\right) - 1\right|}{\sqrt{7^2 + 8^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|-\frac{49}{2} - 24 - \frac{5}{2} - 1\right|}{\sqrt{49 + 64 + 1}} \\ &= \frac{\left|\frac{-49 - 48 - 5 - 2}{2}\right|}{\sqrt{114}} = \frac{\frac{104}{2}}{\sqrt{114}} = \frac{104\sqrt{114}}{228} = \frac{26\sqrt{114}}{57} \simeq 4,87 \end{aligned} \tag{15.27}$$

Concludendo $r > d_{C\alpha}$ quindi il piano è secante.

15.10 Raggio della circonferenza intersezione tra un piano e una sfera dati

Sia R il raggio della sfera, r quello della circonferenza e H il piede della perpendicolare al piano passante per il centro C della circonferenza.

Allora, applicando il teorema di Pitagora, possiamo scrivere che:

$$r = \sqrt{R^2 - d_{CH}^2} \tag{15.28}$$

Indice analitico