Esercizi risolti di fisica

Massimiliano Virdis

Indice

1 Introduzione

1.1 Premessa

Caro lettore,
questa raccolta di esercizi è stata scritta in primo luogo per i miei studenti. Il desiderio era quello di poter offrire una raccolta sistematica di esercizi semplici e di base. Il livello di questi esercizi va dalla prima superiore fino al primo anno di università. Ho cercato di proporre un esempio di tutte le tipologie di esercizi che normalmente propongo nelle mie lezioni a scuola. Altri sono stati proposti in corsi di fisica generale per ingegneri o medici al primo anno di università. L'esposizione è stata mantenuta volutamente prolissa sia nell'esposizione dei principi fisici sia nei passaggi matematici.

Il modo di esporre e scrivere gli esercizi che noi solitamente proponiamo a lezione può risultare impeccabile per i contenuti, ma ciononostante non adeguato per lo studente. Solitamente scriviamo alla lavagna solo i passaggi matematici e i disegni illustrativi, esponendo a voce le motivazioni fisiche e le semplificazioni matematiche più elementari. La conseguenza è che gli scritti degli studenti tendono a riportare solo quando visto alla lavagna e non tutti i passaggi logici e riferimenti fisici necessari. Inoltre c'è sempre qualche studente che incontra degli ostacoli proprio nei passaggi meno importanti e non trova un supporto sufficientemente esteso nei libri di testo. Infine la maggior parte dei libri di esercizi che ho visto o riportano innumerevoli esercizi, ma solo brevemente illustrati, o esercizi "notevoli", importanti anch'essi, ma non per chi sta cominciando lo studio.

Spero che quanto riportato in quest'opera sia se non di aiuto almeno non dannoso. Per migliorare quanto scritto e evidenziare qualsiasi errore non esitate a scrivermi.

email: prof.virdis@tiscali.it

1.2 Notazioni e precisione nei calcoli

In tutta quest'opera si è seguito il S.I., utilizzando per la sua stesura il package siunitx in Xetex.

Per quanto riguarda la precisione dei calcoli riportati si è scelto di indicare i passaggi intermedi con più precisione di quanto le usuali regole per la propagazione degli errori indicherebbero. I risultati finali sono invece riportati, preferibilmente in notazione scientifica, con un numero di cifre significative mai più basso della precisione dei dati di partenza.

Per le notazioni si è cercato di seguire le indicazioni ISO. In particolare il c della velocità della luce è scritto in diritto dal pacchetto Siunitx.

Graficamente ho cercato di distinguere:

esercizi indicati per il biennio

esercizi indicati per il triennio

1.3 Verso l'esame

Ho cominciato a scrivere qualche pagina di esercizi facendo il tutor di fisica all'università. Ho proseguito con esercizi molto elementari per gli istituti tecnici. Attualmente mi trovo ad insegnare in un liceo scientifico e soprattutto dal 2018, col nuovo esame di matematica e fisica, sia io che i miei colleghi cerchiamo sempre più di capire quale fisica possa essere utile per l'esame. Questa è l'esigenza fondamentale che oramai anima questi appunti.

1.4 Ringraziamenti

Si ringraziano coloro che hanno avuto la pazienza di leggere queste pagine e di segnalare errori di vario tipo. In particolare:

Alice Mameli, Isabella Penna, Pablo Navarro, Riccardo Cadeddu, Letizia Cardona, Bruno Nitsch, Benedetta Olla, Giorgia Deiana, Gioa Vaccargiu, Armando Galtarossa, Alessandro Cuboni, Alessandra Di Dino.

... così pochi trovano qualcosa da correggere?

1.5 Licenza e Copyright

δωρεὰν ἐλάβετε, δωρεὰν δότε (Mt. 7.8)

2 Unità di misura e conversione tra grandezze

2.1 Indicazione per la risoluzione degli esercizi

Gli esercizi ed i problemi di fisica si possono risolvere in svariati modi sia per i principi e le leggi a cui si può fare riferimento sia per il modo in cui quei principi e quelle leggi vengono esposti. La fisica consente la massima libertà. Tuttavia, come anche al di là della scienza, *"tutto è lecito, ma non tutto conviene"* e ci sono dei modi di procedere migliori di altri.

Secondo la nostra esperienza ti conviene sempre affrontare questi passi:

1. **Stabilisci a quale domanda devi rispondere:**
   prima di dare una risposta bisogna capire bene qual è la domanda.
2. **Elenca tutte le grandezze a tua disposizione:**
   spesso non riusciamo a procedere correttamente perché non abbiamo sottocchio tutti i dati che ci vengono (o non ci vengono) forniti.
3. **Fai uno schema o disegno della situazione che ti viene presentata:**
   questo non è essenziale per le domande più semplici, ma può darci la giusta visione fisica del sistema che abbiamo davanti se le situazioni sono più complesse.
4. **Stabilisci quali leggi e principi devono essere usati per trovare la risposta:**
   a volte sappiamo rispondere a questa domanda prima ancora di aver visto il problema o esercizio solamente perché si trova in un certo paragrafo del nostro libro, ma non è certo il modo corretto di procedere.
5. **Trova tutti i passaggi che devi effettuare con le grandezze a tua disposizione, senza sostituire i valori numerici:**
   sostituire da subito tutti i valori numerici può servire solo ad effettuare calcoli inutili prima di effettuare le semplificazioni o, peggio ancora, a perdere di vista la strada per trovare la risposta finale.
6. **Trasforma tutte le grandezze che effettivamente ti servono in unità di misura coerenti oppure nel S.I. :**
   i principi a cui si fa riferimento in fisica sono espressi quasi sempre nel S.I.
   In ogni caso tutte le grandezze devono essere coerenti. Ad esempio: dobbiamo avere tutte le lunghezze in centimetri e non qualcuna in centimetri ed qualcun'altra in millimetri.
7. **Sostituisci i valori numerici ed effettua i calcoli.**
8. **Fai attenzione alla consistenza dimensionale dei calcoli effettuati:**
   in particolare non scrivere alla fine di una espressione una certa unità di misura solo perché ti aspetti di avere a che fare con una certa grandezza.

Regola d'oro per qualsiasi esercizio:
Ogni misura è formata da un numero e da un'unità di misura.

La regola proposta può apparire assolutamente banale, ma è estremamente frequente che non venga rispettata. La conseguenza è di arrivare al termine di un problema con grandezze non corrette e calcoli sbagliati, senza rendersene conto.

2.2 Trasformazione di unità di misura, eliminando multipli e sottomultipli

Esercizio 1 *Trasforma le misure seguenti in unità del S.I., eliminando i multipli e i sottomultipli.*
111 mm   0,34 Gm 65×10^{-5} nm   22 cg

Puoi trovare una tabella con il simbolo, nome e significato dei multipli e sottomultipli alla fine di questi appunti. Per poter trasformare una misura, eliminando multipli e sottomultipli, si può procedere trasformando da prima il multiplo o sottomultiplo e poi semplificando la potenza di dieci o il fattore così ottenuti per il valore numerico rimasto della misura data:

1. $111\,\text{mm} = 111 \times 10^{-3}\,\text{m}$, oppure $= 111 \times 0{,}001\,\text{m} = 0{,}111\,\text{m}$
2. $0{,}34\,\text{Gm} = 0{,}34 \times 10^{9}\,\text{m}$
3. $65 \times 10^{-5}\,\text{nm} = 65 \times 10^{-5} \times 10^{-9}\,\text{m} = 65 \times 10^{-14}\,\text{m}$
4. L'ultima misura è espressa in centigrammi ed è quindi una misura di massa: unicamente per la massa l'unità di misura, che è il chilogrammo, contiene sempre il multiplo chilo.
   $22\,\text{cg} = 22 \times 10^{-2}\,\text{g} = 22 \times 10^{-2} \times 10^{-3}\,\text{kg} = 22 \times 10^{-5}\,\text{kg}$

2.3 Trasformazione di unità di misura, usando la notazione scientifica

Esercizio 2 *Trasforma le misure seguenti, usando la notazione scientifica.*
548×10^{-3} ms   0,0725 ns   2678 µs

Per poter trasformare una misura, usando la notazione scientifica, si può procedere:

1. scrivendo il valore numerico della misura come un numero compreso tra 1 e 9 moltiplicato per una opportuna potenza di dieci;
2. trasformando il multiplo o sottomultiplo eventualmente presente;
3. e infine semplificando la potenza di dieci così ottenuta per il valore numerico rimasto della misura data:

1. 548×10^{-3} ms: il valore numero della misura è 548×10^{-3}.
   Spostiamo la virgola dopo la prima cifra significativa, cioè il 5:
   $548 \times 10^{-3} = (5{,}48 \times 10^{2}) \times 10^{-3}$.
   Ora trasformiamo il sottomultiplo.
   $548 \times 10^{-3}\,\text{ms} = (5{,}48 \times 10^{2}) \times (10^{-3}\,\text{ms}) = 5{,}48 \times 10^{2} \times 10^{-3} \times 10^{-3}\,\text{s} = 5{,}48 \times 10^{-4}\,\text{s}$
2. $0{,}0725\,\text{ns} = 7{,}25 \times 10^{-2}\,\text{ns} = 7{,}25 \times 10^{-2} \times 10^{-9}\,\text{s} = 7{,}25 \times 10^{-11}\,\text{s}$
3. $2678\,\mu\text{s} = 2{,}678 \times 10^{3}\,\mu\text{s} = 2{,}678 \times 10^{3} \times 10^{-6}\,\text{s} = 2{,}678 \times 10^{-3}\,\text{s}$

2.4 Ordinamento di misure

Esercizio 3 *Riordina le seguenti misure di massa ponendole dalla più piccola alla più grande.*
$37{,}5 \times 10^8$ Mg $\quad 55 \times 10^2$ cg $\quad 0{,}00645 \times 10^3$ kg $\quad 7654$ µg

L'utilità della notazione scientifica è pienamente evidente quando si tratta di ordinare più misure di una stessa grandezza: basterà infatti ordinare le misure guardando alle potenze di dieci, ma solo dopo che le misure sono state espresse in notazione scientifica.

Esprimiamo le misure che abbiamo in notazione scientifica:

1. $37{,}5 \times 10^8\,\text{Mg} = (3{,}75 \times 10^1 \times 10^8)(10^3\,\text{kg}) = 3{,}75 \times 10^9 \times 10^3\,\text{kg} = 3{,}75 \times 10^{12}\,\text{kg}$.
2. $55 \times 10^2\,\text{cg} = (5{,}5 \times 10^1 \times 10^2)(10^{-2}\,\text{g}) = (5{,}5 \times 10^3)(10^{-2} \times 10^{-3}\,\text{kg}) = 5{,}5 \times 10^3 \times 10^{-5}\,\text{kg} =$ $5{,}5 \times 10^{-2}\,\text{kg}$
3. $0{,}00645 \times 10^3\,\text{kg} = 6{,}45 \times 10^{-3} \times 10^3\,\text{kg} = 6{,}45\,\text{kg}$
4. $7654\,\mu\text{g} = (7{,}654 \times 10^3)(10^{-6}\,\text{g}) = (7{,}654 \times 10^3)(10^{-6} \times 10^{-3}\,\text{kg}) =$ $7{,}654 \times 10^3 \times 10^{-9}\,\text{kg} = 7{,}654 \times 10^{-6}\,\text{kg}$

Quindi le misure, dalla più piccola alla più grande, sono:
$7{,}654 \times 10^{-6}\,\text{kg}\,;\quad 5{,}5 \times 10^{-2}\,\text{kg}\,;\quad 6{,}45\,\text{kg}\,;\quad 3{,}75 \times 10^{12}\,\text{kg}\,.$

2.5 Equivalenze

Esercizio 4 *Esegui le seguenti equivalenze*

1. 37,5 hm .... cm
2. 13 Mg .... cg
3. 45 mm^2 .... hm^2

1. Un modo possibile, non certo l'unico, per svolgere una equivalenza è esprimere innanzi tutto l'unità di misura senza multipli o sottomultipli, come potenza di dieci.
   $\text{hm} = 10^2\,\text{m} \qquad \text{cm} = 10^{-2}\,\text{m}$
   In questo caso la potenza va da 2 a -2 quindi varia di 4 unità.
   Allora di fronte alla nuova misura porremo una potenza di dieci con quel numero, preso con segno positivo perché stiamo passando da una unità più grande ad una più piccola.
   $37{,}5\,\text{hm} = 37{,}5 \times 10^4\,\text{cm}$
2. Esprimiamo le unità di misura senza multipli o sottomultipli:
   $\text{Mg} = 10^6\,\text{g} \qquad \text{cg} = 10^{-2}\,\text{g}$
   In questo caso la potenza va da 6 a -2 quindi varia di 8 unità e l'unità di arrivo è più piccola di quella di partenza.
   $13\,\text{Mg} = 13 \times 10^8\,\text{cg}$
3. Esprimiamo le unità di misura senza multipli o sottomultipli, ricordando che con le aree gli esponenti sono il doppio delle corrispondenti misure di lunghezza.
   $\text{mm}^2 = 10^{-6}\,\text{m} \qquad \text{hm}^2 = 10^4\,\text{m}$
   In questo caso la potenza va da -6 a 4 quindi varia di 10 unità e l'unità di arrivo è più grande di quella di partenza.
   $45\,\text{mm}^2 = 45 \times 10^{-10}\,\text{hm}^2$

2.6 Misura di superfici

Esercizio 5 *Un triangolo ha le seguenti dimensioni: base* = 10 mm, *altezza* = 15 cm.
Trova l'area del triangolo esprimendo il risultato nel S.I. .

L'interesse per un esercizio come questo non è certamente quello di trovare l'area di un triangolo. Si presume che tu abbia questa conoscenza fin dalle scuole medie. Tuttavia non è scontato che tu abbia anche la capacità di svolgere i calcoli correttamente, in particolare per quanto riguarda le unità di misura. Cerchiamo di fare riferimento agli otto punti indicati all'inizio di questo capitolo come utili per la risoluzione di un problema o esercizio.

1. Dobbiamo trovare l'area di un triangolo.
2. Abbiamo a disposizione due grandezze:
   la base = 10 mm
   l'altezza = 15 cm
3. Facciamo il disegno del nostro sistema, cioè del triangolo.
4. La legge da usare è quella che associa l'area del triangolo con le sue due misure lineari cioè:
   Area del triangolo = $\dfrac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2}$.
5. In questo caso abbiamo direttamente la formula finale.
6. In generale per trovare l'area dobbiamo usare la stessa unità di misura sia per la base che per l'altezza.
   In questo caso ci viene chiesto di trovare la risposta nel S.I., quindi trasformiamo subito le due grandezze nel S.I.
   Base = 10 mm $= 10 \times 10^{-3}\ \text{m} = 1{,}0 \times 10^{-2}\ \text{m}$,
   Altezza = 15 cm $= 15 \times 10^{-2}\ \text{m}$.
7. A questo punto sostituiamo le due misure nella formula data.

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{1{,}0 \times 10^{-2}\ \text{m} \cdot 15 \times 10^{-2}\ \text{m}}{2} = \tag{2.1}$$

$$\frac{15 \times 10^{-2} \cdot 10^{-2}\text{m}^2}{2} = \left(\frac{15}{2}\right) \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 = 7{,}5 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 \tag{2.2}$$

8. Abbiamo trovato che il risultato è espresso in metri quadri.
   Questa è effettivamente l'unità di misura delle aree nel S.I. .

2.7 Densità

Esercizio 6 *Trova la densità di un cubo la cui massa è* 2 kg *e il cui spigolo misura* 58 mm*.*

La densità di un corpo è definita come il rapporto tra la sua massa e il suo volume. Nel S.I. la massa si esprime in kg e il volume in m^3. Troviamo il volume del cubo esprimendo il risultato nel S.I. .

$$l = 58\,\mathrm{mm} = 58 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \tag{2.3}$$

$$V = l^3 = (58 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^3 = 1{,}95 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^3 \tag{2.4}$$

La densità è:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{2\,\mathrm{kg}}{1{,}95 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^3} = 1{,}025 \times 10^4\,\mathrm{kg/\,m}^3 \tag{2.5}$$

Esercizio 7 *Un oggetto a forma di sfera, il cui raggio misura* 23 cm*, ha una densità* $d = 1200\,\mathrm{kg/m}^3$*.*

1. *Qual è il volume dell'oggetto?*
2. *Qual è la sua massa?*

1. Troviamo il volume della sfera esprimendo il risultato nel S.I. .

$$r = 23\,\mathrm{cm} = 23 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} = 2{,}3 \times 10^{-1}\,\mathrm{m} \tag{2.6}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (2{,}3 \times 10^{-1}\,\mathrm{m})^3 = 5{,}10 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \tag{2.7}$$

2. Usiamo la definizione di densità per ricavare la sua massa.

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = d \cdot V \tag{2.8}$$

Infine la sua massa è:

$$m = d \cdot V = 1200\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 5{,}10 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 = 61{,}2\,\mathrm{kg} \tag{2.9}$$

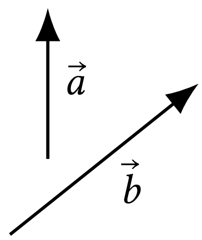
2.7 Densità

3 Grandezze vettoriali

3.1 Somma di due vettori

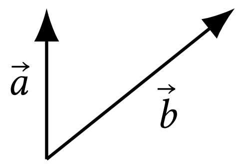
Esercizio 8 *Su un oggetto puntiforme agiscono due forze rappresentate con i vettori disegnati qui di fianco.*
Sapendo che 1 cm ≡ 35 N*:*

1. *Trova la forza totale che agisce sull'oggetto, cioè fai la somma vettoriale dei vettori dati.*
2. *Alla fine ricava il modulo delle due forze e della forza totale.*

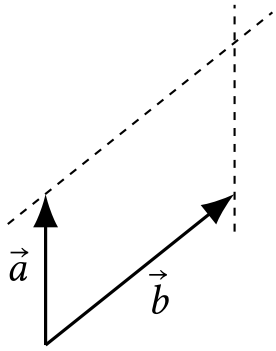


La somma di due vettori si può fare in diversi modi. In questo esercizio i vettori sono rappresentati graficamente e quindi la somma andrà fatta per via grafica. Utilizziamo il metodo del parallelogramma.

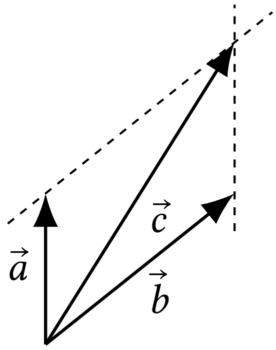
Per fare la somma di due vettori per via grafica:



1) Riportiamo i due vettori in modo che abbiano lo stesso punto di applicazione, lasciando invariate direzione, verso e modulo.



2) Partendo dalla punta del primo vettore ($\vec{a}$, ad esempio) tracciamo la retta parallela al secondo vettore ($\vec{b}$), poi dalla punta del secondo vettore tracciamo la retta parallela al primo. Le due rette si incontreranno in un punto.



3) Tracciamo il segmento che congiunge il punto di applicazione dei due vettori da sommare con il punto in cui si sono incontrate le due rette prima tracciate. Quel segmento rappresenta il vettore somma e il suo verso è verso la congiungente delle due rette tratteggiate.

Per trovare il modulo di un vettore per via grafica dobbiamo misurarne la lunghezza con un righello, usando l'unità di misura che ci viene indicata, in questo caso $1\,\text{cm} \equiv 35\,\text{N}$, cioè ogni centimetro di freccia vale 35 N.

Osserviamo l'ultima figura. Prendiamo un righello e misuriamo le frecce che rappresentano i vettori. Troviamo ad esempio che:

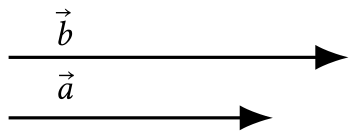
$$\begin{aligned} &\vec{a}\,,\ \text{lunghezza} = 2{,}0\,\text{cm} \\ &\vec{b}\,,\ \text{lunghezza} = 3{,}2\,\text{cm} \\ &\vec{c}\,,\ \text{lunghezza} = 4{,}5\,\text{cm} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Il valore dei moduli, ottenuto moltiplicando la lunghezza in cm del vettore per il valore equivalente di ogni centimetro, è quindi:

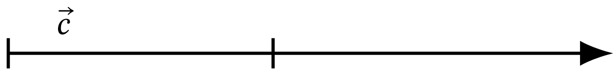
$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 2{,}0 \cdot 35\,\text{N} = 70\,\text{N} \\ |\vec{b}| &= 3{,}2 \cdot 35\,\text{N} = 112\,\text{N} \\ |\vec{c}| &= 4{,}5 \cdot 35\,\text{N} = 157\,\text{N} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Esercizio 9 *Sapendo che* $1\,\text{cm} \equiv 23\,\text{N}$ *determina:*

1. *la somma dei due vettori dati.*
2. *L'intensità dei due vettori e del vettore somma.*



I vettori dati sono paralleli e hanno lo stesso verso. La loro somma vettoriale è un vettore con la loro stessa direzione e verso, ma la cui lunghezza è somma delle lunghezze dei due vettori.



Troviamo quindi che:

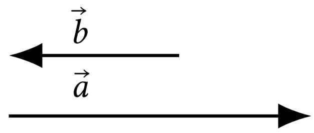
$$\begin{aligned} &\vec{a}\,,\ \text{lunghezza} = 3{,}5\,\text{cm} \\ &\vec{b}\,,\ \text{lunghezza} = 4{,}5\,\text{cm} \\ &\vec{c}\,,\ \text{lunghezza} = 3{,}5\,\text{cm} + 4{,}5\,\text{cm} = 8\,\text{cm} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Il valore dei moduli, ottenuto moltiplicando la lunghezza in cm del vettore per il valore equivalente di ogni centimetro, è quindi:

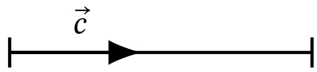
$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 3{,}5 \cdot 23\,\text{N} = 81\,\text{N} \\ |\vec{b}| &= 4{,}5 \cdot 23\,\text{N} = 103\,\text{N} \\ |\vec{c}| &= 8 \cdot 23\,\text{N} = |\vec{a}| + |\vec{b}| = 184\,\text{N} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Esercizio 10 *Sapendo che* 1 cm ≡ 56 N *determina:*

1. *La somma dei due vettori dati.*
2. *L'intensità dei due vettori e del vettore somma.*



I vettori dati sono paralleli, ma di verso opposto. La loro somma vettoriale è un vettore con la loro stessa direzione, con il verso di quello più lungo e la cui lunghezza è la differenza tra la lunghezza di quello più lungo e quello più corto.



Troviamo quindi che:

$$\begin{aligned} \vec{a}\,&,\ \text{lunghezza} = 4{,}0\ \text{cm} \\ \vec{b}\,&,\ \text{lunghezza} = 2{,}3\ \text{cm} \\ \vec{c}\,&,\ \text{lunghezza} = 1{,}7\ \text{cm} \end{aligned} \tag{3.5}$$

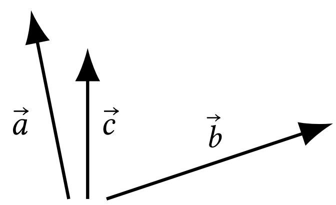
Il valore dei moduli, ottenuto moltiplicando la lunghezza in cm del vettore per il valore equivalente di ogni centimetro, è quindi:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 4{,}0 \cdot 56\ \text{N} = 224\ \text{N} \\ |\vec{b}| &= 2{,}3 \cdot 56\ \text{N} = 129\ \text{N} \\ |\vec{c}| &= 1{,}7 \cdot 56\ \text{N} = |\vec{a}| - |\vec{b}| = 95\ \text{N} \end{aligned} \tag{3.6}$$

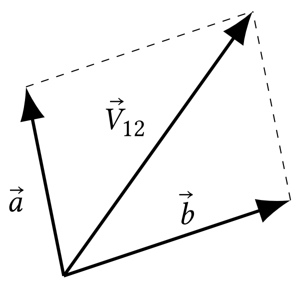
3.2 Somma di tre vettori

Esercizio 11 *Sapendo che* 1 cm ≡ 56 N *determina:*

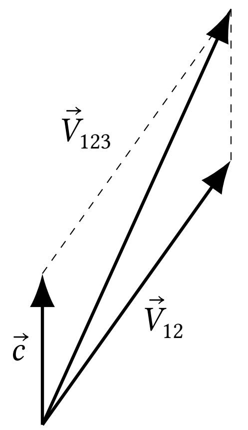
1. *La somma dei tre vettori dati.*
2. *L'intensità dei tre vettori e del vettore somma.*



La somma di più di due vettori si può realizzare sommando i primi due e poi questa somma con il terzo e così via. Chiamiamo $\vec{V}_{12}$ la somma del vettore $\vec{a}$ e il vettore $\vec{b}$; $\vec{V}_{123}$ la somma del vettore $\vec{V}_{12}$ e il vettore $\vec{c}$, cioè la somma dei tre vettori dati.



Questa è la somma di $\vec{a}$ e $\vec{b}$



Questa è la somma di $\vec{V}_{12}$ e $\vec{c}$

Misurando la lunghezza delle freccia troviamo infine che:

$$\begin{aligned} \vec{a}\,,\ &\text{lunghezza} = 2{,}5\ \text{cm} \\ \vec{b}\,,\ &\text{lunghezza} = 2{,}7\ \text{cm} \\ \vec{c}\,,\ &\text{lunghezza} = 2{,}0\ \text{cm} \\ \vec{V}_{123}\,,\ &\text{lunghezza} = 6{,}0\ \text{cm} \end{aligned} \tag{3.7}$$

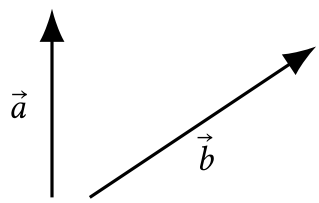
Il valore dei moduli, ottenuto moltiplicando la lunghezza in cm del vettore per il valore equivalente di ogni centimetro, è quindi:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 2{,}5 \cdot 56\ \text{N} = 140\ \text{N} \\ |\vec{b}| &= 2{,}7 \cdot 56\ \text{N} = 151\ \text{N} \\ |\vec{c}| &= 2{,}0 \cdot 56\ \text{N} = 112\ \text{N} \\ |\vec{V}_{123}| &= 6{,}0 \cdot 56\ \text{N} = 336\ \text{N} \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.3 Differenza tra vettori

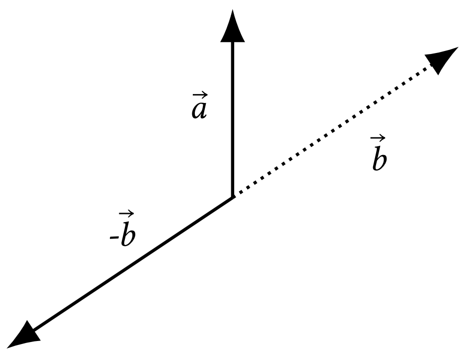
Esercizio 12 *Sapendo che* 1 cm ≡ 73 N *determina:*

1. *La differenza dei due vettori dati.*
2. *L'intensità dei due vettori e del vettore somma.*

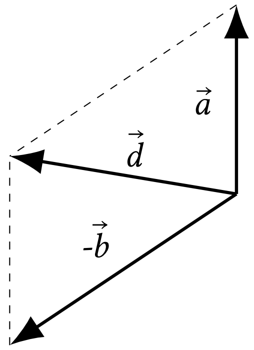


La differenza $\vec{d}$ tra un vettore $\vec{a}$ e un vettore $\vec{b}$ equivale alla somma di $\vec{a}$ con $\vec{b}$ cambiato di verso. Ovvero:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \tag{3.9}$$



Questo vettore $-\vec{b}$ è applicato nello stesso punto di applicazione di $\vec{a}$



Questa è la differenza $\vec{d}$

Misurando la lunghezza delle frecce troviamo infine che:

$$\begin{aligned} &\vec{a}\,,\ \text{lunghezza} = 2{,}5\ \text{cm}\\ &\vec{b}\,,\ \text{lunghezza} = 3{,}6\ \text{cm}\\ &\vec{d}\,,\ \text{lunghezza} = 3{,}2\ \text{cm} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Il valore dei moduli, ottenuto moltiplicando la lunghezza in cm del vettore per il valore equivalente di ogni centimetro, è quindi:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 2{,}5 \cdot 73\ \text{N} = 182\ \text{N}\\ |\vec{b}| &= 3{,}6 \cdot 73\ \text{N} = 263\ \text{N}\\ |\vec{d}| &= 3{,}2 \cdot 73\ \text{N} = 234\ \text{N} \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.4 Componenti di una forza

Esercizio 13 *Abbiamo una forza di* 470 N *che forma un angolo* $\alpha = 37°$ *rispetto ad una asse. Trova il modulo dei due componenti della forza parallelo e perpendicolare all'asse dato. Disegna i due componenti.*

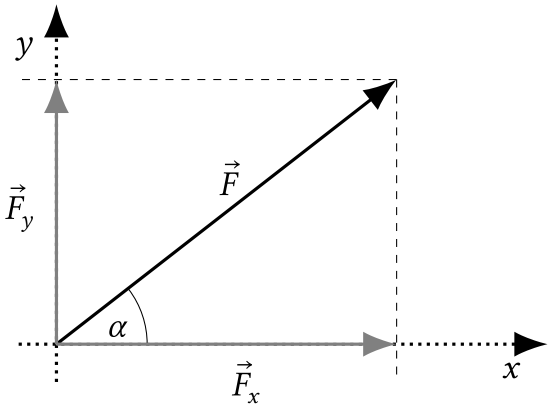
Se un vettore (in questo caso la forza) forma un angolo α rispetto ad un asse qualsiasi, allora il modulo dei suoi componenti parallelo e perpendicolare a quell'asse è dato da:

$$\begin{cases} |\vec{F}_{\parallel}| = |\vec{F}|\cos(\alpha)\\ |\vec{F}_{\perp}| = |\vec{F}|\sin(\alpha) \end{cases} \tag{3.12}$$

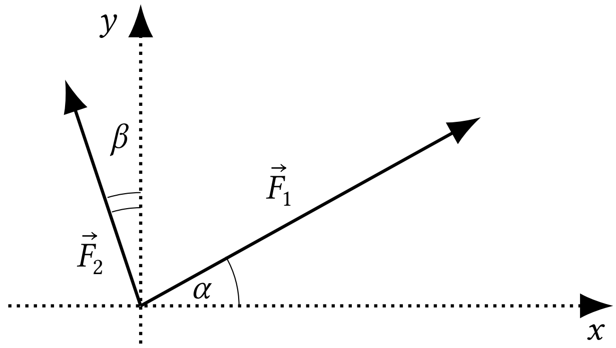
Ovvero:

$$\begin{cases} |\vec{F}_{\parallel}| = 470\ \text{N}\cos(37°) = 375\ \text{N}\\ |\vec{F}_{\perp}| = 470\ \text{N}\sin(37°) = 283\ \text{N} \end{cases} \tag{3.13}$$

Se consideriamo come asse di riferimento l'asse x possiamo fare il seguente disegno.

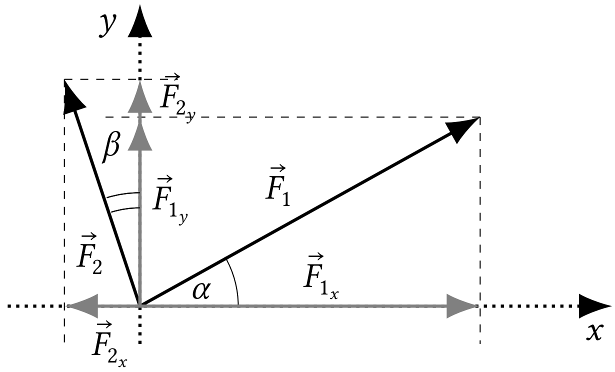


Esercizio 14 *Abbiamo una forza* $F_1 = 670\,\mathrm{N}$ *che forma un angolo* $\alpha = 35°$ *rispetto all'asse delle ascisse, e una forza* $F_2 = 320\,\mathrm{N}$ *che forma un angolo* $\beta = 27°$ *rispetto all'asse delle ordinate, come rappresentato in figura.*



1. *Disegna i componenti delle forze date rispetto agli assi.*
2. *Trova il modulo delle componenti delle forze date rispetto agli assi.*
3. *Trova la loro somma per componenti.*
4. *Trova il modulo del vettore somma.*

1. Costruiamo e disegniamo nella figura i componenti dei due vettori dati:



2. Nella figura possiamo osservare che l'angolo α è adiacente al componente x del vettore $\vec{F}_1$: per cui il suo modulo si può ricavare con il coseno dell'angolo.

$$\begin{cases} |\vec{F}_{1_x}| = |\vec{F}_1|\cos(\alpha) = 670\,\mathrm{N}\cos(35°) = 549\,\mathrm{N} \\ |\vec{F}_{1_y}| = |\vec{F}_1|\sin(\alpha) = 670\,\mathrm{N}\sin(35°) = 384\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{3.14}$$

Analogamente osserviamo che l'angolo β è adiacente al componente y del vettore $\vec{F}_2$: per cui il suo modulo si può ricavare con il coseno dell'angolo.

$$\begin{cases} |\vec{F}_{2_x}| = |\vec{F}_2|\sin(\beta) = 320\,\mathrm{N}\sin(27°) = 145\,\mathrm{N} \\ |\vec{F}_{2_y}| = |\vec{F}_2|\cos(\beta) = 320\,\mathrm{N}\cos(27°) = 285\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{3.15}$$

Osservando la figura, possiamo dare un segno alle componenti, in relazione al loro verso rispetto al verso positivo dell'asse in cui si trovano.

$$\vec{F}_1 = (549\,\mathrm{N}; 384\,\mathrm{N}) \tag{3.16}$$

$$\vec{F}_2 = (-145\,\mathrm{N}; 285\,\mathrm{N}) \tag{3.17}$$

Con altra notazione (scrivendo i vettori rispetto ai versori degli assi) possiamo scrivere:

$$\vec{F}_1 = (549\,\hat{\imath} + 384\,\hat{\jmath})\,\mathrm{N} \tag{3.18}$$

$$\vec{F}_2 = (-145\,\hat{\imath} + 285\,\hat{\jmath})\,\mathrm{N} \tag{3.19}$$

3. Il vettore somma ha per componenti la somma delle rispettive componenti di $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

$$\vec{F}_s = (549\,\mathrm{N} + (-145\,\mathrm{N}); 384\,\mathrm{N} + 285\,\mathrm{N}) = (404\,\mathrm{N}; 669\,\mathrm{N}) \tag{3.20}$$

4. Infine il suo modulo vale (ricordando il teorema di Pitagora):

$$|\vec{F}_s| = \sqrt{F_{s_x}^2 + F_{s_y}^2} = \sqrt{(404\,\mathrm{N})^2 + (669\,\mathrm{N})^2} = 781\,\mathrm{N} \tag{3.21}$$

3.5 Dinamometro e legge di Hooke

Esercizio 15 *Un dinamometro è costruito con una molla che a riposo è lunga* 2 cm. *Quando alla molla viene applicata una forza di* 50 N *diventa lunga* 5 cm. *Quanto vale la costante elastica della molla?*

Il comportamento di una molla elastica può essere descritto con buona approssimazione dalla legge di Hooke che lega la forza F con un cui una molla viene tesa al suo allungamento Δx:

$$F = -k\Delta x \tag{3.22}$$

La costante k è detta costante elastica e il segno negativo sta ad indicare la presenza di una forza di richiamo. In questo caso l'allungamento vale:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 5\,\mathrm{cm} - 2\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{cm} \tag{3.23}$$

Infine la costante elastica (senza segno) vale:

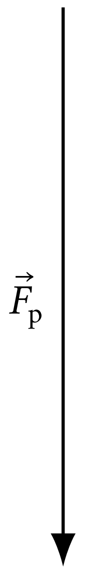
$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{50\,\mathrm{N}}{3\,\mathrm{cm}} = 16{,}6\,\mathrm{N/cm} \tag{3.24}$$

4 Statica dei corpi puntiformi

4.1 Corpo puntiforme su un piano orizzontale

Esercizio 16 *Un corpo puntiforme di massa* $m = 12\,\mathrm{kg}$ *è fermo su un piano orizzontale. Il coefficiente d'attrito statico tra corpo e piano è* $\mu = 0{,}7$.

1. *Calcola il modulo della forza peso che agisce sul corpo.*
2. *Disegna il vettore forza peso con un vettore di lunghezza opportuna sapendo che* $1\,\mathrm{cm} \equiv 16\,\mathrm{N}$.
3. *Calcola la forza d'attrito statico che si esercita sul corpo.*



1. Ogni corpo sulla Terra è sottoposto ad una forza, la forza di gravità, che la Terra esercita sul corpo stesso. In prossimità della superficie terrestre la forza di gravità, chiamata anche forza peso, è una forza diretta verso il centro della Terra, in direzione perpendicolare alla superficie terrestre e il suo modulo vale:

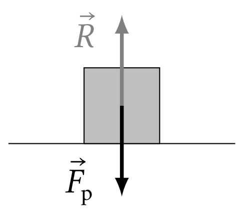
$$F_\mathrm{p} = mg = 12\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} = 118\,\mathrm{N} \tag{4.1}$$

   L'accelerazione di gravità g vale circa $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ solo in prossimità del suolo. più si sale di altitudine e minore sarà il suo valore.

2. Il disegno della forza peso consiste nel fare una freccia orientata verso il basso, di opportuna lunghezza. Noi sappiamo che ogni cm di freccia vale 16 N. Per avere un modulo di 118 N dobbiamo avere una freccia di lunghezza l:

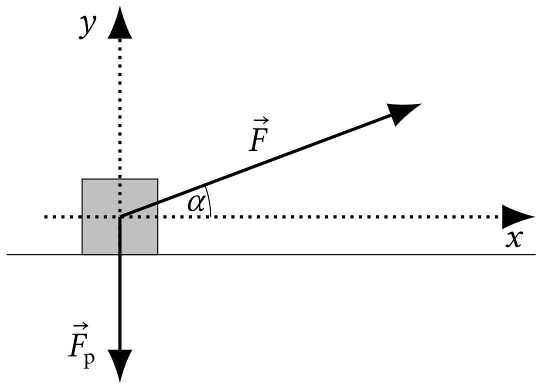
$$l = \frac{118\,\mathrm{N}}{16\,\mathrm{N/cm}} = 7{,}4\,\mathrm{cm} \tag{4.2}$$

3. La forza d'attrito si manifesta solo se il corpo si muove o se c'è una forza che cerca di spostarlo dal suo equilibrio. In questo caso l'unica forza che agisce sul corpo è la forza peso e la reazione vincolare del piano d'appoggio. Esse agiscono perpendicolarmente al piano e non spingono il corpo né verso destra né verso sinistra. Per cui anche se "c'è attrito" non c'è nessuna forza d'attrito, per lo meno attrito radente.



Esercizio 17 *Un corpo puntiforme di massa $m = 12\,\text{kg}$ è fermo su un piano orizzontale. Il coefficiente d'attrito statico tra corpo e piano è $\mu = 0{,}85$. Sul corpo agisce la forza $\vec{F}$ ($|\vec{F}| = 78\,\text{N}$ e $\alpha = 21°$).*

1. *Calcola il modulo della forza peso che agisce sul corpo.*
2. *Calcola la forza totale che agisce sul corpo parallelamente e perpendicolarmente al piano, trascurando la reazione vincolare del piano e l'eventuale forza d'attrito.*
3. *Calcola la forza d'attrito statico massimo che il corpo può sopportare.*
4. *Aggiungi alla figura la forza d'attrito statico.*
5. *Determina, in modulo, direzione e verso, la reazione vincolare del piano.*

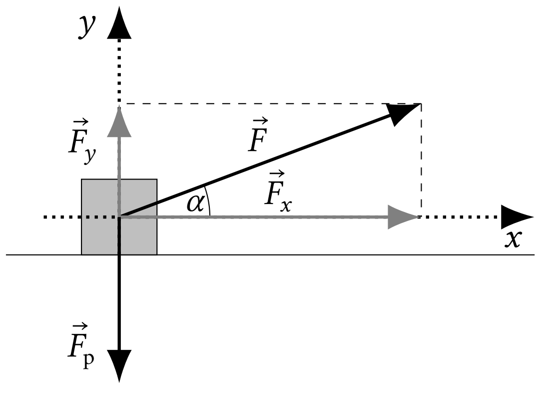


1. La forza peso è data da $F_\text{p} = mg$. Quindi:

$$F_\text{p} = mg = 12\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 118\,\text{N} \tag{4.3}$$

2. Nella figura data avevamo già indicato due assi ortogonali x e y passanti per il centro del corpo. Essi individuano la direzione parallela e perpendicolare al piano per il corpo dato.
   Aggiungiamo alla figura i componenti del vettore $\vec{F}$ su quegli assi. I loro moduli sono:

$$\begin{cases} |\vec{F}_x| = |\vec{F}|\cos(\alpha) = 78\,\text{N} \cdot \cos(21°) = 78\,\text{N} \cdot 0{,}933 = 73\,\text{N} \\ |\vec{F}_y| = |\vec{F}|\sin(\alpha) = 78\,\text{N} \cdot \sin(21°) = 78\,\text{N} \cdot 0{,}358 = 28\,\text{N} \end{cases} \tag{4.4}$$



In orizzontale agisce solo la forza $\vec{F}_x$. In verticale agiscono $\vec{F}_\text{p}$ e $\vec{F}_y$, con verso opposto. La forza totale che agisce in verticale è la somma vettoriale di queste due forze. Il verso positivo delle componenti è dato dal verso positivo dell'asse a cui si riferiscono.

$$\vec{F} = (73\,\hat{\imath} + 28\,\hat{\jmath})\,\text{N} \tag{4.5}$$

$$\vec{F}_\mathrm{p} = (-118\,\hat{\jmath})\,\mathrm{N} \tag{4.6}$$

Sommiamo le rispettive componenti (col proprio segno):

$$F_\text{verticale} = F_y + F_{\mathrm{p}_y} = 28\,\mathrm{N} - 118\,\mathrm{N} = -90\,\mathrm{N} \tag{4.7}$$

3. La forza totale che agisce in verticale schiaccia il corpo verso il basso. Poiché prevale la forza verso il basso si può avere una forza di attrito: la forza d'attrito dipende da quanto il corpo è schiacciato sul piano. La forza che schiaccia il corpo è $F_\text{verticale}$.
   La forza di attrito statico massimo che il corpo può sopportare è:

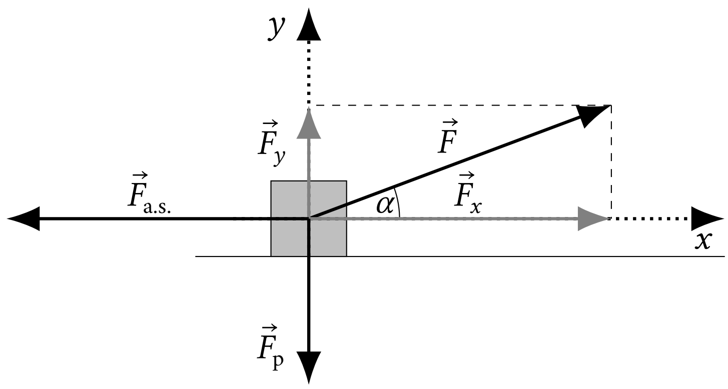
$$F_\text{a.s. MAX} = \mu F_\text{schiacciamento} = 0{,}85 \cdot 90\,\mathrm{N} = 77\,\mathrm{N} \tag{4.8}$$

   Osserviamo che il segno meno della sua componente verticale non va inserito nella formula precedente dal momento che non avrebbe alcun significato: la forza che schiaccia il corpo è perpendicolare al piano, ma la forza d'attrito è parallela al piano.
   Dal momento che la forza che spinge il corpo lungo il piano ($\vec{F}_x$) è inferiore alla forza di attrito massimo che il corpo può sopportare, allora il corpo non scivola sul piano stesso.

$$|\vec{F}_x| < |\vec{F}_\text{a.s. MAX}| \Rightarrow \text{Il corpo non scivola} \tag{4.9}$$

   La forza d'attrito effettiva $\vec{F}_\text{a.s.}$ è quindi uguale e contraria alla forza $\vec{F}_x$, dal momento che il corpo rimane in equilibrio e quindi la somma delle forze deve essere nulla.

4. Nella figura seguente disegniamo quanto detto (la forza peso non è in scala).



5. La forza di reazione vincolare del piano è la forza che il piano esercita sul corpo per impedire che questo lo attraversi. Se il corpo è schiacciato sul piano, il piano reagisce con una forza uguale in modulo e direzione, ma di verso opposto. La forza di reazione ha quindi lo stesso valore e direzione di $F_\text{verticale}$.

4.2 Corpo puntiforme su un piano inclinato

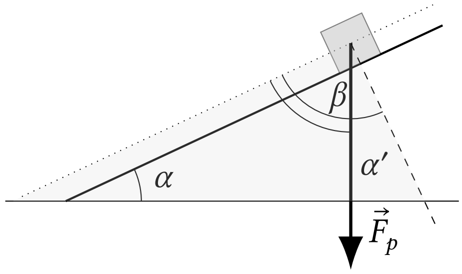
Esercizio 18 *Un corpo puntiforme di massa $m = 70\,\mathrm{kg}$ è fermo su un piano inclinato con un angolo $\alpha = 25°$ rispetto all'orizzontale.*

1. *Calcola il modulo della forza peso che agisce sul corpo e rappresentala in una figura.*
2. *Disegna i componenti del vettore forza peso parallelo e perpendicolare al piano.*
3. *Calcola il modulo di questi due componenti.*

1. Il modulo della forza peso che agisce sul corpo è:

$$|\vec{F}_{\mathrm{p}}| = m|\vec{g}| = 70\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 687\,\mathrm{N} \tag{4.10}$$

2. Per trovare i componenti della forza peso osserviamo come i nostri assi siano uno perpendicolare al piano (e lo disegniamo nella figura come linea tratteggiata) e uno parallelo e sovrapposto al piano.



Per quanto riguarda l'angolo α e l'angolo α' che la forza peso forma con la perpendicolare, guardiamo al triangolo rettangolo evidenziato in grigio. Possiamo scrivere:

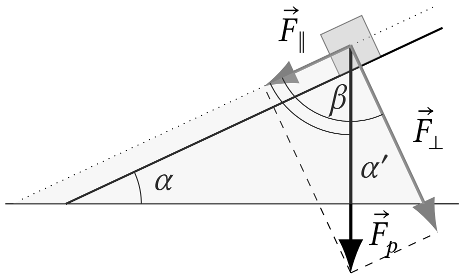
$$\beta + \alpha + 90° = 180° \tag{4.11}$$

$$\beta + \alpha' = 90° \tag{4.12}$$

E quindi, eguagliando gli angoli β nelle due equazioni:

$$180° - \alpha - 90° = 90° - \alpha' \tag{4.13}$$

$$\alpha = \alpha' \tag{4.14}$$



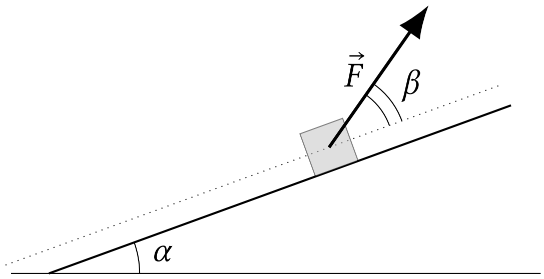
3. Se i due angoli sono uguali possiamo scrivere che:

$$\begin{cases} |\vec{F}_{\mathrm{p}\perp}| = |\vec{F}_{\mathrm{p}}|\cos(\alpha') = 687\,\mathrm{N} \cdot \cos(25°) = 623\,\mathrm{N} \\ |\vec{F}_{\mathrm{p}\parallel}| = |\vec{F}_{\mathrm{p}}|\sin(\alpha') = 687\,\mathrm{N} \cdot \sin(25°) = 290\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{4.15}$$

Esercizio 19 *Un corpo puntiforme di massa $m = 40\,\mathrm{kg}$ è poggiato su un piano inclinato con un angolo $\alpha = 20°$ rispetto all'orizzontale. Tra corpo e piano è presente attrito: il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0{,}8$.*

Inoltre sul corpo agisce una forza $\vec{F}$, dove $|\vec{F}| = 150\,\mathrm{N}$ e $\beta = 35°$, come mostrato in figura.

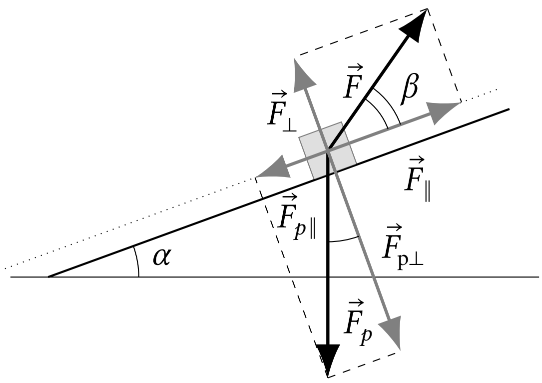
1. *Calcola il modulo della forza peso che agisce sul corpo.*
2. *Disegna i componenti del vettore forza peso e della forza $\vec{F}$ paralleli e perpendicolari al piano.*
3. *Calcola il modulo di questi quattro componenti.*
4. *Trova il modulo della forza totale che agisce perpendicolarmente e parallelamente al piano, trascurando la reazione vincolare del piano e l'eventuale forza d'attrito.*
5. *Trova la forza di attrito massimo a cui il corpo può resistere senza muoversi.*
6. *Trova se nelle condizioni date il corpo riuscirà a stare fermo e calcola la forza di attrito che effettivamente agisce sul corpo.*
7. *Trova l'eventuale reazione vincolare del piano.*



1. Il modulo della forza peso che agisce sul corpo è:

$$F_\mathrm{p} = mg = 40\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 392\,\mathrm{N} \tag{4.16}$$

2. Aggiungiamo alla figura la forza peso (non proprio in scala) e i componenti delle forze date paralleli e perpendicolari al piano inclinato.



Nella precedente figura l'angolo α è anche l'angolo tra $\vec{F}_\mathrm{p}$ e $\vec{F}_{\mathrm{p}\perp}$.

3. Scegliamo (a nostro arbitrio) come verso positivo per le componenti delle forze parallele al piano quello verso destra e come verso positivo per le componenti perpendicolari al piano quello verso l'alto. Per questo possiamo scrivere:

$$\begin{cases} F_{\mathrm{p}\perp} = -|\vec{F}_\mathrm{p}|\cos(\alpha) = -392\,\mathrm{N} \cdot \cos(20°) = -368\,\mathrm{N} \\ F_{\mathrm{p}\parallel} = -|\vec{F}_\mathrm{p}|\sin(\alpha) = -392\,\mathrm{N} \cdot \sin(20°) = -134\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{4.17}$$

Invece per le componenti della forza $\vec{F}$ scriviamo:

$$\begin{cases} F_{\perp} = |\vec{F}| \sin(\beta) = 150\,\mathrm{N} \cdot \sin(35°) = 86\,\mathrm{N} \\ F_{\parallel} = |\vec{F}| \cos(\beta) = 150\,\mathrm{N} \cdot \cos(35°) = 123\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{4.18}$$

4. Per trovare il modulo della forza totale lungo il piano e perpendicolarmente ad esso, sommiamo le componenti delle due forze date lungo quelle due direzioni.

$$F_{\mathrm{tot}\,\parallel} = F_{\parallel} + F_{\mathrm{p}\,\parallel} = 123\,\mathrm{N} + (-134\,\mathrm{N}) = -11\,\mathrm{N} \tag{4.19}$$

$$F_{\mathrm{tot}\perp} = F_{\perp} + F_{\mathrm{p}\perp} = 86\,\mathrm{N} + (-368\,\mathrm{N}) = -282\,\mathrm{N} \tag{4.20}$$

   La componente della forza totale perpendicolare al piano ha segno negativo, quindi è diretta verso il basso: il corpo rimane attaccato al piano e vi può essere forza d'attrito. La componente della forza totale parallela al piano è negativa, quindi il corpo è spinto verso sinistra.

5. La forza d'attrito statico dipende dalla forza con cui il corpo è schiacciato sul piano di appoggio. Nel nostro caso dipende dalla componente perpendicolare al piano della forza totale.
   La forza di attrito statico massimo che il corpo può sopportare è:

$$F_{\mathrm{a.s.\,MAX}} = \mu F_{\mathrm{schiacciamento}} = \mu_s |\vec{F}_{\mathrm{tot}\perp}| = 0{,}8 \cdot 282\,\mathrm{N} = 226\,\mathrm{N} \tag{4.21}$$

6. La forza d'attrito si oppone al movimento del corpo. Nel nostro caso il corpo è spinto verso sinistra dalla forza $\vec{F}_{tot\,\parallel}$. Poiché il modulo di questa forza è più piccolo del massimo attrito statico che il corpo può sopportare allora il corpo rimarrà fermo.

$$|\vec{F}_{\mathrm{tot}\,\parallel}| < |\vec{F}_{\mathrm{a.s.\,MAX}}| \Rightarrow \text{Il corpo non scivola} \tag{4.22}$$

   La forza d'attrito effettiva è uguale e contraria alla forza $F_{\mathrm{tot}\,\parallel}$.

$$\vec{F}_{\mathrm{a.s.}} = -\vec{F}_{\mathrm{tot}\,\parallel} \tag{4.23}$$

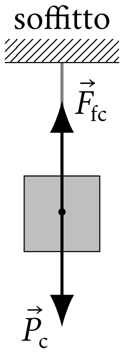
7. La forza di reazione vincolare del piano è la forza che il piano esercita sul corpo per impedire che questo lo attraversi. Se il corpo è schiacciato sul piano, il piano reagisce con una forza uguale in modulo e direzione, ma di verso opposto. La forza di reazione ha quindi lo stesso valore e direzione di $F_{\mathrm{tot}\perp}$.

$$\vec{F}_{\mathrm{r.v.}} = -\vec{F}_{\mathrm{tot}\perp} \tag{4.24}$$

4.3 Corpo appeso ad uno o più fili

Esercizio 20 *Un corpo di massa* $m_\mathrm{c} = 7\,\mathrm{kg}$ *è appeso al soffitto di una stanza con un filo di massa* $m_\mathrm{f} = 50\,\mathrm{g}$ *ed è in quiete.*

1. *Trova la forza che il corpo esercita sul filo.*
2. *Trova la forza che il soffitto esercita sul filo.*



Sul corpo agiscono due forze: la forza peso del corpo stesso $\vec{P}_\mathrm{c}$ e la forza $\vec{F}_\mathrm{fc}$ esercitata dal filo sul corpo. Quindi:

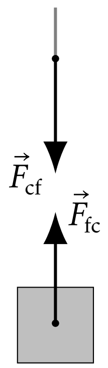
$$\vec{F}_\mathrm{tot} = \vec{P}_\mathrm{c} + \vec{F}_\mathrm{fc} \tag{4.25}$$

In un corpo esteso la fune esercita la sua forza nel punto di contatto con il corpo.
Il nostro corpo, anche se rappresentato come un oggetto esteso (il quadrato) è idealizzato come se fosse un punto. Di conseguenza è preferibile rappresentare tutte le forze che agiscono su di esso come se fossero applicate al centro (il centro di massa) del corpo. Per questo motivo nella figura $\vec{F}_\mathrm{fc}$ parte del centro del corpo.

Il corpo è a riposo quindi la forza totale che agisce su esso è nulla: $\vec{F}_\mathrm{tot} = 0\,\mathrm{N}$. Da cui ricaviamo che:

$$\vec{P}_\mathrm{c} = -\vec{F}_\mathrm{fc} \tag{4.26}$$

$$|\vec{F}_\mathrm{fc}| = |\vec{P}_\mathrm{c}| = m_\mathrm{c} g = 7\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 69\,\mathrm{N} \tag{4.27}$$

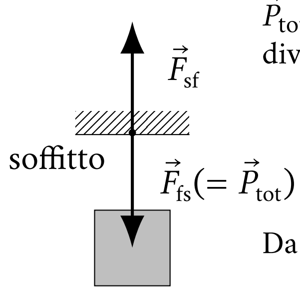


Per il terzo principio della dinamica la forza $\vec{F}_\mathrm{fc}$ esercitata dal filo sul corpo è uguale e contraria alla forza $\vec{F}_\mathrm{cf}$ esercitata dal corpo sul filo, che è la grandezza che vogliamo trovare.

$$\vec{F}_\mathrm{cf} = -\vec{F}_\mathrm{fc} \tag{4.28}$$

Quindi:

$$|\vec{F}_\mathrm{cf}| = |\vec{F}_\mathrm{fc}| = 69\,\mathrm{N} \tag{4.29}$$



Il soffitto, anch'esso in quiete, esercita una forza $\vec{F}_\mathrm{sf}$ uguale e contraria a quella $\vec{F}_\mathrm{fs}$ che il filo esercita sul soffitto. Inoltre questa forza $\vec{F}_\mathrm{fs}$ è uguale alla forza $\vec{P}_\mathrm{tot}$ determinata dal peso del corpo e del filo, ma con un punto di applicazione diverso.

$$-\vec{F}_\mathrm{sf} = \vec{F}_\mathrm{fs} = \vec{P}_\mathrm{tot} \tag{4.30}$$

$$\vec{P}_\mathrm{tot} = \vec{P}_\mathrm{c} + \vec{P}_\mathrm{f} \tag{4.31}$$

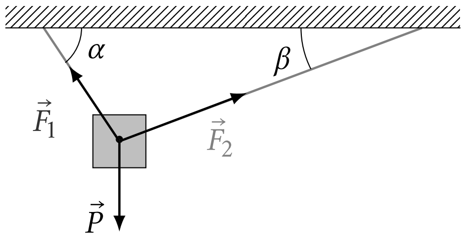
Da cui ricaviamo che:

$$|\vec{F}_\mathrm{sf}| = |\vec{P}_\mathrm{tot}| = |\vec{P}_\mathrm{c}| + |\vec{P}_\mathrm{f}| = m_\mathrm{c} g + m_\mathrm{f} g = \tag{4.32}$$

$$(7\,\mathrm{kg} + 50\,\mathrm{g}) \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = (7\,\mathrm{kg} + 0{,}05\,\mathrm{Kg}) \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 69{,}2\,\mathrm{N}$$

Esercizio 21 *Un corpo di massa $m = 3\,\mathrm{kg}$ è appeso al soffitto di una stanza con due fili di massa trascurabile ed è in quiete. I due fili formano rispettivamente un angolo $\alpha = 50°$ e un angolo $\beta = 30°$ rispetto al soffitto.*

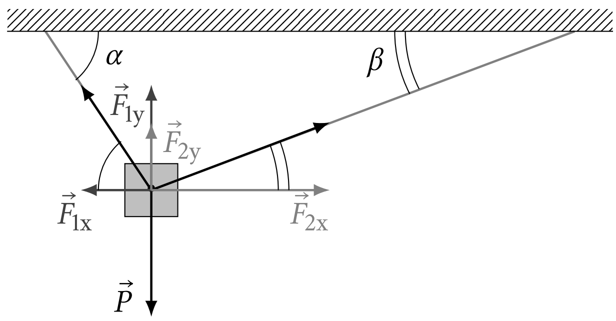
1. *Trova la forza che i due fili esercitano sul corpo.*
2. *Trova la forza che il corpo esercita su i due fili.*



1. Se il corpo è in quiete la somma vettoriale delle forze che agiscono su di esso è nulla. Questa condizione possiamo esprimerla separatamente per due assi ortogonali, ad esempio quello passante per il corpo e parallelo al piano e quello perpendicolare.

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0 \tag{4.33}$$

Allora disegniamo nella figura i componenti delle forze date lungo gli assi ora indicati.



Costruiamo un sistema di due equazioni in due incognite, dove le incognite sono le due forze F_1 e F_2. Diamo il segno più alle forze verso l'alto e verso destra.

$$\begin{cases} |\vec{F}_{2x}| - |\vec{F}_{1x}| = 0 \\ |\vec{F}_{1y}| + |\vec{F}_{2y}| - mg = 0 \end{cases} \tag{4.34}$$

$$\begin{cases} |\vec{F}_2| \cos\beta - |\vec{F}_1| \cos\alpha = 0 \\ |\vec{F}_1| \sin\alpha + |\vec{F}_2| \sin\beta - mg = 0 \end{cases} \tag{4.35}$$

Mettiamo in evidenza F_2 nella prima e sostituiamolo nella seconda.

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1|\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \tag{4.36}$$

$$|\vec{F}_1|\sin\alpha + |\vec{F}_1|\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\sin\beta - mg = 0 \tag{4.37}$$

$$|\vec{F}_1|\left(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\sin\beta\right) = mg \tag{4.38}$$

$$|\vec{F}_1| = \frac{mg}{\left(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\sin\beta\right)} \tag{4.39}$$

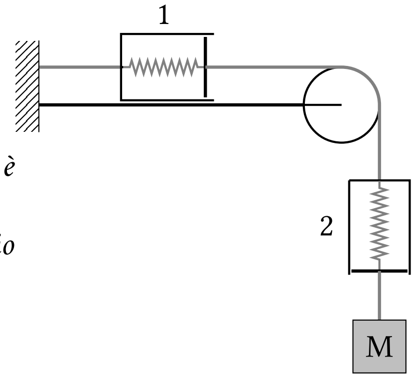
$$|\vec{F}_1| = \frac{3\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{\left(\sin 50^\circ + \frac{\cos 50^\circ}{\cos 30^\circ}\cdot\sin 30^\circ\right)} = 25{,}9\,\mathrm{N} \tag{4.40}$$

$$|\vec{F}_2| = 25{,}9\,\mathrm{N}\cdot\frac{\cos 50^\circ}{\cos 30^\circ} = 19{,}2\,\mathrm{N} \tag{4.41}$$

2. Per il terzo principio della dinamica la forza che il corpo esercita su ogni filo è uguale e contraria alla forza che il filo esercita sul corpo.

4.4 Corpi e dinamometri

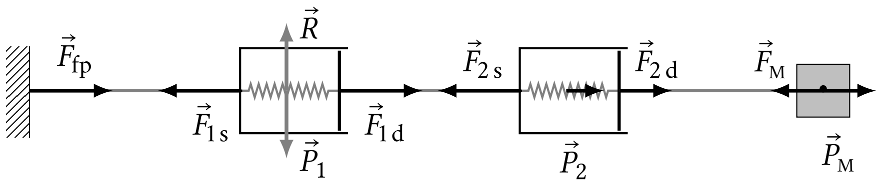
Esercizio 22 *Un dinamometro* 1*, di massa* $m_1 = 0{,}10\,\mathrm{kg}$*, è poggiato su un piano orizzontale dove può muoversi senza attrito, come rappresentato in figura: a sinistra è collegato con un filo ad una parete immobile, a destra è collegato con un altro filo ad un secondo dinamometro* 2*, di massa* $m_2 = 0{,}40\,\mathrm{kg}$*. Questo filo è fatto passare su una carrucola dove può scivolare senza attrito.*
Infine un grave di massa $M = 4\,\mathrm{kg}$ *è appeso con un filo al dinamometro* 2*.*
Tutti i fili sono di massa trascurabile.



Sapendo che tutto il sistema è in equilibrio:
1. *Trova la forza misurata dai due dinamometri.*
2. *Trova la forza esercitata dal filo nel punto in cui è attaccato alla parete.*
3. *Trova se posizionando i due dinamometri al contrario misurerebbero un forza differente.*

Il sistema descritto nell'esercizio può essere rappresentato come se fosse costituito da un unico sistema posizionato tutto su un'unica retta. Inoltre il sistema è in equilibrio e sono in equilibrio i due dinamometri e il grave. Per cui, su ognuno di essi, la somma delle forze che agiscono deve essere nulla. Ridisegniamo il sistema di conseguenza con tutte le forze che agiscono sui tre corpi.

Inseriamo nella figura anche la forza che il filo esercita sulla parete.



1. Per determinare la forza misurata dai due dinamometri cominciamo analizzando il sistema dal grave a destra.
   Sul grave agisce il suo peso e la forza $\vec{F}_{\mathrm{M}}$ della fune. Essendo in equilibrio scriviamo:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mathrm{M}} + \vec{P}_{\mathrm{M}} &= 0 \\ |\vec{F}_{\mathrm{M}}| = |\vec{P}_{\mathrm{M}}| &= Mg = 4\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 39\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{4.42}$$

   Le forze esercitate dalla fune, $\vec{F}_{\mathrm{M}}$ e $\vec{F}_{2\,\mathrm{d}}$, devono essere uguali e contrarie perché la fune ha massa trascurabile e la somma delle forze che agiscono alle sue estremità deve essere nulla.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mathrm{M}} + \vec{F}_{2\,\mathrm{d}} &= 0 \\ |\vec{F}_{2\,\mathrm{d}}| = |\vec{F}_{\mathrm{M}}| &= 39\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{4.43}$$

   Consideriamo il dinamometro n°2. Essendo in equilibrio scriviamo:

$$\vec{P}_2 + \vec{F}_{2\,\mathrm{d}} + \vec{F}_{2\,\mathrm{s}} = 0 \tag{4.44}$$

Il dinamometro non può essere considerato un semplice punto materiale. Infatti abbiamo applicato le due tensioni delle funi alle sue estremità, non nel centro del corpo (come per la forza peso), ma nel punto di contatto con i fili.
Il dinamometro misura la forza esterna che equilibra la forza di richiamo elastica della molla. Dalla figura emerge che questa forza è $\vec{F}_{2\,d}$ che abbiamo prima calcolato.

Quindi il dinamometro 2 *segna* 39 N.

Consideriamo il dinamometro 1. Essendo in equilibrio scriviamo:

$$\begin{cases} \vec{F}_{1\,\mathrm{d}} + \vec{F}_{1\,\mathrm{s}} = 0 \\ \vec{P}_1 + \vec{R} = 0 \end{cases} \tag{4.45}$$

Inoltre, analogamente a quanto già scritto, le forze esercitate dalle funi, $\vec{F}_{1\,\mathrm{d}}$ e $\vec{F}_{2\,\mathrm{s}}$, devono essere uguali e contrarie perché le funi ha massa trascurabile e la somma delle forze che agiscono alle sue estremità deve essere nulla.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1\,\mathrm{d}} + \vec{F}_{2\,\mathrm{s}} &= 0 \\ \vec{F}_{1\,\mathrm{d}} = -\vec{F}_{2\,\mathrm{s}} &= \vec{P}_2 + \vec{F}_{2\,\mathrm{d}} \\ |\vec{F}_{1\,\mathrm{d}}| = |\vec{P}_2| + |\vec{F}_{2\,\mathrm{d}}| &= m_2 g + 39\,\mathrm{N} = 0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} + 39\,\mathrm{N} = 43\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{4.46}$$

La forza elastica del dinamometro 1 (non disegnata in figura) è equilibrata dalla forza $\vec{F}_{1\,\mathrm{d}}$.

Quindi il dinamometro 1 *segna* 43 N.

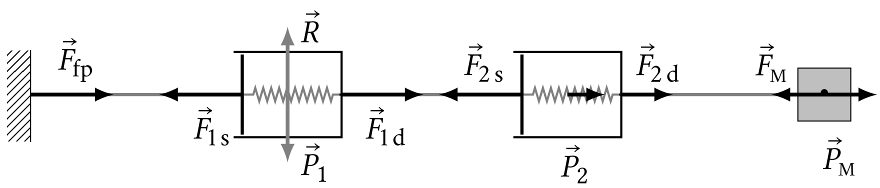
2. Per quanto riguarda la forza esercita sulla parete dalla fune osserviamo che, per analoghe ragioni a quanto visto per gli altri spezzoni di filo:

$$\vec{F}_{\mathrm{fp}} + \vec{F}_{1\,\mathrm{s}} = 0 \tag{4.47}$$

Inoltre per quanto già scritto:

$$|\vec{F}_{\mathrm{fp}}| = |\vec{F}_{1\,\mathrm{s}}| = |\vec{F}_{1\,\mathrm{d}}| = 43\,\mathrm{N} \tag{4.48}$$

3. Disegniamo il sistema con i dinamometri capovolti.

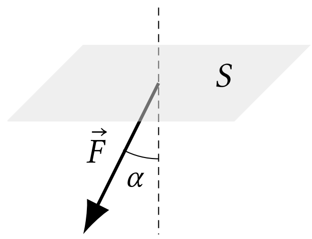


Per quanto riguarda il dinamometro 1 non è cambiato niente. Infatti ora il dinamometro misura ora la forza $\vec{F}_{1\,s}$ che ha comunque lo stesso modulo di $\vec{F}_{1\,\mathrm{d}}$.
Diversamente per il dinamometro 2. La forza misurata è ora $\vec{F}_{2\,\mathrm{s}}$ che è diversa da $\vec{F}_{2\,\mathrm{d}}$.
In pratica il dinamometro deve misurare il peso del grave più il suo peso.

5 Statica dei fluidi

5.1 Pressione di una forza su una superficie

Esercizio 23 *Una forza $\vec{F}$ il cui modulo vale* 123 N *forma un angolo di* 30° *con la superficie sulla quale agisce. L'area della superficie vale* $0{,}04\,\mathrm{m}^2$. *Calcola la pressione esercita dalla forza sulla superficie.*



La definizione di pressione è

$$p = \frac{|\vec{F}\perp|}{A} \tag{5.1}$$

dove $\vec{F}\perp$ è la componente della forza perpendicolare alla superficie e A è l'area della superficie.

Guardando alla figura possiamo scrivere:

$$|\vec{F}\perp| = |\vec{F}|\cos(\alpha) = 123\,\mathrm{N} \cdot 0{,}86 = 106{,}5\,\mathrm{N} \tag{5.2}$$

Quindi la pressione vale:

$$p = \frac{|\vec{F}\perp|}{A} = \frac{106{,}5\,\mathrm{N}}{0{,}04\,\mathrm{m}^2} = 2663\,\mathrm{Pa} \tag{5.3}$$

Esercizio 24 *Calcola la pressione esercitata dalla forza peso di un corpo fatto di alluminio, a forma di cubo, il cui spigolo vale* 12 cm, *poggiato con una faccia del cubo su un piano orizzontale.*

Dobbiamo trovare una pressione: $p = \dfrac{|\vec{F}\perp|}{A}$. Per ora non conosciamo né la forza né l'area sulla quale la forza agisce.

Nel nostro caso la forza è la forza peso: $F_\mathrm{p} = mg$. Il piano su cui agisce il corpo è orizzontale quindi la forza peso del corpo agisce perpendicolarmente alla superficie: $\vec{F}\perp \equiv \vec{F}_\mathrm{p}$.

Per conoscere la forza peso abbiamo bisogno della massa.

Se sappiamo di cosa è fatto il corpo possiamo trovare la sua densità nelle tabelle. Possiamo trovare il volume del corpo perché conosciamo la forma e le dimensioni. Il volume di un cubo è $V = l^3$. Dal volume e la densità ricaviamo la massa ricordando la definizione di densità.

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = dV \tag{5.4}$$

Il corpo ha una forma cubica. L'area di appoggio è un quadrato di cui conosciamo il lato: $A = l^2$. Abbiamo trovato un modo per conoscere tutte le grandezze che ci servono.

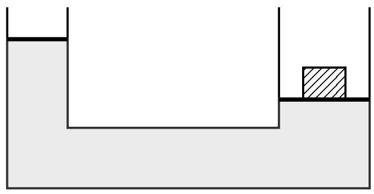
$$\begin{aligned}
l &= 12\,\text{cm} = 12 \cdot 0{,}01\,\text{m} = 0{,}12\,\text{m} && (5.5)\\
A &= l^2 = (0{,}12\,\text{m})^2 = 0{,}0144\,\text{m}^2 && (5.6)\\
V &= l^3 = (0{,}12\,\text{m})^3 = 0{,}001728\,\text{m}^3 && (5.7)\\
d &= 2700\,\text{kg/m}^3 && (5.8)\\
m &= dV = 2700\,\text{kg/m}^3 \cdot 0{,}001728\,\text{m}^3 = 4{,}66\,\text{kg} && (5.9)\\
F_\text{p} &= mg = 4{,}66\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 45{,}7\,\text{N} && (5.10)
\end{aligned}$$

Infine:

$$p = \frac{|\vec{F}_\text{p}|}{A} = \frac{45{,}7\,\text{N}}{0{,}0144\,\text{m}^2} = 3178\,\text{Pa} \tag{5.11}$$

5.2 Principio di Pascal (torchio idraulico)

Esercizio 25 *Un contenitore con un fluido ha due aperture chiuse con un pistone orizzontale di massa trascurabile. Il pistone di destra è sormontato da un grave di massa* $m = 0{,}35$ kg.
La superficie di destra vale $95\,\text{cm}^2$ *e quella di sinistra* $15\,\text{cm}^2$.
Quale forza dobbiamo applicare al pistone di sinistra affinché il fluido rimanga in equilibrio e alla stessa altezza?



Il principio di Pascal stabilisce che *se applichiamo una pressione sulla superficie di un fluido essa si trasmette inalterata al resto della superficie, in condizione di equilibrio*. Se siamo in presenza della forza di gravità, come sulla Terra, dobbiamo considerare anche la presenza di una pressione legata alla profondità del fluido, detta pressione idrostatica, come illustrato nell'esercizio successivo. Tuttavia il testo ci dice che vogliamo l'equilibrio con i pistoni alla stessa altezza, quindi quest'ultimo problema non si pone.

Se vale il principio di Pascal allora la pressione sul pistone di destra e di sinistra è la stessa.

$$P_s = P_d \tag{5.12}$$

Sviluppiamo la definizione di pressione.

$$\frac{F_s}{S_s} = \frac{F_d}{S_d} \tag{5.13}$$

Se la pressione che agisce sui pistoni è la stessa allora la forza che agisce su ogni pistone dipende dalla superficie dello stesso. Sul pistone di destra agisce la forza peso del corpo di massa m.

$$F_d = F_p = mg = 0{,}35\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 3{,}43\,\mathrm{N} \tag{5.14}$$

E quindi la pressione sul pistone di sinistra deve essere:

$$F_s = F_d \frac{S_s}{S_d} = 3{,}43\,\mathrm{N} \cdot \frac{15\,\mathrm{cm^2}}{95\,\mathrm{cm^2}} = 0{,}542\,\mathrm{N} \tag{5.15}$$

5.3 Pressione idrostatica

Esercizio 26 *Calcola la pressione in fondo a una vasca piena d'acqua fino all'orlo e la cui altezza interna è di* 5 m.

La pressione sul fondo di una vasca piena d'acqua è data dalla somma della pressione che agisce sulla superficie superiore dell'acqua (la pressione atmosferica p_0) e la pressione idrostatica del liquido che sta sopra il punto in cui vogliamo calcolare la pressione, cioè sul fondo della vasca, alla profondità h. L'altezza interna della vasca coincide in questo caso con la profondità del liquido in essa contenuto, dal momento che la vasca è riempita fino all'orlo.

La pressione atmosferica al livello del mare vale $p_0 = 1{,}013 \times 10^5$ Pa.

La pressione idrostatica p di un liquido alla profondità h è data dalla legge di Stevino:

$$p = p_0 + \rho g h \tag{5.16}$$

dove ρ è la densità del liquido ($\rho_{H_2O} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$) e g è l'accelerazione di gravità ($9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$).

Per cui

$$\begin{aligned} p &= 1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa} + 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 5\,\mathrm{m} = \\ &= 1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa} + 49050\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot \mathrm{m^2\,s^{-2}} = 101300\,\mathrm{Pa} + 49050\,\mathrm{Pa} = 152050\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{5.17}$$

Esercizio 27 *Calcola la pressione dell'acqua all'altezza di un rubinetto posto a* 75 cm *da terra, sapendo che il serbatoio dell'acqua (pieno) che lo alimenta è posto a* 11,8 m *di altezza rispetto al suolo. La profondità dell'acqua, alla base del serbatoio è* 1,2 m.

In condizioni statiche (cioè quando il rubinetto è ancora chiuso e non scorre acqua nei tubi) possiamo calcolare la pressione dell'acqua al rubinetto applicando la legge di Stevino. L'unica grandezza da considerare con attenzione è la profondità che compare nell'equazione. Questa non è certamente l'altezza del rubinetto e neanche l'altezza assoluta della vasca, ma l'altezza relativa del pelo libero dell'acqua sulla vasca rispetto all'imboccatura del rubinetto: quello che importa è l'altezza della colonna d'acqua sopra il rubinetto.

$$h = h_{\text{vasca}} + h_{\text{prof.}} - h_{\text{rub.}} = 11{,}8\,\mathrm{m} + 1{,}2\,\mathrm{m} - 75\,\mathrm{cm} = 13\,\mathrm{m} - 0{,}75\,\mathrm{m} = 12{,}25\,\mathrm{m} \tag{5.18}$$

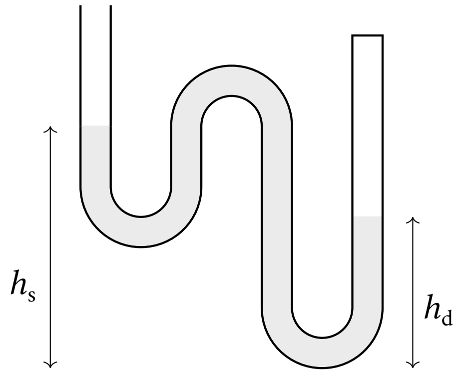
Infine:

$$\begin{aligned} p = p_0 + \rho g h = 101300\,\mathrm{Pa} + 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 12{,}25\,\mathrm{m} = \\ 101300\,\mathrm{Pa} + 120725\,\mathrm{Pa} = 221472\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{5.19}$$

5.4 Tubo a U

Esercizio 28 *Supponiamo di avere a disposizione un tubo a U riempito di acqua, con l'estremità di sinistra aperta, quello destra ermeticamente chiusa, il tutto all'equilibrio, come nell'illustrazione riportata. Il pelo libero dell'acqua vale* 67 cm *a sinistra e* 34 cm *a destra:*

1. *La pressione dell'acqua sarà maggiore a destra o a sinistra e perché?*
2. *Quanto vale la pressione nel ramo di destra e di sinistra?*



Il tubo rappresentato in figura sembra piuttosto differente da un classico tubo a U. In effetti la caratteristica principale di un tubo a U è quella di avere due imboccature alle estremità (non necessariamente in verticale) e un liquido all'interno del tubo, possibilmente con il livello in entrambe le estremità superiore al livello nel liquido tra le anse intermedie. Questa è la situazione illustrata nella nostra figura. Se il liquido è all'equilibrio allora avere solo un ansa o numerose non cambia niente.

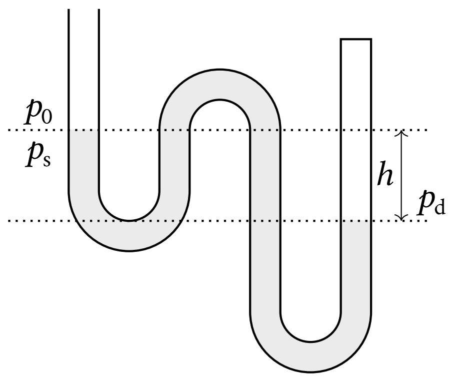
Per trovare la pressione del liquido nel tubo ad U usiamo la legge di Stevino e la legge dei vasi comunicanti. Il liquido deve essere incomprimibile.

In base alla legge dei vasi comunicanti, nel liquido posto nel tubo la pressione è la stessa allo stesso livello. D'altra parte la pressione cambia con la profondità così come indicato dalla legge di Stevino.

Nel nostro caso la pressione dell'acqua è maggiore a destra perché il livello è più basso che nel ramo di sinistra.

La pressione sul pelo libero dell'acqua a sinistra è la stessa dell'aria con la quale è in contatto e quindi è la pressione atmosferica:

$$p_s = p_0 = 101300\,\mathrm{Pa} \tag{5.20}$$



Per quanto riguarda il ramo di destra iniziamo considerando che la pressione nel liquido, allo stesso livello, è uguale a destra e a sinistra. Quindi applicando la legge di Stevino ai punti del ramo di destra che si trovano al livello di quello di sinistra possiamo scrivere:

$$p_\mathrm{d} = p_0 + dgh \tag{5.21}$$

dove h è il dislivello tra i rami.

$$h = 67\,\mathrm{cm} - 34\,\mathrm{cm} = 33\,\mathrm{cm} = 0{,}33\,\mathrm{m} \tag{5.22}$$

Infine:

$$p_\mathrm{d} = 101300\,\mathrm{Pa} + 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 0{,}33\,\mathrm{m} = 104537\,\mathrm{Pa} \tag{5.23}$$

5.5 Spinta di Archimede

Esercizio 29 *Trova se un corpo di forma cubica, il cui spigolo vale* 45 mm *e la densità è* 3000 kg m^{-3}*, posto in acqua distillata, galleggia oppure no.*

Trova inoltre quanto vale la spinta di Archimede che il liquido esercita sul cubo.

Se un corpo è solido ed è immerso in un fluido allora galleggia se la sua densità è inferiore a quella del fluido; altrimenti affonda. In questo caso la densità del corpo (3000 kg m^{-3}) è maggiore di quella dell'acqua(1000 kg m^{-3}) e quindi affonda.

La spinta di Archimede si trova con la formula:

$$S_\mathrm{A} = \rho_\mathrm{f} V_\mathrm{f} g \tag{5.24}$$

dove S_A è la spinta di Archimede, ρ_f la densità del fluido e V_f il volume di liquido spostato.

Dobbiamo prima trovare il volume del corpo. Il corpo ha forma cubica quindi il suo volume è:

$$V = l^3 = (45\,\mathrm{mm})^3 = (0{,}045\,\mathrm{m})^3 = 9{,}1125 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^3} \tag{5.25}$$

Il corpo affonda, quindi può rimanere totalmente immerso nel liquido. Infine, sostituendo i dati troviamo che:

$$S_\mathrm{A} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 9{,}1125 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 0{,}894\,\mathrm{N} \tag{5.26}$$

6 Cinematica

6.1 Diagramma orario di un moto

Esercizio 30 *Su un foglio a quadretti riporta il diagramma orario della seguente tabella.*

x(m)	t(s)
21	7,5
63	9
97	13,5
123	18

Nello studio del moto risulta di fondamentale importanza rappresentare l'andamento del moto con un grafico cartesiano. Questo è quello che vogliamo fare in questo esercizio.

Abbiamo una tabella con due variabili correlate: spazio e tempo. Tra queste il tempo è la variabile *indipendente* e lo spazio quella *dipendente* (dal tempo). In un grafico cartesiano solitamente l'asse delle ascisse è legato alla variabile indipendente e quello delle ordinate alla variabile dipendente.

Cominciamo col tracciare gli assi dando ad essi il nome della variabile che vogliamo rappresentare. Il nome dato all'asse, analogamente a quanto compare nella tabella, deve essere seguito dall'unità di misura usata scritta tra parentesi.

A questo punto vogliamo trovare l'opportuna scala di rappresentazione dei dati della tabella in modo da riempire completamente il grafico.

Partiamo dalle ascisse. Misuriamo la lunghezza in cm che va dall'origine degli assi a fondo scala. Se dividiamo questa misura per il valore più grande del tempo riportato in tabella troviamo a quanti cm deve corrispondere ogni secondo.

Lunghezza dell'asse delle ascisse = 15 cm. Valore più grande dei tempi = 18. Per cui:

$$\frac{15\ \text{cm}}{18} = 0{,}8\ \text{cm} \tag{6.1}$$

Allora possiamo scrivere che 0,8 cm ≡ 1 s.

Non esiste una regola universale per stabilire quante tacche inserire su un asse del grafico: ci sono solo ragioni di opportunità estetica e funzionale. In questo caso potremo segnare 18 tacche scrivendo un numero per ogni tacca, ma verrebbe una grafica troppo pesante. Oppure possiamo segnare 18 tacche, ma riportare il numero solo una volta ogni cinque tacche. Nel grafico che segue segniamo una tacca e un numero ogni due unità.

Facciamo la stessa cosa per l'asse delle ordinate.

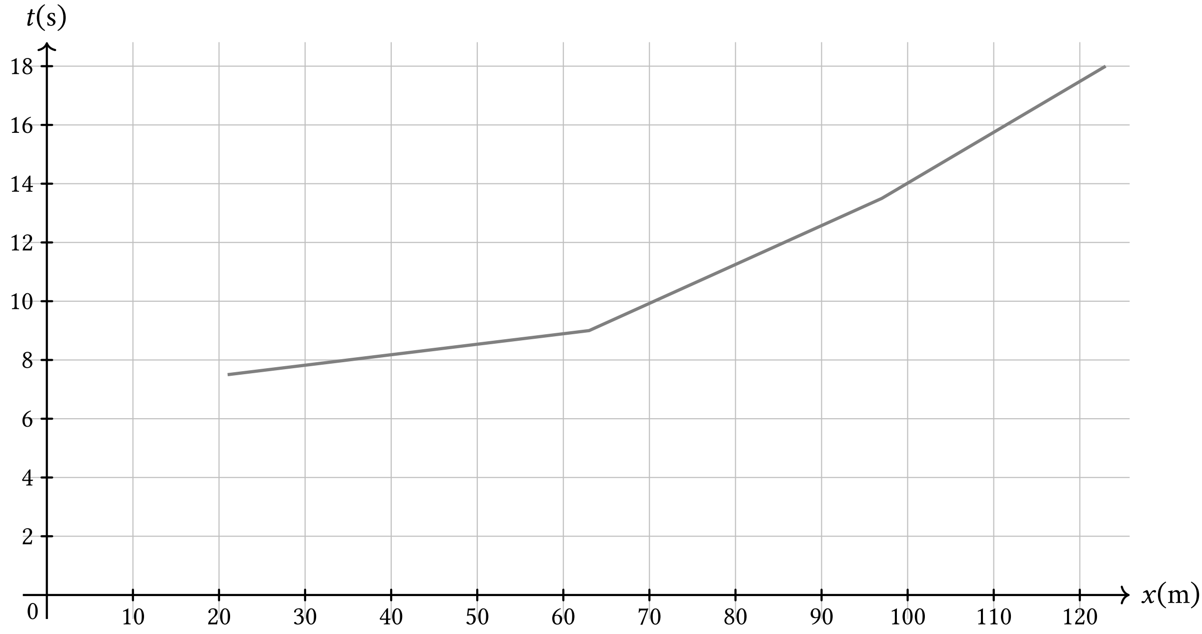
Lunghezza dell'asse delle ordinate = 7 cm. Valore più grande dello spazio = 123. Per cui:

$$\frac{7\ \text{cm}}{123} = 0{,}08\ \text{cm} \tag{6.2}$$

Allora possiamo scrivere che 0,08 cm ≡ 1 m.

In questo caso risulta impossibile segnare 123 tacche, ma possiamo agevolmente segnare una tacca ogni 10 unità.

Infine congiungiamo ogni punto del grafico con il punto successivo attraverso un segmento.



6.2 Moto rettilineo uniforme in una dimensione

Esercizio 31 *Un'automobile si muove con velocità costante sulla SS 131, da Oristano a Nuoro, dal* 95 km *al* 160 km*. Parte alle ore* 10 : 30 *e arriva alle ore* 11 : 40*. Determina le seguenti grandezze esprimendole nel sistema internazionale:*

1. *Lo spostamento effettuato.*
2. *Il tempo impiegato.*
3. *La velocità media.*

1. La definizione dello spostamento effettuato può essere $\Delta S = S_f - S_i$, cioè la differenza tra la posizione finale e la posizione iniziale.

$$\Delta S = S_f - S_i = 160\,\text{km} - 95\,\text{km} = 65\,\text{km} = 65 \times 10^3\,\text{m} = 65000\,\text{m} \tag{6.3}$$

2. Il tempo impiegato può essere definito allo stesso modo: $\Delta t = t_f - t_i$, cioè l'intervallo tra il tempo iniziale e quello finale.

$$\Delta t = t_f - t_i = 11:40\,\text{h} - 10:30\,\text{h} = 1:10\,\text{h}\,\text{(cioè un ora e 10 minuti.)} \tag{6.4}$$

   Trasformiamo questo risultato in secondi, cioè nel S.I.

$$1:10\,\text{h} = 1\,\text{h} + 10\,\text{min} = 3600\,\text{s} + 10 \cdot 60\,\text{s} = 4200\,\text{s} \tag{6.5}$$

3. La definizione di velocità media è:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{65000\,\text{m}}{4200\,\text{s}} = 15{,}5\,\text{m/s} \tag{6.6}$$

6.2.1 Moto rettilineo uniforme in una dimensione e legge oraria

Esercizio 32 *Un ciclista percorre la SS 130 da* 10 km *a* 35 km *con una velocità costante di* 28 km/h. *Determina:*

1. *Il tempo impiegato dal ciclista per andare dalla prima località alla seconda.*
2. *A quale chilometro si troverà dopo* 75 *minuti dall'inizio della corsa.*
3. *A che ora sarebbe partito da* 0 km *se è passato alle ore* 10 : 00 *a* 13 km.

Supponiamo che il moto del ciclista sia rettilineo: siccome sappiamo che la velocità è costante lo potremo considerare come un moto rettilineo uniforme. Allora, se v è il modulo della velocità e x_0 la posizione iniziale a tempo $t = 0$ s, la posizione (finale) occupata al tempo t è:

$$x = x_0 + vt \tag{6.7}$$

In questa legge oraria x ci dice anche quale sia la distanza percorsa al tempo t compresa la posizione iniziale.

1. Sappiamo dai dati che la distanza percorsa è $\Delta x = |x_2 - x_1|$, dove x_1 è la posizione iniziale e x_2 la posizione finale del ciclista lungo la strada:

$$\Delta x = |35\,\text{km} - 10\,\text{km}| = 25\,\text{km} \tag{6.8}$$

Conosciamo anche la velocità quindi possiamo ricavare il tempo impiegato dal ciclista per arrivare alla posizione finale ricavandolo dalla legge oraria del moto.

$$\Delta x = x - x_0 = vt \tag{6.9}$$

$$t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{25\,\text{km}}{28\,\text{km/h}} = \frac{25 \times 10^3\,\text{m h}}{28 \times 10^3\,\text{m}} = 0{,}89\,\text{h} = 0{,}89 \cdot 60\,\text{min} = 53\,\text{min} \tag{6.10}$$

2. Per sapere dove si troverà il ciclista dopo 75 minuti applichiamo ancora la legge oraria, che ci dice quale sia la posizione x al tempo t e per la quale possiamo scrivere che la posizione al tempo 75 minuti sarà:

$$x = x_0 + vt = 35\,\text{km} + 28\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 75\,\text{min} = 35 \times 10^3\,\text{m} + \frac{28 \times 10^3\,\text{m}}{3600\,\text{s}} \cdot (75 \cdot 60\,\text{s}) = 70000\,\text{m} \tag{6.11}$$

3. Per saper a che ora è partito da 0 km ci basta sapere quando tempo avrebbe dovuto impiegare ad arrivare a 13 km, sottraendo quel tempo alle 10 : 00 h.
In questo caso $\Delta x = 13$ km, quindi:

$$t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{13\,\text{km}}{28\,\text{km/h}} = \frac{10 \times 10^3\,\text{m h}}{28 \times 10^3\,\text{m}} = 0{,}46\,\text{h} \tag{6.12}$$

$$t_i = t_0 - t = 10{,}00\,\text{h} - 0{,}46\,\text{h} = 9{,}54\,\text{h} \tag{6.13}$$

6.2.2 Dalla legge oraria al grafico spazio-tempo

Esercizio 33 *Due auto si muovono di moto rettilineo uniforme lungo la stessa strada.*
La legge del moto delle due auto è: $S_{\mathrm{A}} = 575\,\mathrm{m} - 64\,\mathrm{m/s} \cdot t \quad ; \quad S_{\mathrm{B}} = 130\,\mathrm{m} + 48\,\mathrm{m/s} \cdot t$

1. *Rappresenta in un grafico spazio-tempo le due leggi.*
2. *Trova la distanza tra le due auto al tempo* $t = 0\,\mathrm{s}$.
3. *Trova la distanza tra le due auto al tempo 7 minuti.*
4. *Trova in che istante la distanza tra le auto è* 300 m

1. Abbiamo due auto che si muovono di moto rettilineo uniforme: lo capiamo dalla loro legge del moto. Il grafico associato ai due moti è una retta: per rappresentare le due leggi in un grafico dobbiamo disegnare una retta.
   Per disegnare una retta basta tracciare due punti: si scelgono a piacimento due valori per la variabile indipendente (nel nostro caso il tempo t) e si ricavano i corrispondenti valori della variabile dipendente (nel nostro caso la posizione S). Con questi calcoli otteniamo le coordinate in ascissa e ordinata dei due punti.
   Se ci riferiamo alla legge del moto conviene considerare, per semplicità, cosa accade al tempo $t_1 = 0\,\mathrm{s}$ e al tempo $t_2 = 1\,\mathrm{s}$. Troviamo in corrispondenza la posizione e possiamo trovare le coordinate di due punti per le due leggi del moto.

$$S_{\mathrm{A}}(0\,\mathrm{s}) = 575\,\mathrm{m} - 64\,\mathrm{m/s} \cdot 0\,\mathrm{s} = 575\,\mathrm{m} \tag{6.14}$$

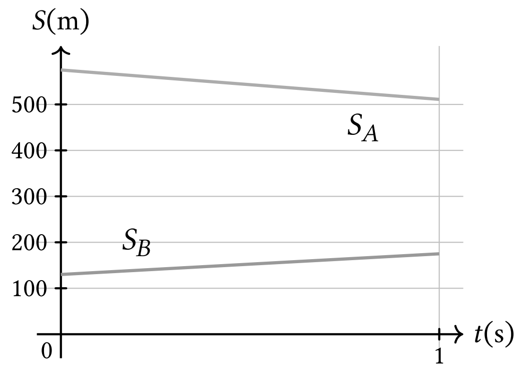
$$S_{\mathrm{A}}(1\,\mathrm{s}) = 575\,\mathrm{m} - 64\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} = 511\,\mathrm{m} \tag{6.15}$$

   I due punti sono $P_{\mathrm{A}_1}(0\,\mathrm{s}, 575\,\mathrm{m})$ e $P_{\mathrm{A}_2}(1\,\mathrm{s}, 511\,\mathrm{m})$.
   Analogamente per la seconda auto.

$$S_{\mathrm{B}}(0\,\mathrm{s}) = 130\,\mathrm{m} + 48\,\mathrm{m/s} \cdot 0\,\mathrm{s} = 130\,\mathrm{m} \tag{6.16}$$

$$S_{\mathrm{B}}(1\,\mathrm{s}) = 130\,\mathrm{m} + 48\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} = 178\,\mathrm{m} \tag{6.17}$$

   I due punti sono $P_{\mathrm{B}_1}(0\,\mathrm{s}, 130\,\mathrm{m})$ e $P_{\mathrm{B}_2}(1\,\mathrm{s}, 178\,\mathrm{m})$.
   Il tempo va in ascissa e la posizione in ordinata.



   La retta associata alla prima legge del moto è decrescente: la velocità è negativa. Viceversa per la seconda legge.

2. La distanza ΔS tra le auto è la differenza tra le loro posizioni al tempo indicato, presa col valore assoluto: una differenza negativa non avrebbe significato fisico.

$$|\Delta S| = |S_{\mathrm{A}}(0\,\mathrm{s}) - S_{\mathrm{B}}(0\,\mathrm{s})| = |575\,\mathrm{m} - 64\,\mathrm{m/s} \cdot 0\,\mathrm{s} - (130\,\mathrm{m} + 48\,\mathrm{m/s} \cdot 0\,\mathrm{s})| = |575\,\mathrm{m} - (130\,\mathrm{m})| = 445\,\mathrm{m} \tag{6.18}$$

oppure, direttamente possiamo dire che la distanza al tempo $t = 0$ s è la differenza tra le loro posizioni iniziali:

$$|\Delta S| = |S_{\mathrm{A}_0} - S_{\mathrm{B}_0}| = |575\,\mathrm{m} - (130\,\mathrm{m})| = 445\,\mathrm{m} \tag{6.19}$$

L'ordine con cui scriviamo le due posizioni nell'espressione della distanza non cambia l'unico risultato possibile.

3. La risposta è analoga a quella precedente con il tempo t calcolato a 7 minuti. Trasformiamo questo istante in secondi:

$$t = 7\,\mathrm{min} = 7 \cdot 60\,\mathrm{s} = 420\,\mathrm{s} \tag{6.20}$$

$$\begin{gathered} |\Delta S| = |S_{\mathrm{A}}(420\,\mathrm{s}) - SB(420\,\mathrm{s})| = \\ |575\,\mathrm{m} - 64\,\mathrm{m/s} \cdot 420\,\mathrm{s} - (130\,\mathrm{m} + 48\,\mathrm{m/s} \cdot 420\,\mathrm{s})| = |-26305\,\mathrm{m} - (20290\,\mathrm{m})| = 46595\,\mathrm{m} \end{gathered} \tag{6.21}$$

4. Per trovare l'istante in cui abbiamo una certa distanza dobbiamo scrivere l'equazione della distanza tra le auto, trovando l'incognita t. In questo caso abbiamo però due soluzioni a seconda dell'ordine con cui sottraiamo le posizioni. Fisicamente, infatti, le auto si troveranno ad una certa distanza sia *prima* di incontrarsi che *dopo*.
Cominciamo col sottrarre la posizione di S_B a quella di S_A, visto che si trova più avanti.

$$\begin{aligned} |\Delta S| = |S_{\mathrm{A}}(t) - S_{\mathrm{B}}(t)| = |575\,\mathrm{m} - 64\,\mathrm{m/s} \cdot t - (130\,\mathrm{m} + 48\,\mathrm{m/s} \cdot t)| &= 300\,\mathrm{m} \\ 575\,\mathrm{m} - 64\,\mathrm{m/s} \cdot t - 130\,\mathrm{m} - 48\,\mathrm{m/s} \cdot t &= 300\,\mathrm{m} \\ 575\,\mathrm{m} - 300\,\mathrm{m} - 130\,\mathrm{m} &= 64\,\mathrm{m/s} \cdot t + 48\,\mathrm{m/s} \cdot t \\ 145\,\mathrm{m} &= 112\,\mathrm{m/s} \cdot t \\ t &= \frac{145\,\mathrm{m}}{112\,\mathrm{m/s}} = 1{,}29\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{6.22}$$

Adesso sottraiamo la posizione di S_A a quella di S_B.

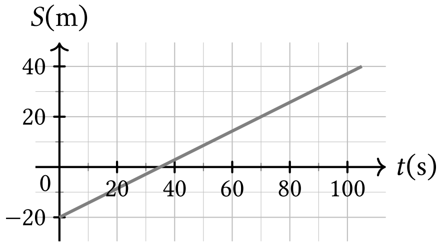
$$\begin{aligned} |\Delta S| = |S_{\mathrm{B}}(t) - S_{\mathrm{A}}(t)| = |130\,\mathrm{m} + 48\,\mathrm{m/s} \cdot t - (575\,\mathrm{m} - 64\,\mathrm{m/s} \cdot t)| &= 300\,\mathrm{m} \\ 130\,\mathrm{m} + 48\,\mathrm{m/s} \cdot t - 575\,\mathrm{m} + 64\,\mathrm{m/s} \cdot t &= 300\,\mathrm{m} \\ 64\,\mathrm{m/s} \cdot t + 48\,\mathrm{m/s} \cdot t &= 575\,\mathrm{m} + 300\,\mathrm{m} - 130\,\mathrm{m} \\ 112\,\mathrm{m/s} \cdot t &= 745\,\mathrm{m} \\ t &= \frac{745\,\mathrm{m}}{112\,\mathrm{m/s}} = 6{,}65\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{6.23}$$

Dal punto di vista matematico un'equazione col valore assoluto del tipo scritto $|\Delta S| = 300$ m si traduce in due equazioni (quelle svolte qui sopra), una col più e una col meno $\Delta S = \pm 300$ m.

6.2.3 Dal grafico spazio-tempo alla legge oraria

Esercizio 34 *Abbiamo un moto descritto dal diagramma orario disegnato qui di fianco.*

1. *Trova la legge del moto.*
2. *Quanto spazio ha percorso l'oggetto dopo 5 minuti dal tempo $t = 0$ s?*



1. Una retta in un grafico spazio-tempo è associata ad un moto rettilineo uniforme. Quindi la legge del moto è:
$$S = S_0 + v \cdot t \tag{6.24}$$
dove S_0 è la posizione del corpo al tempo $t = 0$ s e v è la velocità.
Questa legge è anche quella di una retta in forma esplicita nel piano cartesiano: esplicita perché la variabile dipendente y è messa in evidenza.
$$y = mx + q \tag{6.25}$$
In questa relazione m è chiamato coefficiente angolare e ci dà indicazioni sull'inclinazione della retta. Il termine q rappresenta il punto di intersezione della retta con l'asse y. Tra questa relazione e la legge del moto c'è completa corrispondenza: la variabile x corrispondente al tempo t, la variabile y alla posizione S, il parametro m alla velocità, il parametro q al termine S_0.
Per ricavare la legge del moto leggiamo dal grafico quale valore ha lo spazio nel punto in cui la retta intercetta l'asse delle ordinate: quello è il punto in cui si trova il corpo all'istante $t = 0$ s.
$$S_0 = -20\ \mathrm{m} \tag{6.26}$$
Per ricavare la velocità ricordiamo la definizione di velocità media:
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} \tag{6.27}$$
Il corpo percorre uno spazio $\Delta S = 20$ m per andare da $S_i = -20$ m a $S_f = 0$ m; questo avviene in un intervallo di tempo $\Delta t = 35$ s dall'istante $t_i = 0$ s all'istante $t_f = 35$ s. Per cui:
$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{0\ \mathrm{m} - (-20\ \mathrm{m})}{35\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s}} = \frac{20\ \mathrm{m}}{35\ \mathrm{s}} = 0{,}57\ \mathrm{m/s} \tag{6.28}$$
La retta è inclinata verso l'alto: il coefficiente angolare e quindi la velocità del moto devono essere positivi.
Infine la legge del moto è:
$$S = -20\ \mathrm{m} + 0{,}57\ \mathrm{m/s} \cdot t \tag{6.29}$$

2. Per sapere quanto spazio ha percorso il corpo dobbiamo trovare la distanza tra dove è arrivato e dove è partito. La legge del moto ci dice sempre dove il corpo si trova; non sempre ci dice anche quanto spazio ha percorso.
Il corpo, all'istante $t = 0$ s, si trova nella posizione:
$$S_1 = -20\ \mathrm{m} + 0{,}57\ \mathrm{m/s} \cdot 0\ \mathrm{s} = -20\ \mathrm{m} \tag{6.30}$$

All'istante $t = 5$ minuti si trova nella posizione:

$$S_2 = -20\,\text{m} + 0{,}57\,\text{m/s} \cdot (5 \cdot 60\,\text{s}) = 151\,\text{m} \tag{6.31}$$

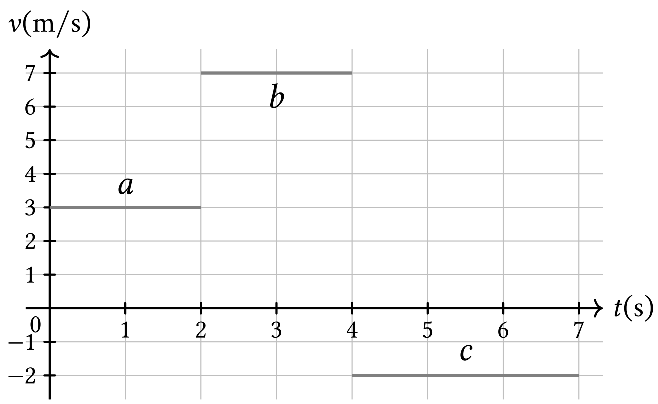
Infine la distanza percorsa è:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = 151\,\text{m} - (-20\,\text{m}) = 171\,\text{m} \tag{6.32}$$

Nota: in questo esercizio abbiamo indicato la legge del moto indicando la posizione con S invece che come x nell'esercizio precedente: questo per non confondere la x della posizione con la x dell'equazione di una retta nella forma parametrica. Molti libri delle superiori esprimono la legge del moto usando comunque la S per la posizione.

6.2.4 Dal grafico velocità-tempo alla legge oraria

Esercizio 35 *Qui di seguito è riportato il diagramma orario di un moto.*
Il corpo parte dalla posizione $x = 5$ m
Trova la legge del moto che descrive ogni tratto indicato.



Il grafico rappresenta il diagramma orario relativo ad un moto unidimensionale. Supponiamo, in mancanza di altre informazioni, che il moto avvenga su una retta.

Tratto a

Il primo tratto è un segmento di retta orizzontale: la velocità è costante ($v_a = 3$ m/s). Si tratta di un moto rettilineo uniforme. La legge oraria ha la forma $x = x_0 + vt$.
La posizione iniziale non è mai deducibile dal grafico velocità-tempo, ma ci viene esplicitamente detta con i dati del problema: $x_0 = 5$ m. Allora la legge oraria del tratto a è:

$$x_\text{a}(t) = 3\,\text{m} + 5\,\text{m/s} \cdot t \tag{6.33}$$

Tratto b

Il secondo tratto è un segmento di retta orizzontale: la velocità è ancora costante ($v_b = 7$ m/s) e quindi si tratta ancora di un moto rettilineo uniforme. La posizione iniziale del tratto **b** la ricaviamo calcolando la posizione finale del tratto precedente, al nuovo tempo iniziale che è $t = 2$ s.

$$x_\text{a}(2\,\text{s}) = 5\,\text{m} + 3\,\text{m/s} \cdot 2\,\text{s} = 11\,\text{m} \tag{6.34}$$

Infine, se consideriamo il tempo $t = 2$ s come il nuovo tempo iniziale, allora la legge del moto è:

$$x_\text{b}(t) = 11\,\text{m} + 7\,\text{m/s} \cdot t \tag{6.35}$$

Oppure, se vogliamo riferirci allo stesso tempo indicato nel tratto precedente, possiamo indicare il tempo che compare nella legge come la differenza tra il tempo t e quello dell'instante iniziale del nuovo tratto.

$$x_b(t) = 11\,\text{m} + 7\,\text{m/s} \cdot (t - 2\,\text{s}) \tag{6.36}$$

Tratto c

Nell'ultimo tratto il moto è del tutto analogo a quanto visto nei tratti precedenti: la velocità è ancora costante ($v_c = -2\,\text{m/s}$) e quindi si tratta ancora di un moto rettilineo uniforme. Nuovamente la posizione iniziale del tratto **c** la ricaviamo calcolando la posizione finale del tratto precedente, al nuovo tempo iniziale che è $t = 4\,\text{s}$, se partiamo dallo zero iniziale, oppure $t = 2\,\text{s}$, se partiamo dall'inizio del tratto **b**.

$$x_b(4\,\text{s}) = 11\,\text{m} + 7\,\text{m/s} \cdot (4\,\text{s} - 2\,\text{s}) = 25\,\text{m} \tag{6.37}$$

Oppure:

$$x_b(2\,\text{s}) = 11\,\text{m} + 7\,\text{m/s} \cdot 2\,\text{s} = 25\,\text{m} \tag{6.38}$$

Infine, se consideriamo il tempo $t = 4\,\text{s}$ come il nuovo tempo iniziale, allora la legge del moto è:

$$x_c(t) = 25\,\text{m} - 2\,\text{m/s} \cdot t \tag{6.39}$$

Oppure, se vogliamo riferirci allo stesso tempo indicato nel tratto precedente, possiamo indicare il tempo che compare nella legge come la differenza tra il tempo t e quello dell'instante iniziale del nuovo tratto.

$$x_c(t) = 25\,\text{m} - 2\,\text{m/s} \cdot (t - 4\,\text{s}) \tag{6.40}$$

Esercizio 36 *Due auto partono alle estremità opposte di una strada rettilinea lunga* 3 km. *La prima si muove con una velocità di* 70 km/h. *La seconda si muove con una velocità di* 85 km/h.

1. *In che punto della strada si incontreranno?*
2. *Quanto tempo impiegano ad incontrarsi?*
3. *In che istante la loro distanza è* 1,5 km *?*

Supponiamo che le auto si muovano con velocità costante e quindi di moto rettilineo uniforme.

La legge del moto rettilineo uniforme ci dice che partendo con velocità costante v dalla posizione x_0 dopo un tempo t si arriva alla posizione x:

$$x = x_0 + vt \tag{6.41}$$

La velocità della prima auto è:

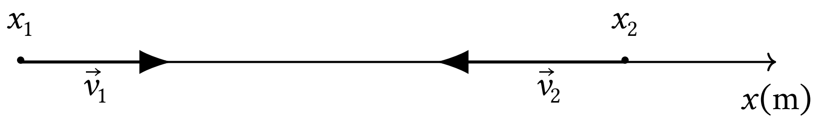
$$v_1 = 70\,\text{km/h} = \frac{70000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 19{,}4\,\text{m/s} \tag{6.42}$$

La velocità della seconda auto è:

$$v_2 = 85\,\text{km/h} = \frac{85000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 23{,}6\,\text{m/s} \tag{6.43}$$

Per descrivere completamente il moto delle due auto dobbiamo utilizzare un riferimento comune e un sistema di coordinate. Il riferimento comune è la strada. Come sistema di coordinate prendiamo una retta orientata verso destra.

Prendiamo come positivo il verso di percorrenza della prima auto e fissiamo l'estremità sinistra della strada a 0 m. Allora la prima auto parte dalla posizione $x_1 = 0\,\text{m}$ e si muove verso destra con velocità positiva. La seconda auto di conseguenza parte dalla posizione $x_2 = 3000\,\text{m}$ e si muove verso sinistra: la sua velocità ha segno negativo.



Scriviamo la legge oraria delle due auto:

$$x(t)_1 = x_1 + v_1 t = 0\,\mathrm{m} + (19{,}4\,\mathrm{m/s})t = (19{,}4\,\mathrm{m/s})t \tag{6.44}$$

$$x(t)_2 = x_2 + v_2 t = 3000\,\mathrm{m} - (23{,}6\,\mathrm{m/s})t \tag{6.45}$$

Se le auto si incontrano in punto allora deve avvenire che:

$$x(t)_1 = x(t)_2 \tag{6.46}$$

Se eguagliamo le due leggi orarie possiamo ricavare l'instante in cui le auto si incontrano.

$$(19{,}4\,\mathrm{m/s})t = 3000\,\mathrm{m} - (23{,}6\,\mathrm{m/s})t \tag{6.47}$$

$$t(19{,}4\,\mathrm{m/s} + 23{,}6\,\mathrm{m/s}) = 3000\,\mathrm{m} \tag{6.48}$$

$$t = \frac{3000\,\mathrm{m}}{(19{,}4\,\mathrm{m/s} + 23{,}6\,\mathrm{m/s})} = 69{,}8\,\mathrm{s} \tag{6.49}$$

Se sostituiamo questo tempo in una qualsiasi delle due equazioni del moto troviamo dove le due auto si incontrano:

$$x(t)_1 = 19{,}4\,\mathrm{m/s} \cdot 69{,}8\,\mathrm{s} = 1353\,\mathrm{m} \tag{6.50}$$

6.3 Moto uniformemente accelerato

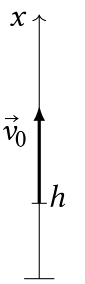
Esercizio 37 *Un sasso è lanciato verso l'alto con velocità iniziale di* 65 km/h*, da una altezza di* 4 m*.*

1. *Quanto tempo impiega ad arrivare nel punto più alto?*
2. *Se trascuriamo l'attrito dell'aria, fino a che altezza arriva?*

1. Il corpo si muove verso l'alto di moto uniformemente accelerato, come rappresentato qui di fianco.
   La velocità iniziale è diretta verso l'alto, concorde con il verso positivo dell'asse x, per cui la possiamo considerare positiva e nel SI vale:

$$v_1 = 65\,\mathrm{km/h} = \frac{65000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 18{,}1\,\mathrm{m/s} \tag{6.51}$$

   L'accelerazione, nello stesso sistema di riferimento, è diretta verso il basso: di conseguenza la consideriamo negativa e vale $9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
   Quando il corpo, lanciato verso l'alto, raggiunge l'altezza massima la sua velocità è zero.
   Per un moto uniformemente accelerato vale questa relazione:



$$v(t) = v_0 + at \tag{6.52}$$

   Se t è l'istante in cui il corpo raggiunge la la massima altezza, in quell'istante $v(t)$ vale zero. Allora, dalla relazione precedente, possiamo ricavare il tempo t.

$$0\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 18{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}} - (9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}})t \tag{6.53}$$

$$t = \frac{18{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 1{,}84\,\mathrm{s} \tag{6.54}$$

2. La legge del moto è:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{6.55}$$

   Dove $x(t)$ è la posizione al tempo t; x_0 è la posizione di partenza; v_0 è la velocità iniziale e a è l'accelerazione di gravità.
   Se sostituiamo il tempo t appena trovato in questa relazione troviamo l'altezza massima alla quale arriva il corpo.

$$x(1{,}84\,\mathrm{s}) = 4\,\mathrm{m} + 18{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 1{,}84\,\mathrm{s} - \frac{1}{2}9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(1{,}84\,\mathrm{s})^2 = 20{,}7\,\mathrm{m} \tag{6.56}$$

Esercizio 38 *Uno spazzacamino cade dal tetto di una casa. Per toccare terra impiega* 1,5 s*.*

1. *Qual è l'accelerazione con cui cade?*
2. *Qual è la velocità con cui tocca il suolo se parte da fermo?*
3. *Qual è l'altezza da cui cade, cioè qual è la distanza che percorre cadendo?*

1. Il moto di un grave, cioè di un oggetto che cade spinto dalla sola forza di gravità, è un moto uniformemente accelerato. L'accelerazione è quella di gravità: $9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Questo è corretto se

non c'è l'aria che rallenta il moto. Poiché l'attrito dell'aria dipende dalla velocità dell'oggetto ed in questo caso lo spazzacamino cade per (soli?) due secondi, l'attrito può essere trascurato.

2. La velocità aumenta linearmente con il tempo secondo la legge:

$$v = v_0 + at \tag{6.57}$$

dove a è l'accelerazione di gravità e v_0 è la velocità iniziale (qui nulla). Quindi:

$$v = gt = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}5\,\mathrm{s} = 14{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{6.58}$$

3. Per sapere da che altezza cade usiamo la legge oraria del moto:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{6.59}$$

Dove S è la distanza percorsa al tempo t (cioè l'altezza da cui cade); S_0 è la posizione di partenza (supponiamo che la posizione iniziale sia nulla e che il verso positivo del moto sia verso il basso); v_0 è la velocità iniziale (qui nulla) e a è l'accelerazione di gravità. Quindi:

$$S = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1{,}5\,\mathrm{s})^2 = 11{,}04\,\mathrm{m} \tag{6.60}$$

Esercizio 39 *Un treno si muove alla velocità di* 110 km/h *verso un passaggio a livello posto a* 6 km *di distanza. Un auto, invece, procede nello stesso istante verso lo stesso passaggio a livello con una velocità di* 90 km/h *da una distanza di* 5 km.

1. *Chi riuscirà ad arrivare prima al passaggio a livello?*
2. *Quanto deve accelerare l'auto per arrivare con un vantaggio di almeno* 30 s *prima che si chiudano le barriere del passaggio a livello?*
3. *Quale dovrebbe essere la velocità finale dell'automobile se comincia subito ad accelerare in maniera uniforme? Riuscirà a non superare i limiti di velocità?*

1. Sia il treno che l'auto si muovono di moto rettilineo uniforme.
La velocità del treno è:

$$v_\mathrm{t} = 110\,\mathrm{km/h} = \frac{110000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 30{,}5\,\mathrm{m/s} \tag{6.61}$$

La velocità dell'auto è:

$$v_\mathrm{a} = 90\,\mathrm{km/h} = \frac{90000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 25\,\mathrm{m/s} \tag{6.62}$$

I due corpi si muovono con velocità costante. Supponiamo che si muovano su una retta e descriviamo il loro moto con la legge del moto rettilineo uniforme. Questa ci dice che partendo con velocità costante v dalla posizione x_0 dopo un tempo t si arriva alla posizione x:

$$x = x_0 + vt \tag{6.63}$$

Supponendo che $x_0 = 0\,\mathrm{m}$ per entrambi i corpi (ognuno nella sua traiettoria) possiamo trovare il tempo t_t impiegato dal treno e quello t_a impiegato dall'auto a giungere al passaggio al livello:

$$t_\mathrm{t} = \frac{x_\mathrm{t}}{v_\mathrm{t}} = \frac{6000\,\mathrm{m}}{30{,}5\,\mathrm{m/s}} = 197\,\mathrm{s} \tag{6.64}$$

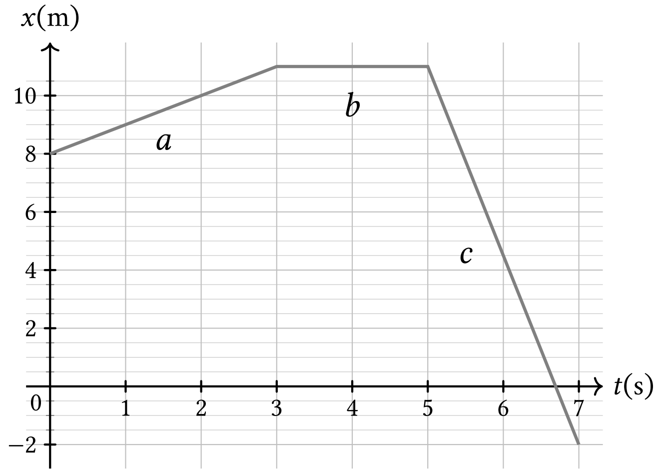
$$t_\mathrm{a} = \frac{x_\mathrm{a}}{v_\mathrm{a}} = \frac{5000\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{m/s}} = 200\,\mathrm{s} \tag{6.65}$$

Quindi arriverà prima il treno.

2. Se l'auto accelera, il moto può essere considerato uniformemente accelerato.
   La legge del moto sarà:
$$x = x_0 + v_a t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{6.66}$$
   In questa legge conosciamo già le grandezze x, x_0 e v_a. Il tempo è quello precedentemente attribuito al treno meno i 30 s di vantaggio che vogliamo dare all'auto. Quindi:
$$t = t_t - 30\,\mathrm{s} = 197\,\mathrm{s} - 30\,\mathrm{s} = 167\,\mathrm{s} \tag{6.67}$$
   L'unica grandezza ancora incognita della legge è l'accelerazione.
   L'espressione diventa un'equazione di primo grado in a che mettiamo in evidenza:
$$x - v_a t = \frac{1}{2} a t^2 \tag{6.68}$$
$$a = 2\frac{x - v_a t}{t^2} = 2 \cdot \frac{5000\,\mathrm{m} - 25\,\mathrm{m/s} \cdot 167\,\mathrm{s}}{167\,\mathrm{s}^2} = 0{,}059\,\mathrm{m/s^2} \tag{6.69}$$
   Questa accelerazione è fortemente irrealistica proprio per la sua piccolezza: un'auto accelererebbe maggiormente nei primi secondi per poi stabilizzare la sua velocità.
3. In ogni caso, tenendo quella accelerazione per tutto il tempo indicato la velocità finale sarebbe:
$$v_f = v_a + at = 25\,\mathrm{m/s} + 0{,}059\,\mathrm{m/s^2} \cdot 167\,\mathrm{s} = 34{,}9\,\mathrm{m/s} = 125\,\mathrm{km/h} \tag{6.70}$$

6.3.1 Dal grafico spazio-tempo alla legge oraria

Esercizio 40 *Qui di seguito è riportato il diagramma orario di un moto.*
Trova la legge del moto che descrive ogni tratto della traiettoria indicata.



Il moto avviene in una dimensione. Supponiamo per semplicità che avvenga su una retta. Il fatto che le posizioni siano indicate su un unico asse non significa automaticamente che si riferiscano ad una retta: potrebbe trattarsi della posizione su una curva.

Tratto a

Il tratto a è un segmento di retta: si tratta quindi del grafico di un moto rettilineo uniforme.
La legge oraria del moto è:
$$x(t) = x_0 + vt \tag{6.71}$$

La posizione iniziale x_0 ($x_0 = 8$ m) si legge direttamente nel grafico al tempo iniziale $t = 0$ s.

La velocità è data dall'inclinazione della retta. Oppure è uguale alla velocità media ottenuta prendendo due punti qualsiasi di quel tratto di retta. Prendiamo gli estremi del segmento:

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{11\,\text{m} - 8\,\text{m}}{3\,\text{s} - 0\,\text{s}} = \frac{3\,\text{m}}{3\,\text{s}} = 1{,}0\,\text{m/s} \tag{6.72}$$

La legge oraria del tratto *a* è:

$$x_a(t) = 8\,\text{m} + (1\,\text{m/s})t \tag{6.73}$$

Tratto b

Il tratto *b* è un segmento di retta orizzontale: il corpo è fermo nella sua posizione iniziale.

$$x_b(t) = 11\,\text{m} \tag{6.74}$$

Tratto c

Il tratto *c* è un segmento di retta: si tratta quindi del grafico di un moto rettilineo uniforme.

La posizione iniziale x_0 si legge direttamente nel grafico al tempo iniziale $t = 5$ s: $x_0 = 11$ m.

Analogamente al primo tratto ricaviamo la velocità prendendo gli estremi di quel segmento di retta.

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-2\,\text{m} - 11\,\text{m}}{7\,\text{s} - 5\,\text{s}} = \frac{-13\,\text{m}}{2\,\text{s}} = 6{,}5\,\text{m/s} \tag{6.75}$$

Infine c'è da considerare che nella usuale legge oraria x_0 e v_0 si riferiscono al tempo iniziale $t = 0$ s. Nel nostro caso si riferiscono al tempo $t_i = 5$ s. Per cui, per la correttezza della nostra legge, dobbiamo sottrarre questo tempo da t, sostituendo alla variabile t la variabile $t - t_i$. É come se traslassimo nel tempo tutto quanto.

La legge oraria del tratto *c* è:

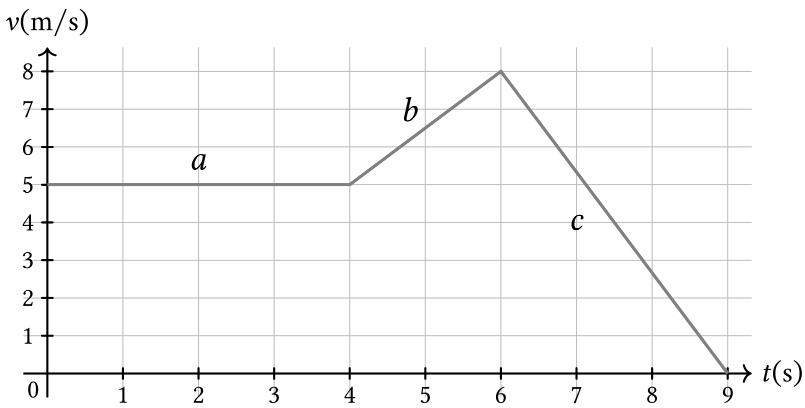
$$x_c(t) = x_0 + v(t - t_i) = 11\,\text{m} - (6{,}5\,\text{m/s})(t - 5\,\text{s}) \tag{6.76}$$

6.3.2 Dal grafico velocità-tempo alla legge oraria

Esercizio 41 *Qui di seguito è riportato il diagramma orario di un moto.*

Il corpo parte dalla posizione $x = 3$ m

Trova la legge del moto che descrive ogni tratto della traiettoria indicata.



Il grafico rappresenta il diagramma orario relativo ad un moto unidimensionale. Supponiamo, in mancanza di altre informazioni, che il moto avvenga su una retta.

Tratto a

Il primo tratto è un segmento orizzontale: la velocità è costante ($v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$). Si tratta di un moto rettilineo uniforme. La posizione iniziale non è mai deducibile dal grafico. Ci viene esplicitamente detto con i dati del problema: $x_0 = 3\,\mathrm{m}$.

La legge oraria del tratto *a* è:

$$x_\mathrm{a}(t) = 3\,\mathrm{m} + (5\,\mathrm{m/s})t \tag{6.77}$$

Tratto b

Il secondo tratto è un segmento di retta non orizzontale: la velocità sta aumentando linearmente. Si tratta di un moto uniformemente accelerato. La legge del moto sarà:

$$x = x_0 + v_\mathrm{a}t + \frac{1}{2}at^2 \tag{6.78}$$

La posizione iniziale la ricaviamo calcolando la posizione finale del tratto precedente al nostro tempo iniziale ($t = 4\,\mathrm{s}$).

$$x_\mathrm{a}(4\,\mathrm{s}) = 3\,\mathrm{m} + (5\,\mathrm{m/s})(4\,\mathrm{s}) = 23\,\mathrm{m} \tag{6.79}$$

L'accelerazione, essendo costante, può essere determinata come accelerazione media tra due punti del nostro tratto. Prendiamo i punti estremi.

$$a_\mathrm{m} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{8\,\mathrm{m/s} - 5\,\mathrm{m/s}}{6\,\mathrm{s} - 4\,\mathrm{s}} = \frac{3\,\mathrm{m/s}}{2\,\mathrm{s}} = 1{,}5\,\mathrm{m/s^2} \tag{6.80}$$

Infine, come abbiamo osservato nell'esercizio precedente, la legge oraria viene scritta considerando x_0 e v_0 al tempo iniziale $t = 0\,\mathrm{s}$. Nel nostro caso si riferiscono al tempo $t_\mathrm{i} = 4\,\mathrm{s}$. Per cui, per la correttezza della nostra legge, dobbiamo sottrarre questo tempo da t, sostituendo alla variabile t la variabile $t - t_\mathrm{i}$. É come se traslassimo nel tempo tutto quanto. Quindi la legge del moto è:

$$x_\mathrm{b}(t) = x_0 + v_\mathrm{a}(t - t_\mathrm{i}) + \frac{1}{2}a(t - t_\mathrm{i})^2 = 23\,\mathrm{m} + (5\,\mathrm{m/s})(t - 4\,\mathrm{s}) + (0{,}75\,\mathrm{m/s^2})(t - 4\,\mathrm{s})^2 \tag{6.81}$$

Tratto c

Nell'ultimo tratto il moto è del tutto analogo a quanto visto nel tratto precedente. L'unica differenza sostanziale è che ci aspettiamo di avere un'accelerazione negativa in quanto la velocità va diminuendo.

La legge del moto sarà:

$$x = x_0 + v_\mathrm{a}t + \frac{1}{2}at^2 \tag{6.82}$$

La posizione iniziale la ricaviamo calcolando la posizione finale del tratto precedente al nostro tempo iniziale ($t = 6\,\mathrm{s}$).

$$x_\mathrm{b}(4\,\mathrm{s}) = 23\,\mathrm{m} + (5\,\mathrm{m/s})(6\,\mathrm{s} - 4\,\mathrm{s}) + (0{,}75\,\mathrm{m/s^2})(6\,\mathrm{s} - 4\,\mathrm{s})^2 = 23\,\mathrm{m} + 10\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} = 46\,\mathrm{m} \tag{6.83}$$

L'accelerazione, essendo costante, può essere determinata come accelerazione media tra due punti del nostro tratto. Prendiamo i punti estremi.

$$a_\mathrm{m} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0\,\mathrm{m/s} - 8\,\mathrm{m/s}}{9\,\mathrm{s} - 6\,\mathrm{s}} = \frac{-8\,\mathrm{m/s}}{3\,\mathrm{s}} = -2{,}66\,\mathrm{m/s^2} \tag{6.84}$$

Infine, come abbiamo osservato nell'esercizio precedente, la legge oraria viene scritta considerando x_0 e v_0 al tempo iniziale $t = 0$ s. Nel nostro caso si riferiscono al tempo $t_\mathrm{i} = 6$ s. Per cui, per la correttezza della nostra legge, dobbiamo sottrarre questo tempo da t, sostituendo alla variabile t la variabile $t - t_\mathrm{i}$. Quindi la legge del moto è:

$$x_\mathrm{b}(t) = x_0 + v_\mathrm{a}(t - t_\mathrm{i}) + \frac{1}{2}a(t - t_\mathrm{i})^2 = 46\ \mathrm{m} + (8\ \mathrm{m/s})(t - 6\ \mathrm{s}) - (1{,}33\ \mathrm{m/s^2})(t - 6\ \mathrm{s})^2 \qquad (6.85)$$

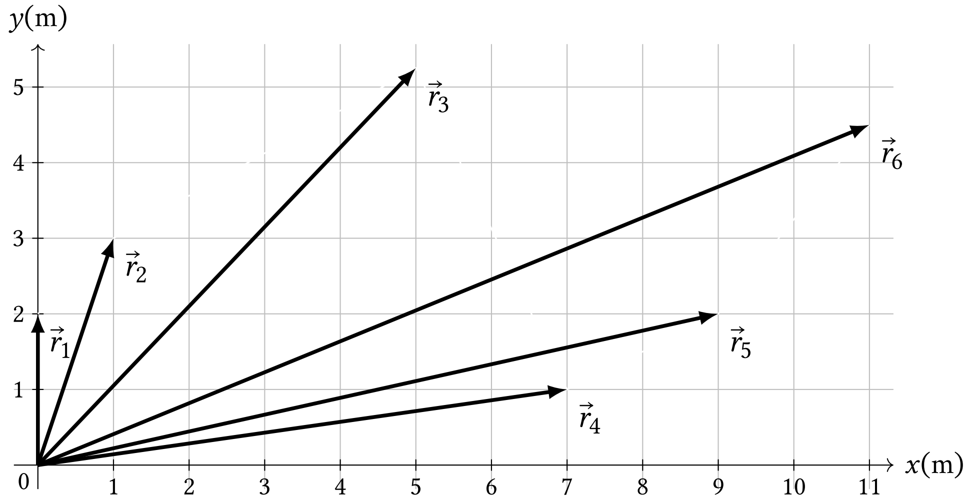
6.4 Posizione, velocità e accelerazione come vettori

Esercizio 42 *Sono riportati qui di seguito alcuni punti successivi presi dalla traiettoria di un corpo. Tra un punto e il successivo intercorre un intervallo di* 1 s*. Le coordinante dei punti sono in metri.*

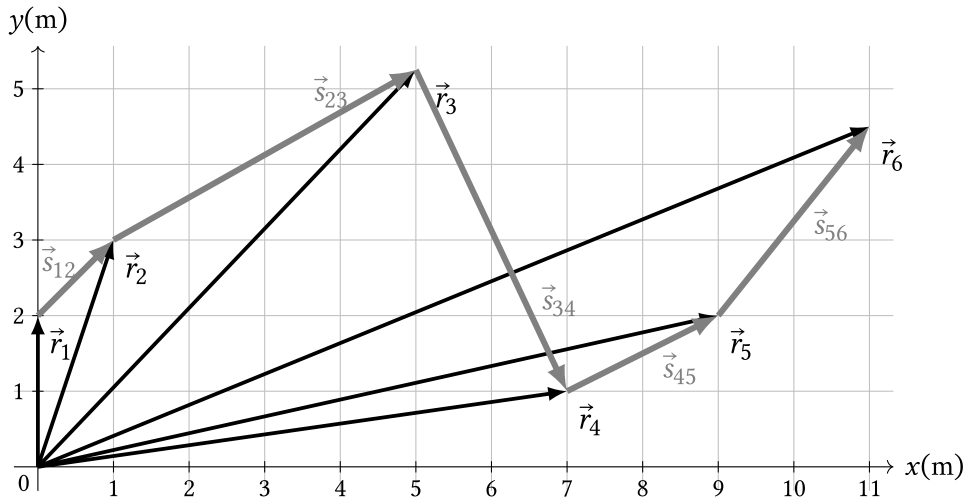
1. *Riporta su un piano cartesiano il vettore posizione relativo ad ogni punto.*
2. *Disegna nel grafico il vettore spostamento tra una posizione e la successiva.*
3. *Disegna nel grafico il vettore velocità media tra una posizione e la successiva*
4. *Disegna nel grafico il vettore accelerazione media tra una velocità e la successiva.*

$P_1 = (0; 2)$; $P_2 = (1; 3)$; $P_3 = (5; 5{,}25)$; $P_4 = (7; 1)$; $P_5 = (9; 2)$; $P_6 = (11; 4{,}5)$

Un vettore posizione $\vec{r}$ è un vettore applicato nell'origine degli assi cartesiani e con la punta nel punto del piano a cui si riferisce. Per cui il nostro disegno potrebbe essere:



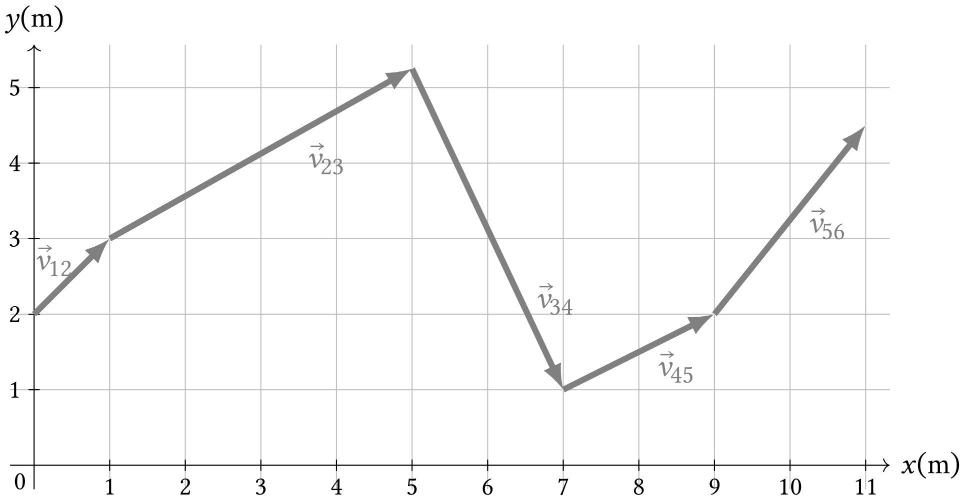
Il vettore spostamento è definito come $\vec{s}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ cioè il vettore differenza tra due posizioni successive. In pratica è un vettore che parte dalla punta del primo vettore per arrivare alla punta del secondo.



La velocità media è definita come:

$$\vec{v}_{12} = \frac{\vec{s}_{12}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \tag{6.86}$$

Il vettore velocità ha la stessa direzione e verso del vettore spostamento da cui si ricava. Il modulo in generale non è lo stesso. Nel nostro caso, essendo l'intervallo Δt tra due posizioni successive sempre uguale a un secondo, anche il suo modulo è lo stesso. Ovviamente non la stessa l'unità di misura.



In che punto devono essere applicati i vettori velocità trovati?

Ognuna di queste velocità medie è la velocità media di ogni punto della traiettoria compreso tra gli estremi del vettore spostamento. Per esempio, ogni punto della traiettoria compreso tra la posizione $\vec{r}_1$ e la posizione $\vec{r}_2$ ha come velocità media $\vec{v}_{12}$, quindi quel vettore potrebbe essere applicato non solo all'estremo di $\vec{r}_1$, ma ad ogni punto di $\vec{s}_{12}$. Osserviamo anche che avevamo sei posizioni, ma da queste abbiamo potuto ricavare solo cinque spostamenti e quindi cinque velocità medie.

Consideriamo infine l'accelerazione media tra un punto con una certa velocità e il punto successivo.

$$\vec{a}_{12} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \tag{6.87}$$

Applichiamo questa definizione al nostro disegno.

Le prime due velocità sono $\vec{v}_{12}$ e $\vec{v}_{23}$. Per farne la differenza applichiamo il secondo vettore ($\vec{v}_{23}$) nel punto in cui è applicato il primo ($\vec{v}_{12}$) e lo tracciamo in grigio e tratteggiato. La differenza tra i due vettori $\Delta\vec{v}$ è il vettore che va dalla punta del primo a quella del secondo.

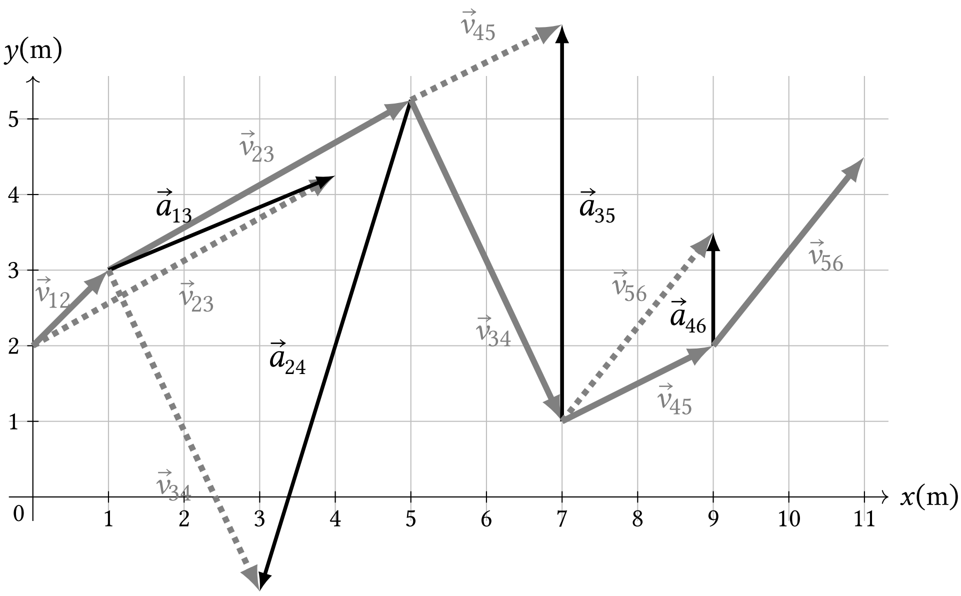
Infine l'accelerazione media è un vettore con la stessa direzione e verso di $\Delta\vec{v}$, ma il cui modulo è diviso per Δt. Nel nostro esercizio Δt vale un secondo quindi accelerazione media e $\Delta\vec{v}$ hanno lo stesso modulo e possono essere disegnati con un vettore con la stessa lunghezza.

Riportiamo il vettore accelerazione del disegno in nero e lo chiamiamo $\vec{a}_{13}$.

Qual è il punto di applicazione di questo vettore?

Poiché esso rappresenta l'accelerazione media nel tratto compreso tra la posizione $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_3$ potrebbe andare bene qualsiasi punto della traiettoria compreso in quel tratto.

Applichiamo questi ragionamenti ad ogni coppia successiva di velocità. A partire da cinque velocità medie otterremo quattro accelerazioni medie.



y(m)
x(m)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
$\vec{v}_{12}$
$\vec{v}_{23}$
$\vec{v}_{34}$
$\vec{v}_{45}$
$\vec{v}_{56}$
$\vec{a}_{13}$
$\vec{a}_{24}$
$\vec{a}_{35}$
$\vec{a}_{46}$

6.5 Moto parabolico di un proiettile

Esercizio 43 *Un proiettile viene lanciato dal suolo, verso l'alto, su un piano orizzontale, con una velocità iniziale di* $700\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *e con un angolo di* $80°$ *rispetto all'orizzontale.*

Trascurando l'attrito dell'aria:

1. *Qual è la massima altezza raggiunta dal proiettile?*
2. *Qual è la gittata del proiettile?*
3. *Quanto vale il modulo della velocità dopo due secondi e che angolo forma con il piano?*

Il moto del proiettile, a causa della natura vettoriale della velocità, può utilmente essere scomposto in due componenti: una parallela al piano e una perpendicolare. In orizzontale il corpo procede con velocità costante, non essendo sottoposto al alcuna forza. In verticale il moto è accelerato: l'accelerazione è quella di gravità. Scomponiamo innanzi tutto la velocità iniziale:

$$\begin{cases} v_{x_0} = v_0\cos(\theta) = 700\,\mathrm{m\,s^{-1}}\cdot 0{,}174 = 121\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ v_{y_0} = v_0\sin(\theta) = 700\,\mathrm{m\,s^{-1}}\cdot 0{,}985 = 689\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{cases} \tag{6.88}$$

Le leggi del moto orizzontale e verticale sono:

$$\begin{cases} x(t) = v_{x_0}t \\ y(t) = v_{y_0}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{6.89}$$

Nelle due equazioni abbiamo considerato nulla la posizione iniziale in orizzontale x_0 e in verticale y_0. Supponiamo inoltre, ed è una nostra scelta arbitraria, che il suolo si trovi a $0\,\mathrm{m}$ e il verso positivo delle ordinate sia verso l'alto. Di conseguenza l'accelerazione di gravità (diretta verso il basso) determina il segno meno.

Per quanto riguarda la velocità in funzione del tempo possiamo scrivere:

$$\begin{cases} v_x = cost. \\ v_y = v_{y_0} - gt \end{cases} \tag{6.90}$$

1. Per determinare la massima altezza raggiunta dal proiettile consideriamo che quando questo raggiunge il punto più alto la componente verticale della velocità si annulla:

   $$v_y = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}} = v_{y_0} - gt \tag{6.91}$$

   Da questa equazione possiamo mettere in evidenza t e ricavare il tempo:

   $$t = \frac{v_{y_0}}{g} = \frac{689\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 70{,}2\,\mathrm{s} \tag{6.92}$$

   Adesso sappiamo l'istante al quale il proiettile arriva alla massima altezza. Sostituiamo questo valore nell'equazione del moto verticale e troveremo l'altezza cercata.

   $$y(t) = v_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 689\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 70{,}2\,\mathrm{s} - \frac{1}{2}9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(70{,}2\,\mathrm{s})^2 = 24196\,\mathrm{m} \tag{6.93}$$

   Oppure potevamo usare direttamente la formula che ci dà l'*altezza massima nel moto parabolico*

   $$h_{\max} = \frac{v_{y_0}^2}{2g} \tag{6.94}$$

   Questa relazione vale solo se il corpo parte da altezza nulla.

2. Nell'equazione del moto verticale se poniamo la posizione finale uguale a zero otteniamo un equazione di secondo grado nel tempo che ha due soluzioni: sono l'istante in cui il proiettile parte e l'istante in cui ritorna al suolo. Quindi abbiamo:

$$0\,\mathrm{m\,s^{-1}} = v_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2 = t\left(v_{y_0} - \frac{1}{2}gt\right) \tag{6.95}$$

Le cui soluzioni sono:

$$t = 0\,\mathrm{s} \tag{6.96}$$

$$t = \frac{2v_{y_0}}{g} = \frac{2 \cdot 689\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 140\,\mathrm{s} \tag{6.97}$$

Se sostituiamo questo tempo nell'equazione del moto orizzontale troviamo *la gittata*

$$x(t) = v_{x_0}t = \frac{2v_{x_0}v_{y_0}}{g} = 121\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 140\,\mathrm{s} = 16940\,\mathrm{m} \tag{6.98}$$

L'ultima relazione trovata, anche nella seguente variante:

$$x = \frac{2v_{x_0}v_{y_0}}{g} = \frac{2v^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g} \tag{6.99}$$

è la formula della gittata indicata in molti testi. Potevano usarla per rispondere direttamente al quesito, ma *essa vale solo quando il punto di partenza e di arrivo stanno alla stessa altezza*.

3. Per trovare le componenti della velocità ad un certo istante usiamo la (6.90)

$$\begin{cases} v_x = 121\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ v_y = 689\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 2\,\mathrm{s} = 669\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{cases} \tag{6.100}$$

Il modulo della velocità sarà:

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(121\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 + (669\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2} = 680\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{6.101}$$

Per trovare l'angolo che il vettore velocità forma con l'orizzontale possiamo usare la seguente relazione:

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{669\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{121\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\right) = 79{,}7° \tag{6.102}$$

L'angolazione rispetto al piano è diminuita (per quanto di poco), come ci si aspetta.

6.5.1 Salto oltre un ostacolo

Esercizio 44 *Un proiettile viene lanciato dal suolo verso l'alto. Il proiettile deve superiore la cima di un colle alto* $h_c = 150\ \mathrm{m}$ *posta a una distanza* $d_x = 700\ \mathrm{m}$.

Trascurando l'attrito dell'aria:

1. *Quale velocità deve avere il proiettile per superare la collina?*
2. *Quale angolo forma con il terreno la velocità iniziale?*
3. *A che altezza arriva in quelle condizioni?*
4. *A che distanza oltre la collina va posarsi al suolo?*
5. *Qual è il tempo di volo del proiettile?*

Il moto del corpo è parabolico: un moto rettilineo uniforme in orizzontale e uniformemente accelerato in verticale. Per poter superare la collina il corpo deve raggiungere la massima altezza (il vertice della parabola della traiettoria) almeno all'altezza della collina stessa.

La legge del moto del corpo (prendendo come posizione iniziale $x_0 = 0\ \mathrm{m}$ e $y_0 = 0\ \mathrm{m}$) è:

$$\begin{cases} x(t) = v_{x_0} t \\ y(t) = v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \tag{6.103}$$

1. **Primo metodo**

   La minima velocità che deve avere un corpo per superare un ostacolo è quella per cui il vertice del moto parabolico è proprio sull'ostacolo. Possiamo usare direttamente la relazione per ottenere l'altezza massima del moto parabolico.

   $$h_{\mathrm{max}} = \frac{v_{y_0}^2}{2g} \tag{6.104}$$

   Mettiamo in evidenza questa velocità.

   $$\begin{aligned} v_{y_0} &= \sqrt{2 g h_{\mathrm{max}}} \\ v_{y_0} &= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 150\ \mathrm{m}} = 54{,}3\ \mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{6.105}$$

   Possiamo poi usare la formula che lega la gittata alle componenti della velocità iniziale.

   $$x_{\mathrm{gittata}} = \frac{2 v_{x_0} v_{y_0}}{g} \tag{6.106}$$

   Questa distanza è il doppio della distanza che separa il punto di lancio dall'ostacolo.

   $$x_{\mathrm{gittata}} = 2 d_x \tag{6.107}$$

   Per cui, dall'espressione della gittata possiamo ricavare la componente orizzontale della velocità iniziale.

   $$\begin{aligned} 2 d_x &= \frac{2 v_{x_0} v_{y_0}}{g} \\ d_x &= \frac{v_{x_0} v_{y_0}}{g} \\ v_{x_0} &= \frac{d_x g}{v_{y_0}} = \frac{700\ \mathrm{m} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}}{54{,}3\ \mathrm{m/s}} = 126{,}5\ \mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{6.108}$$

Infine il modulo della velocità minima iniziale vale:

$$v_0 = \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2} = \sqrt{(54{,}3\,\mathrm{m/s})^2 + (126{,}6\,\mathrm{m/s})^2} = 137{,}7\,\mathrm{m/s} \tag{6.109}$$

Secondo metodo
Procediamo allo stesso modo, ma senza utilizzare le formule particolari precedentemente usate. Quando un corpo lanciato verso l'alto arriva all'altezza massima la sua velocità finale è zero. La seguente relazione, valida per un moto accelerato, lega la distanza percorsa y con la velocità iniziale e finale.

$$v_\mathrm{f}^2 = v_0^2 + 2ay \tag{6.110}$$

La distanza che vogliamo percorre è almeno l'altezza h_c della collina; la velocità iniziale è la velocità iniziale in verticale del corpo. Per cui:

$$\begin{aligned} 0\,\mathrm{m/s} &= v_{y_0}^2 - 2gh_\mathrm{c} \\ v_{y_0}^2 &= 2gh_\mathrm{c} \\ v_{y_0} &= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 150\,\mathrm{m}} = 54{,}3\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{6.111}$$

Per determinare la massima altezza raggiunta dal proiettile consideriamo che quando questo raggiunge il punto più alto la componente verticale della velocità si annulla:

$$v_y = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}} = v_{y_0} - gt_{\mathrm{h\,max}} \tag{6.112}$$

Da questa equazione possiamo mettere in evidenza t e ricavare il tempo:

$$t_{\mathrm{h\,max}} = \frac{v_{y_0}}{g} = \frac{54{,}3\,\mathrm{m/s}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 5{,}53\,\mathrm{s} \tag{6.113}$$

La velocità in orizzontale deve essere tale da permettere al corpo di percorrere la distanza d_x nel tempo $t_{\mathrm{h\,max}}$ impiegato ad arrivare all'altezza massima.

$$\begin{aligned} x(t_{\mathrm{h\,max}}) &= v_{x_0} t_{\mathrm{h\,max}} = d_x \\ v_{x_0} &= \frac{d_x}{t_{\mathrm{h\,max}}} = \frac{700\,\mathrm{m}}{5{,}53\,\mathrm{s}} = 126{,}6\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{6.114}$$

Infine il modulo della velocità minima iniziale vale:

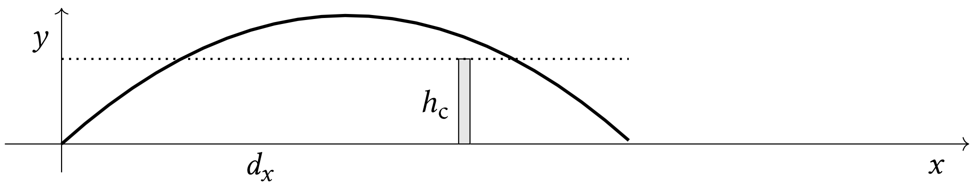
$$v_0 = \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2} = \sqrt{(54{,}3\,\mathrm{m/s})^2 + (126{,}5\,\mathrm{m/s})^2} = 137{,}7\,\mathrm{m/s} \tag{6.115}$$

Terzo metodo
Calcoliamo quando tempo $t_{\mathrm{h\,max}}$ impiega il proiettile per arrivare all'altezza massima h_c.

$$\begin{aligned} y(t_{\mathrm{h\,max}}) = h_\mathrm{c} &= v_{y_0} t_{\mathrm{h\,max}} - \frac{1}{2} g (t_{\mathrm{h\,max}})^2 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_{y_0} t_{\mathrm{h\,max}} - h_\mathrm{c} &= 0 \end{aligned} \tag{6.116}$$

Risolviamo questa equazione in $t_{\mathrm{h\,max}}$:

$$t_{1,2} = \frac{-v_{y_0} \pm \sqrt{v_{y_0}^2 - 4\left(-\frac{1}{2}g\right)(-h_\mathrm{c})}}{2\left(-\frac{1}{2}g\right)} \tag{6.117}$$



Come si vede dalla precedente rappresentazione, in generale ci sono due istanti in cui, per una data velocità iniziale, il corpo raggiunge l'altezza richiesta: infatti questa equazione ha infinite coppie di soluzioni al variare di v_{y_0}. Nel caso limite l'altezza cercata è anche la massima altezza, corrispondente al vertice della parabola: avremo allora un'unica soluzione che si può trovare imponendo che il Δ dell'equazione sia uguale a zero. Questa condizione ci permette di trovare quale sia la minima velocità verticale per superare la collina.

$$\begin{aligned} v_{y_0}^2 - 4\left(-\frac{1}{2}g\right)(-h_c) &= 0 \\ v_{y_0}^2 &= 2gh_c \\ v_{y_0} &= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 150\ \mathrm{m}} = 54{,}3\ \mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{6.118}$$

Con questa condizione relativa alla componente verticale della velocità, considerando che il Δ vale zero, allora il tempo vale:

$$t_{\mathrm{h\,max}} = \frac{-v_{y_0}}{2\left(-\frac{1}{2}g\right)} = \frac{v_{y_0}}{g} = \frac{54{,}3\ \mathrm{m/s}}{9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}} = 5{,}53\ \mathrm{s} \tag{6.119}$$

A questo punto procediamo e concludiamo come nel secondo caso.

2. L'angolo formato dal vettore velocità iniziale con l'asse x, ovvero il suolo, è:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_{y_0}}{v_{x_0}}\right) = \arctan\left(\frac{54{,}3\ \mathrm{m/s}}{126{,}6\ \mathrm{m/s}}\right) = 23{,}2° \tag{6.120}$$

3. L'altezza raggiunta in queste condizioni è l'altezza della collina.

4. Il moto è parabolico; parte dal suolo e arriva al suolo; il vertice della parabola è la cima della collina. Per simmetria rispetto al vertice di un parabola, la distanza raggiunta oltre la collina, nel punto in cui cade il corpo, è d_x.

5. Per le stesse ragioni di simmetria il tempo totale di volo è il doppio del tempo per arrivare in cima alla collina.

$$t_{\mathrm{volo}} = 2t_{\mathrm{h\,max}} = 5{,}53\ \mathrm{s} = 11{,}1\ \mathrm{s} \tag{6.121}$$

6.6 Moto circolare uniforme

Esercizio 45 *Una ruota larga* 45 cm *compie* 300 *giri al minuto.*

1. *Con quale frequenza gira la ruota?*
2. *Quanto vale la velocità angolare della ruota?*
3. *Quanto vale la velocità tangenziale di un punto sull'estremità della ruota?*
4. *Quanto vale e in quale direzione è rivolta l'accelerazione del punto precedente?*

Supponiamo che la ruota giri con velocità costante.

1. L'indicazione dei giri al minuto è un'indicazione di frequenza perché ci dice quante volte il fenomeno si ripete in un certo intervallo di tempo.

$$f = \frac{300}{\text{min}} = \frac{300}{60\,\text{s}} = 5\,\text{Hz} \tag{6.122}$$

2. La velocità angolare è data dal rapporto:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{6.123}$$

dove 2π è la misura dell'angolo giro espressa in radianti e T è il periodo ovvero il tempo che l'oggetto impiega a compiere un giro completo.
L'angolo, nel sistema internazionale, è misurato in radianti che sono una grandezza adimensionale, cioè un numero puro. Secondo convenienza possiamo indicare esplicitamente quale sia l'unità di misura (radianti o gradi) o non indicare alcunché.
Il periodo è l'inverso della frequenza:

$$T = \frac{1}{5\,\text{Hz}} = 0{,}2\,\text{s} \tag{6.124}$$

Quindi la velocità angolare è:

$$\omega = \frac{2\pi\,\text{rad}}{0{,}2\,\text{s}} = 10\pi\,\text{rad/s} \tag{6.125}$$

3. Se la ruota è larga 45 cm quello è il suo diametro e il raggio è la metà:

$$r = \frac{45\,\text{cm}}{2} = 225\,\text{cm} = 0{,}225\,\text{m} \tag{6.126}$$

La velocità tangenziale é:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r = 10\pi\,\text{rad/s} \cdot 0{,}225\,\text{m} = 7{,}07\,\text{m/s} \tag{6.127}$$

4. Infine l'accelerazione è quella centripeta ed è diretta verso il centro della ruota:

$$a = \frac{v^2}{T} = \omega^2 r = (10\pi\,\text{rad/s})^2 \cdot 0{,}225\,\text{m} = 222\,\text{m/s}^2 \tag{6.128}$$

7 Dinamica

7.1 Corpo in caduta libera

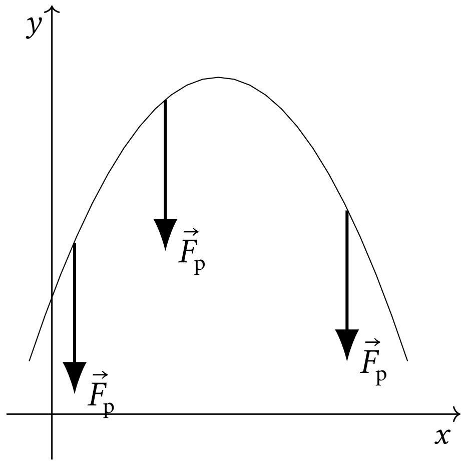
Esercizio 46 *Un corpo puntiforme, di massa* 637 kg*, è lanciato verso l'alto.*

1. *Calcola intensità, direzione e verso di tutte le forze che agiscono sul corpo quando è ancora sospeso in aria, trascurando l'attrito dell'aria stessa.*
2. *Scrivi se possiamo applicare il primo principio della dinamica.*

1. Se un corpo è sospeso in aria l'unica forza che agisce sempre su di esso, trascurando l'attrito dell'aria, è la forza peso, la cui intensità vale:

$$|\vec{F}_\mathrm{p}| = m|\vec{g}| \tag{7.1}$$

m è la massa del corpo e $\vec{g}$ è l'accelerazione di gravità che vale in modulo 9,81 m s^{-2} .
La direzione è quella perpendicolare alla superficie terrestre e il verso è verso il basso (a prescindere che il corpo si stia muovendo verso l'alto o verso il basso).
Se rappresentiamo il moto generico di un corpo lanciato in aria avremo una traiettoria parabolica e per qualsiasi punto della traiettoria il vettore forza peso ha sempre la stessa orientazione e modulo (anche considerando l'eventuale attrito dell'aria).



Quindi:

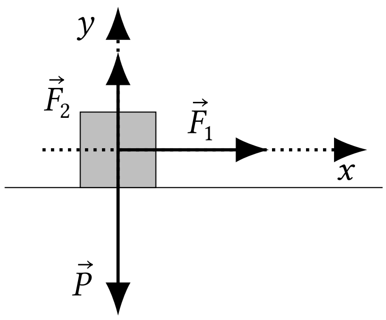
$$|\vec{F}_\mathrm{p}| = 637\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 6250\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m\,s^{-2}} = 6{,}25 \times 10^3\,\mathrm{N} \tag{7.2}$$

2. Il primo principio della dinamica si applica a corpi su cui non agiscono forze o per i quali la forza esterna totale agente è nulla. Quindi in questo caso non si può applicare perché c'è sempre la forza di gravità.

7.2 Corpo su un piano, sottoposto ad una o più forze

Esercizio 47 *Un pattinatore su ghiaccio scivola senza attrito su una pista piana come schematizzato in figura. É spinto verso destra da una forza* $\vec{F}_1$ *con* $|\vec{F}_1| = 340\,\text{N}$ *e verso l'alto da una forza* $\vec{F}_2$ *con* $|\vec{F}_2| = 250\,\text{N}$*. La massa del pattinatore è* $m = 75\,\text{kg}$*.*

1. *Quanto vale la forza peso che agisce sul pattinatore?*
2. *Quanto vale la forza totale che agisce sul pattinatore in verticale?*
3. *Quale principio uso per trovare l'accelerazione con cui viene spinto il pattinatore e quanto vale?*
4. *Che tipo di moto compie il pattinatore spinto dalla forza* $\vec{F}_2$*?*
5. *Che velocità raggiunge dopo* 3 s *se parte da fermo?*
6. *Quale distanza percorre dopo* 3 s *se parte da fermo da un traguardo posto a* 30 m*?*



1. La forza peso in modulo vale:
$$|\vec{F}_\text{p}| = m|\vec{g}| = 75\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2} = 736\,\text{N} \tag{7.3}$$

2. In verticale agisce verso il basso la forza peso e verso l'alto la forza $\vec{F}_2$. La forza totale è la somma vettoriale delle due forze:
$$\vec{F}_\text{v} = \vec{F}_\text{p} + \vec{F}_2 \tag{7.4}$$
Poiché hanno la stessa direzione e verso opposto il modulo della somma è dato da:
$$|\vec{F}_\text{v}| = |\vec{F}_\text{p}| - |\vec{F}_2| = 736\,\text{N} - 250\,\text{N} = 486\,\text{N} \tag{7.5}$$
In verticale prevale la forza peso quindi il pattinatore rimane vincolato al piano e l'accelerazione verticale è nulla.
Detto diversamente, scelto come positivo il verso positivo dell'asse y, la componente della forza peso è negativa perché verso il basso, la componente della forza $\vec{F}_2$ è positiva perché verso l'alto:
$$F_\text{v} = F_\text{p} + F_2 = -736\,\text{N} + 250\,\text{N} = -486\,\text{N} \tag{7.6}$$
La componente della forza verticale, con le orientazioni date, ha segno negativo, quindi è diretta verso il basso: il corpo rimane poggiato sul piano.
In conclusione, se il corpo è vincolato a rimanere poggiato sul piano allora su di esso agisce anche la reazione vincolare $\vec{F}_\text{rv}$ del piano. Inoltre, poiché in verticale non si muove, la *forza totale verticale* che agisce su di esso è nulla.
$$\vec{F}_\text{v} + \vec{F}_\text{rv} = 0 \tag{7.7}$$

3. In orizzontale agisce solo la forza $\vec{F}_1$ e per trovare l'accelerazione applichiamo il secondo principio della dinamica.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} \tag{7.8}$$

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}_1|}{m} = \frac{340\,\mathrm{N}}{75\,\mathrm{kg}} = 4{,}53\,\mathrm{m\,s^{-2}} \tag{7.9}$$

4. Il moto è uniformemente accelerato quindi la velocità aumenta linearmente con il tempo secondo la relazione:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \tag{7.10}$$

5. Il pattinatore parte da fermo quindi la velocità iniziale $\vec{v}_0$ è nulla. La velocità finale varrà:

$$v(3\,\mathrm{s}) = at = 4{,}53\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 3\,\mathrm{s} = 13{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{7.11}$$

6. Per trovare quanto spazio ha percorso applichiamo la legge oraria del moto per sapere dove arriva:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{7.12}$$

   In questo caso poniamo la posizione iniziale x_0 a 30 m, quindi:

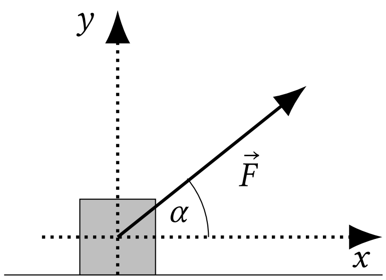
$$x(3\,\mathrm{s}) = 30\,\mathrm{m} + \frac{1}{2} \cdot 4{,}53\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (3\,\mathrm{s})^2 = 30\,\mathrm{m} + 20{,}4\,\mathrm{m} = 50{,}4\,\mathrm{m} \tag{7.13}$$

   Lo spazio percorso Δx, nel caso del moto rettilineo uniforme o di quello uniformemente accelerato, è la differenza tra la posizione finale e quella iniziale.

$$\Delta x = x_\mathrm{f} - x_\mathrm{i} = 50{,}4\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{m} = 20{,}4\,\mathrm{m} \tag{7.14}$$

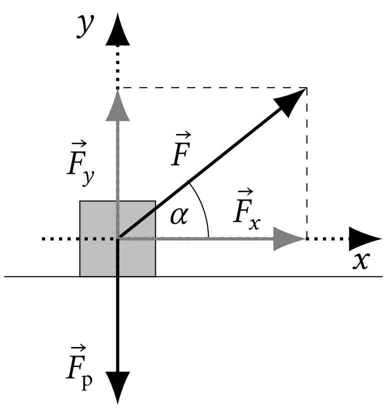
Esercizio 48 *Un corpo puntiforme, di massa $m = 43\,\mathrm{kg}$, è posto su un piano orizzontale. Il corpo è sottoposto ad una forza $F = 130\,\mathrm{N}$ che forma un angolo $\alpha = 40°$ con il piano orizzontale, orientata come indicato nella figura seguente. Tra corpo e piano non c'è attrito.*

1. *Calcola intensità, direzione e verso di tutte le forze che agiscono sul corpo lungo gli assi x e y.*
2. *Calcola l'accelerazione che il corpo subisce lungo il piano.*
3. *Scrivi se vale il terzo principio della dinamica e come lo possiamo applicare a questo caso.*



Sul corpo agisce, oltre alla forza indicata in figura, anche la forza peso $\vec{F}_\mathrm{p} = m\vec{g}$, orientata verso il basso, ed eventualmente la reazione vincolare del piano $\vec{F}_{rv}$, diretta verso l'alto.

Scomponiamo la forza $\vec{F}$ e disegniamo la forza $\vec{F}_\mathrm{p}$ (non in scala).



Non sappiamo ancora se è presente una forza di reazione vincolare del piano. Se il componente verticale della forza data è superiore alla forza peso allora il corpo sarà indotto a sollevarsi dal piano e quindi la $\vec{F}_\mathrm{rv}$ in quel caso sarà nulla. Altrimenti, se la forza totale che agisce sul corpo tende a schiacciarlo sul piano, la reazione vincolare ha un'intensità pari a quella dell'eventuale componente totale delle forze che agiscono sul corpo lungo l'asse y.

1. Scegliamo come verso positivo per le componenti quello positivo degli assi cartesiani.
   Le componenti della forza $\vec{F}$ lungo gli assi cartesiani sono:

$$\begin{cases} F_x = |\vec{F}_x| = |\vec{F}|\cos\alpha = 130\,\mathrm{N}\cdot 0{,}766 = 100\,\mathrm{N} \\ F_y = |\vec{F}_y| = |\vec{F}|\sin\alpha = 130\,\mathrm{N}\cdot 0{,}643 = 84\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{7.15}$$

   La forza peso invece ha come componente:

$$F_\mathrm{p} = 43\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 422\,\mathrm{N} \tag{7.16}$$

   La componente della forza peso sull'asse y è negativa perché orientata in verso opposto al verso positivo dell'asse y.

La componente della forza totale verticale vale:

$$F_{\text{tot y}} = F_y + F_{\text{p}} = 84\,\text{N} - 422\,\text{N} = -338\,\text{N} \tag{7.17}$$

di segno negativo e quindi orientato verso il basso.
Il corpo rimane vincolato al piano. Il piano reagisce a questa forza di schiacciamento con un forza forza uguale e contraria (il corpo è in equilibrio verticale). Questa è la forza di reazione vincolare del piano.

2. Per determinare l'eventuale accelerazione che il corpo subisce applichiamo il secondo principio della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$. L'unica forza non equilibrata che agisce sul corpo dato è il componente orizzontale della forza $\vec{F}$. Quindi l'accelerazione (diretta lungo il piano) vale:

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}_x|}{m} = \frac{100\,\text{N}}{43\,\text{kg}} = 2{,}32\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \tag{7.18}$$

nel verso positivo dell'asse x.

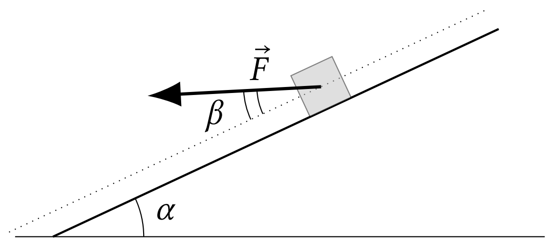
3. Nella meccanica newtoniana il terzo principio della dinamica vale sempre.
In questo caso lo possiamo applicare alla forza che intercorre tra corpo e piano, affermando che così come il corpo esercita sul piano una forza di intensità uguale a $F_{\text{tot y}}$, così il piano esercita una forza di reazione vincolare in direzione verticale, verso l'alto, sul corpo. Ricordiamoci che le coppie di *azione e reazione agiscono sempre su corpi diversi*. Nel nostro caso $\vec{F}_{\text{tot y}}$ e $\vec{F}_{\text{rv}}$ non sono azione e reazione perché agiscono sullo stesso corpo. La forza peso non è nel nostro caso una coppia di azione reazione con la reazione vincolare, ma solo con la forza con cui la Terra è attirata a sua volta dal corpo.

7.3 Corpo puntiforme su un piano inclinato

Esercizio 49 *Un corpo puntiforme di massa $m = 218\,\mathrm{kg}$ è poggiato su un piano inclinato con un angolo $\alpha = 25°$ rispetto all'orizzontale. Tra corpo e piano è presente attrito: il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0{,}7$, quello dinamico $\mu_d = 0{,}3$.*

Inoltre sul corpo agisce una forza $\vec{F}$, dove $|\vec{F}| = 280\,\mathrm{N}$ e $\beta = 22°$, come mostrato in figura.

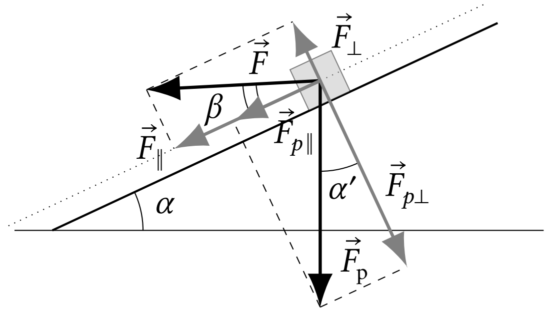
1. *Calcola il modulo della forza peso che agisce sul corpo.*
2. *Disegna i componenti del vettore forza peso e della forza $\vec{F}$ paralleli e perpendicolari al piano.*
3. *Calcola il modulo di questi quattro componenti.*
4. *Trova il modulo della forza totale che agisce perpendicolarmente e parallelamente al piano, trascurando l'eventuale forza d'attrito.*
5. *Trova se nelle condizioni date il corpo riuscirà a muoversi.*
6. *Qualora il corpo si muova trova la forza totale che agisce sul corpo perpendicolarmente e parallelamente al piano, compresa l'eventuale forza d'attrito.*



1. Il modulo della forza peso che agisce sul corpo è:

$$|\vec{F}_\mathrm{p}| = mg = 18\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 177\,\mathrm{N} \tag{7.19}$$

2. Aggiungiamo alla figura il vettore forza peso e i componenti perpendicolare e parallelo al piano inclinato sia della forza peso che della forza $\vec{F}$.



Nella figura l'angolo α è uguale all'angolo α', come illustrato estesamente in analoghi esercizi di statica.

3. Scegliamo (a nostro arbitrio) come verso positivo per le componenti delle forze parallele al piano quello verso destra e come verso positivo per le componenti perpendicolari al piano quello verso l'alto. Per questo possiamo scrivere:

$$\begin{cases} F_{\mathrm{p}\perp} = -|\vec{F}_\mathrm{p}|\cos(\alpha) = -177\,\mathrm{N} \cdot \cos(25°) = -160\,\mathrm{N} \\ F_{\mathrm{p}\parallel} = -|\vec{F}_\mathrm{p}|\sin(\alpha) = -177\,\mathrm{N} \cdot \sin(25°) = -75\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{7.20}$$

Invece per le componenti della forza $\vec{F}$ scriviamo:

$$\begin{cases} F_{\perp} = |\vec{F}|\sin(\beta) = 280\,\mathrm{N}\cdot\sin(22°) = 105\,\mathrm{N} \\ F_{\parallel} = -|\vec{F}|\cos(\beta) = 280\,\mathrm{N}\cdot\cos(22°) = -260\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{7.21}$$

4. Per trovare il modulo della forza totale lungo il piano e perpendicolarmente ad esso, sommiamo le componenti delle forze (F_p e F) lungo quelle due direzioni.

$$F_{\text{tot senza attrito}\,\parallel} = F_{\parallel} + F_{\text{p}\,\parallel} = -260\,\mathrm{N} + (-75\,\mathrm{N}) = -335\,\mathrm{N} \tag{7.22}$$

Per quanto riguarda la forza perpendicolare al piano non consideriamo ancora l'eventuale reazione vincolare del piano.

$$F_{\text{tot senza rv}\,\perp} = F_{\text{p}\perp} + F_{\perp} = (-160\,\mathrm{N}) + 105\,\mathrm{N} = -55\,\mathrm{N} \tag{7.23}$$

La componente della forza totale perpendicolare al piano ha segno negativo, quindi è diretta verso il basso: il corpo rimane attaccato al piano e vi può essere forza d'attrito. La componente della forza totale (senza attrito) parallela al piano è negativa, quindi il corpo è spinto verso sinistra.
La forza di reazione vincolare $\vec{F}_{\text{rv}}$ del piano è la forza che il piano esercita sul corpo per impedire che questo lo attraversi. Se il corpo è schiacciato sul piano, il piano reagisce con una forza uguale in modulo e direzione, ma di verso opposto. La forza di reazione ha quindi lo stesso valore e direzione di $\vec{F}_{\text{tot senza rv}\,\perp}$. Siccome il corpo rimane poggiato sul piano la forza totale che agisce perpendicolarmente al piano vale zero.

$$\vec{F}_{\text{tot}\perp} = \vec{F}_{\text{tot senza rv}\,\perp} + \vec{F}_{\text{rv}} = 0\,\mathrm{N} \tag{7.24}$$

5. La forza d'attrito statico dipende dalla forza con cui il corpo è schiacciato sul piano di appoggio. Nel nostro caso dipende dalla componente perpendicolare al piano della forza totale. La forza di attrito statico massimo che il corpo può sopportare è:

$$F_{\text{a.s. MAX}} = \mu F_{\text{schiacciamento}} = \mu_{\text{s}}\left|\vec{F}_{\text{tot senza rv}\,\perp}\right| = 0{,}7\cdot 55\,\mathrm{N} = 39\,\mathrm{N} \tag{7.25}$$

La forza d'attrito si oppone al movimento del corpo. Nel nostro caso il corpo è spinto verso sinistra dalla forza $\vec{F}_{\text{tot senza attrito}\,\parallel}$. Poiché il modulo di questa forza è più grande del massimo attrito statico che il corpo può sopportare allora il corpo scivolerà (scendendo) lungo il piano.

$$F_{\text{tot senza attrito}\,\parallel} > F_{\text{a.s. MAX}} \Rightarrow \text{il corpo si muove} \tag{7.26}$$

Nel momento in cui il corpo comincia a muoversi l'attrito diventa dinamico. Analogamente a quanto ottenuto con l'attrito statico possiamo scrivere:

$$F_{\text{a.d}} = \mu F_{\text{schiacciamento}} = \mu_{\text{d}}\left|\vec{F}_{\text{tot senza rv}\,\perp}\right| = 0{,}3\cdot 55\,\mathrm{N} = 17\,\mathrm{N} \tag{7.27}$$

L'attrito dinamico è diretto in verso opposto alla forza totale parallela al piano e quindi verso destra.

6. La forza totale che agisce lungo il piano (compresa la forza d'attrito) è quindi:

$$F_{\text{tot}\,\parallel} = F_{\text{tot senza attrito}\,\parallel} + F_{\text{a.d}} = -335\,\mathrm{N} + 17\,\mathrm{N} = -318\,\mathrm{N} \tag{7.28}$$

Per quanto riguarda la forza perpendicolare nulla è cambiato rispetto a quanto già scritto.

7.4 Forza centripeta

Esercizio 50 *Una provetta di massa* 35 g *è fissata all'albero di rotazione di una centrifuga da una sbarretta metallica lunga* 20 cm*.*

Determina la forza centripeta cui la provetta è sottoposta quando la frequenza di rotazione è 1037 *giri al minuto.*

Un corpo puntiforme, in moto circolare uniforme lungo una circonferenza, è sottoposto ad una forza, detta centripeta, diretta istante per istante nella direzione e verso che vanno dal corpo stesso al centro della circonferenza, e di modulo:

$$F = ma_{\mathrm{c}} = m\omega^2 r \tag{7.29}$$

dove m è la massa del corpo, ω è la velocità angolare ed r è il raggio della traiettoria.

In questo caso la massa è:

$$m = 35\,\mathrm{g} = 3{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg} \tag{7.30}$$

la velocità angolare è:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \tag{7.31}$$

dove ν è la frequenza di rotazione.

$$\nu = \frac{1037\mathrm{giri}}{\mathrm{min}} = \frac{1037\mathrm{giri}}{60\,\mathrm{s}} = 17{,}28\,\mathrm{Hz} \tag{7.32}$$

$$\omega = 2 \cdot 3,1415 \cdot 17{,}28\,\mathrm{Hz} = 108{,}6\,\mathrm{s}^{-1} \tag{7.33}$$

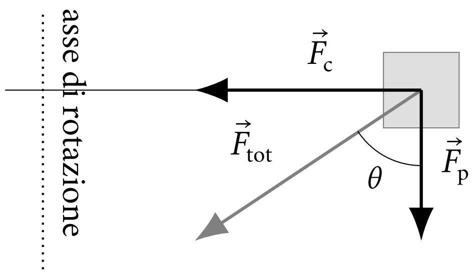
In fine, nel sistema internazionale, il modulo della forza è:.

$$F = m\omega^2 r = 0{,}035\,\mathrm{kg} \cdot \left(108,6\frac{1}{s}\right)^2 \cdot 0{,}20\,\mathrm{m} = 82{,}6\,\mathrm{N} \tag{7.34}$$

Esercizio 51 *Una sferetta di massa* $m = 12\,\mathrm{g}$ *viene fatta ruotare su un piano orizzontale in modo da descrivere per 29 volte al minuto una circonferenza di raggio* $r = 16\,\mathrm{cm}$*.*

Quali sono direzione verso e modulo della forza totale cui è soggetta la sferetta?

Un corpo che ruota su un piano orizzontale, privo di attrito, è sottoposto ad almeno due forze: la forza centripeta che ne determina il moto circolare uniforme e la forza peso dovuta alla gravità. Disegniamo nella figura che segue un diagramma di corpo libero con le due forze (non in scala) e la loro somma.



La *forza centripeta* è diretta istante per istante nella direzione e verso che vanno dal corpo stesso al centro della circonferenza, e il suo modulo è:

$$F_c = ma_c = m\omega^2 r \tag{7.35}$$

dove m è la massa del corpo, ω è la velocità angolare ed r è il raggio della traiettoria.
In questo caso la massa vale:

$$m = 12\,\mathrm{g} = 1{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg} \tag{7.36}$$

La velocità angolare è:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \tag{7.37}$$

La frequenza di rotazione è ν:

$$\nu = \frac{29\mathrm{giri}}{\mathrm{min}} = \frac{29\mathrm{giri}}{60\,\mathrm{s}} = 4{,}83 \times 10^{-1}\,\mathrm{Hz} \tag{7.38}$$

$$\omega = 2 \cdot 3,1415 \cdot 4{,}82 \times 10^{-1}\,\mathrm{Hz} = 3,03\frac{1}{s} \tag{7.39}$$

$$r = 16\,\mathrm{cm} = 1{,}6 \times 10^{-1}\,\mathrm{m} \tag{7.40}$$

In fine, nel sistema internazionale, il modulo della forza è:

$$F_c = m\omega^2 r = (1{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg}) \cdot (3,03s^{-1})^2 \cdot (1{,}6 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}) = 1{,}77 \times 10^{-2}\,\mathrm{N} \tag{7.41}$$

La *forza peso* è diretta verso il basso nella direzione perpendicolare al piano di rotazione della sferetta e il suo modulo è:

$$F_p = mg \tag{7.42}$$

dove m è la massa del corpo e $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ è l'accelerazione di gravità al suolo.

$$F_p = 1{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 1{,}18 \times 10^{-2}\,\mathrm{N} \tag{7.43}$$

La *forza totale* è data dalla somma vettoriale della forza centripeta e della forza peso:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_c + \vec{F}_p \tag{7.44}$$

Il suo modulo è:

$$|\vec{F}_{tot}| = \sqrt{|\vec{F}_c|^2 + |\vec{F}_p|^2} \tag{7.45}$$

$$|\vec{F}_{tot}| = \sqrt{3{,}19 \times 10^{-4}\,\mathrm{N} + 1{,}39 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}} = 2{,}12 \times 10^{-2}\,\mathrm{N} \tag{7.46}$$

l'angolo θ individuato dal vettore con l'asse delle ordinate, come si vede dalla figura, è dato da:

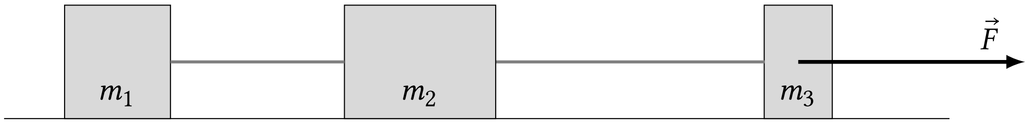
$$\theta = \arctan\left(\frac{|\vec{F}_c|}{|\vec{F}_p|}\right) = \arctan(1{,}50) = 56{,}3° \tag{7.47}$$

7.5 Sistemi con più corpi

Esercizio 52 *Un sistema è costituito da tre masse puntiformi, poggiate su un piano senza attrito, collegate con delle funi di massa trascurabile e inestensibili. La massa di destra è attaccata ad un'altra fune che la tira con una forza $F = 1350\,\mathrm{N}$ verso destra.*

$m_1 = 120\,\mathrm{kg}$; $m_2 = 230\,\mathrm{kg}$; $m_3 = 35\,\mathrm{kg}$

1. *Trova l'accelerazione a cui è sottoposto il sistema sapendo che le masse rimangono solidali tra loro.*
2. *Trova la forza che le funi esercitano sulle masse.*
3. *Trova la tensione della fune in un punto qualsiasi tra il corpo 1 e il corpo 2.*



1. Se le masse rimangono solidali tra loro possiamo applicare il secondo principio della dinamica all'intero sistema, sapendo che la forza totale che agisce su di esso è data dalla forza $\vec{F}$ esercitata dalla fune di destra e che la massa del sistema è la somma delle masse dei tre corpi. L'accelerazione del sistema è equivalente a quella di ogni singolo corpo.
La *forza peso*, essendo i corpi poggiati su un piano, è equilibrata dalla reazione vincolare del piano e non contribuisce all'accelerazione del sistema: per questo non la rappresentiamo nella figura seguente.
La mancanza di attrito assicura che non ci siano forze di attrito.

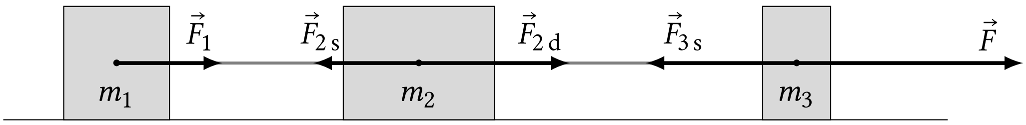
$$M_{\mathrm{tot}} = m_1 + m_2 + m_3 = 120\,\mathrm{kg} + 230\,\mathrm{kg} + 35\,\mathrm{kg} = 385\,\mathrm{kg} \tag{7.48}$$

$$F_{\mathrm{tot}} = M_{\mathrm{tot}}a \tag{7.49}$$

$$a = \frac{F_{\mathrm{tot}}}{M_{\mathrm{tot}}} = \frac{F}{M_{\mathrm{tot}}} = \frac{1350\,\mathrm{N}}{385\,\mathrm{kg}} = 3{,}51\,\mathrm{m/s^2} \tag{7.50}$$

L'accelerazione è rivolta verso destra come la forza $\vec{F}$ esercitata dalla fune.

2. Rappresentiamo nella figura seguente tutte le forze che agiscono sulle masse e chiamiamo con la lettera F tutte le forze che le funi esercitano su di esse.



Per trovare le forze che le funi esercitano sui corpi partiamo dal corpo su cui agisce solo una fune: il corpo 1. Per trovare questa forza applichiamo al corpo il secondo principio della dinamica, sapendo che la forza totale che agisce su di esso è la somma delle singole forze (in questo caso la sola forza F_1).

$$\vec{F}_{\mathrm{tot}\,1} = m_1\vec{a} = \vec{F}_1 \tag{7.51}$$

$$F_1 = m_1 a = 120\,\mathrm{kg} \cdot 3{,}51\,\mathrm{m/s^2} = 421\,\mathrm{N} \tag{7.52}$$

Procedendo analogamente per il corpo 2 possiamo scrivere:

$$\vec{F}_{\mathrm{tot}\,2} = m_2\vec{a} = \vec{F}_{2\,\mathrm{s}} + \vec{F}_{2\,\mathrm{d}} \tag{7.53}$$

- La forza che ogni fune esercita sul corpo è uguale e contraria alla forza che il corpo esercita sulla fune: è il terzo principio della dinamica.

$$\vec{T}_1 = -\vec{F}_1 \qquad \vec{T}_{2\,\mathrm{s}} = -\vec{F}_{2\,\mathrm{s}} = 0 \tag{7.54}$$

- Chiamiamo *tensione della fune* la forza che è esercitata su di essa in un suo punto. Più specificamente, la tensione in un punto della fune è la forza che dovremmo applicare ai due lembi della fune per tenerli uniti se in quel punto facessimo un taglio.
- Alle estremità della fune la tensione corrisponde alla forza che si esercita sulla fune: c'è solo un lembo.
- Il fatto che la massa delle funi sia trascurabile comporta che la forza totale che agisce su di esse sia nulla, altrimenti si avrebbe un'accelerazione infinita. Questo fa sì che:

$$\vec{T}_{2\,\mathrm{s}} + \vec{T}_1 = 0 \qquad \vec{T}_{2\,\mathrm{d}} + \vec{T}_{3\,\mathrm{s}} = 0 \tag{7.55}$$

  Riprendo questo discorso alla fine dell'esercizio per non appesantire troppo la spiegazione.
- *Conclusione di questi passaggi*. Così come le forze che agiscono sulla fune (la tensione) sono uguali e contrarie, così sono uguali e contrarie anche le forze F che la fune esercita sui due corpi a cui è connessa. Cioè:

$$\vec{F}_{2\,\mathrm{s}} = -\vec{F}_1 \qquad \vec{F}_{2\,\mathrm{d}} = -\vec{F}_{3\,\mathrm{s}} \tag{7.56}$$

Quindi, semplificando e riferendoci alle componenti delle forze, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} m_2 a &= F_{2\,\mathrm{s}} + F_{2\,\mathrm{d}} \\ m_2 a &= -F_1 + F_{2\,\mathrm{d}} \end{aligned} \tag{7.57}$$

Consideriamo positive le componenti che vanno verso destra:

$$\begin{aligned} F_{2\,\mathrm{d}} &= m_2 a + F_1 = 230\,\mathrm{kg} \cdot 3{,}51\,\mathrm{m/s^2} + 421\,\mathrm{N} = 807\,\mathrm{N} + 421\,\mathrm{N} = 1228\,\mathrm{N} \\ F_{3\,\mathrm{s}} &= -F_{2\,\mathrm{d}} = -1228\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{7.58}$$

Infine, come verifica di quanto abbiamo calcolato, possiamo cercare di riottenere il valore di F applicando lo stesso metodo al corpo 3.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mathrm{tot}\,3} = m_3\vec{a} &= \vec{F}_{3\,\mathrm{s}} + \vec{F} \\ m_3 a &= F_{3\,\mathrm{s}} + F \\ F &= m_3 a - F_{3\,\mathrm{s}} = 35\,\mathrm{kg} \cdot 3{,}51\,\mathrm{m/s^2} - (-1228\,\mathrm{N}) = 123\,\mathrm{N} + 1228\,\mathrm{N} = 1351\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{7.59}$$

La differenza di 1 N rispetto al valore di partenza è dovuta agli errori di arrotondamento fatti nei diversi passaggi.

3. Se supponiamo che la fune abbia massa trascurabile dobbiamo anche supporre che la forza complessiva che agisce su di essa sia nulla. Infatti, data una qualsiasi forza diversa da zero, l'accelerazione risultante dovrebbe tendere all'infinito: cosa fisicamente impossibile.

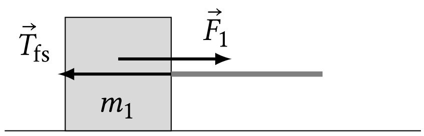
$$a = \frac{F_\mathrm{f}}{m_\mathrm{f}} \tag{7.60}$$

Di conseguenza dobbiamo sempre supporre che la forza totale che agisce sulla fune sia nulla. Da questo deriva che la somma delle forze che esercitiamo alle sue estremità sia nulla e che queste due forze siano uguali e contrarie.

$$\vec{F}_{\mathrm{tot\,f}} = 0 = \vec{T}_{\mathrm{fd}} + \vec{T}_{\mathrm{fs}} \tag{7.61}$$

Con l'espressione *tensione di una fune* si intende solitamente sia la forza che la fune esercita su corpo a cui è attaccata sia la forza in un punto della fune stessa. I due concetti sono distinti e per evitare questa ambiguità abbiamo posto espressamente due domande distinte per le due questioni.
La tensione della fune in un suo punto è il valore della forza che dovremmo applicare ai due lembi della corda per tenerli attaccati se facessimo un taglio in quel punto. Nella figura seguente rappresentiamo la corda tagliata: al lembo di destra dobbiamo applicare una forza $\vec{T'}_{\mathrm{fs}}$ verso sinistra e a quello di sinistra una forza $\vec{T'}_{\mathrm{fd}}$ verso destra: se la massa della corda è trascurabile anche queste due forze sono uguali e contrarie. Tutte e quattro le forze indicate in figura hanno lo stesso modulo.

Non abbiamo specificato il punto in cui abbiamo fatto il taglio quindi la tensione della fune in modulo in ogni suo punto è la stessa.
L'ultimo problema è: quanto vale il modulo di queste forze?
Consideriamo cosa succede tra il primo corpo e la fune e rappresentiamo la tensione all'estremità della fune e la forza che la fune esercita sul corpo (disegno le due forze non sulla stessa retta per ragioni grafiche). Queste due forze per il terzo principio della dinamica sono uguali e contrarie e costituiscono una coppia di azione e reazione. Le due forze *agiscono su oggetti distinti* e sono uguali e contrarie a prescindere che i due corpi siano in equilibrio oppure no.

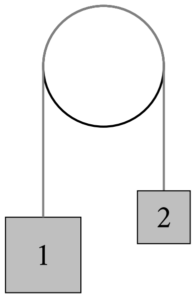


In conclusione:

$$|T_{\mathrm{f}}| = |F_1| = 421\ \mathrm{N} \tag{7.62}$$

Nota finale

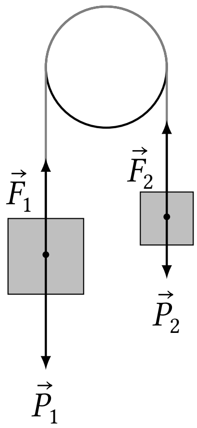
Nelle precedenti versioni di questo documento usavo il termine *tensione della fune* indifferentemente nelle due accezioni indicate sopra. Ora mi sono reso conto che è meglio non confondere mai i due concetti neanche linguisticamente e ho usato distintamente, anche negli esercizi successivi, sempre le due espressioni *forza esercitata dalla fune* e *tensione*.



Esercizio 53 *Ad una ruota, capace di muoversi senza attrito, è appoggiata una fune inestensibile e di massa trascurabile. Alle estremità della fune, da una parte e dell'altra della carrucola, sono appesi due corpi di massa* $m_1 = 5\,\text{kg}$ *e* $m_2 = 2\,\text{kg}$*. La corda si muove con la ruota senza scivolare. La ruota stessa ha massa trascurabile.*
Trova l'accelerazione a cui si muovono le due masse.

I due corpi, a causa del filo inestensibile, si muovono con eguale accelerazione, uno verso il basso e uno verso l'alto. Il limite, con un corpo di massa trascurabile e uno di massa finita, sarebbe un'accelerazione uguale a quella di gravità.

Scegliamo (arbitrariamente) come positiva l'accelerazione verso l'alto e attribuiamola al corpo 1. Aggiungiamo alla figura tutte le forze che agiscono sui due corpi.



Come nell'esercizio precedente, se la massa della fune è trascurabile, la forza totale che agisce su essa deve essere nulla e quindi la forza che essa esercita alle sue estremità deve essere la stessa.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F} \tag{7.63}$$

Applichiamo il secondo principio della dinamica ad entrambe i corpi.

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{tot}\,1} = \vec{F} + \vec{P}_1 \\ \vec{F}_{\text{tot}\,2} = \vec{F} + \vec{P}_2 \end{cases} \tag{7.64}$$

Se passiamo alle componenti possiamo scrivere:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = F + m_1 g \\ m_2 a_2 = F + m_2 g \end{cases} \tag{7.65}$$

In queste equazioni sappiamo già che in modulo $a_1 = a_2$, ma il verso è opposto: ci conviene chiamarle tutte e due a esplicitando il segno meno davanti ad a_2. Inoltre l'accelerazione di gravità è verso il basso quindi andrà presa con il segno meno.

$$\begin{cases} m_1 a = F + m_1 g \\ -m_2 a = F + m_2 g \end{cases} \tag{7.66}$$

Abbiamo un sistema di due equazioni in due incognite. Sottraiamo la seconda dalla prima e sommiamo gli addendi.

$$\begin{aligned} m_1 a - (-m_2 a) &= F - F + m_1 g - m_2 g \\ (m_1 + m_2)a &= (m_1 - m_2)g \end{aligned} \tag{7.67}$$

Infine:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)} = \frac{(5\,\text{kg} - 2\,\text{kg}) \cdot (-9{,}81\,\text{m/s}^2)}{(5\,\text{kg} + 2\,\text{kg})} = -4{,}20\,\text{m/s}^2 \tag{7.68}$$

Il segno meno nell'ultimo risultato significa che il verso effettivo dell'accelerazione del corpo 1 è verso il basso: ciò è quanto avremmo dovuto aspettarci perché il corpo 1 ha una massa maggiore del corpo 2.

In alternativa

Per studiare il sistema formato dai due corpi è utile e possibile rappresentare il sistema come se la fune e le due masse giacessero su un stessa retta. In effetti la fune ha proprio l'effetto di mettere in interazione due corpi le cui forze stanno su direzioni diverse. Possiamo quindi disegnare il seguente diagramma di corpo libero.

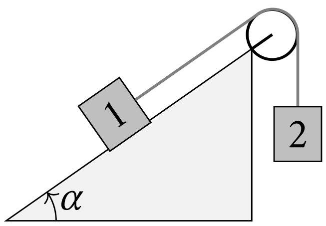
Applichiamo il secondo principio della dinamica al sistema considerando tutte le forze in gioco.

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_1 + \vec{F} - \vec{F} \tag{7.69}$$

La tensione della fune è una forza interna al sistema e si annulla. Scriviamo la relazione precedente per componenti e mettiamo in evidenza l'accelerazione a. Scegliamo come verso positivo quello verso destra.

$$\begin{aligned} F_{\text{tot}} &= P_1 + P_2 \\ (m_1 + m_2)a &= -m_1 g + m_2 g \\ a &= \frac{-m_1 g + m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{(-5\,\text{kg} + 2\,\text{kg}) \cdot (9{,}81\,\text{m/s}^2)}{(5\,\text{kg} + 2\,\text{kg})} = -4{,}20\,\text{m/s}^2 \end{aligned} \tag{7.70}$$

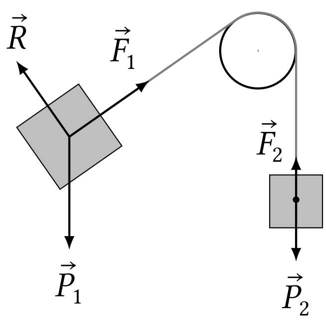
L'accelerazione è negativa quindi il sistema accelera verso sinistra ovvero il corpo di sinistra trascina il corpo di destra con la fune.



Esercizio 54 *Abbiamo un sistema formato da due corpi di massa $m_1 = 8\,\text{kg}$ e $m_2 = 3\,\text{kg}$. I due corpi sono legati da una fune inestensibile e massa trascurabile. Il corpo 1 è poggiato sul piano inclinato indicato in figura ($\alpha = 35°$), sul quale può scivolare senza attrito.*

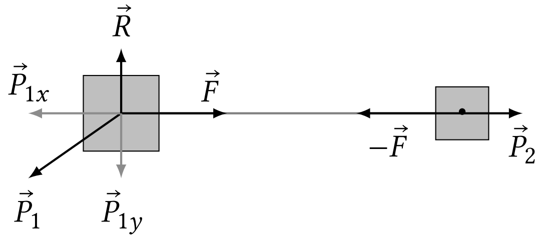
1. *Trova in modulo, direzione e verso l'accelerazione a cui è sottoposto il corpo 2.*
2. *Trova in modulo la tensione della fune.*

1. Cominciamo con riportare in figura tutte le forze che agiscono su i due corpi, costruendo un diagramma di corpo libero (le forze non sono in scala).



Sul *corpo uno* agisce la forza peso $\vec{P}_1$, la reazione vincolare $\vec{R}$ del piano su cui è appoggiato e la tensione della fune $\vec{T}_1$.
Sul *corpo due* agisce la forza peso $\vec{P}_2$ e la forza esercitata dalla fune $\vec{F}_2$.
Le forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ devono essere identiche (in modulo), altrimenti la fune sarebbe un corpo su cui agisce una forza complessiva diversa da zero, ma con massa nulla. Le due cose sono tra loro incompatibili a meno di avere un accelerazione infinita (chiaramente impossibile). Per questo motivo chiamiamo $\vec{F}_1$ semplicemente $\vec{F}$ e chiamiamo $\vec{F}_2$ come $-\vec{F}$, avendo verso opposto.

A questo punto, per studiare il sistema formato dai due corpi, è utile e possibile rappresentare il sistema come se la fune e le due masse giacessero su un stessa retta. In effetti la fune ha proprio l'effetto di mettere in interazione due corpi le cui forze stanno su direzioni diverse. Possiamo quindi disegnare il seguente diagramma di corpo libero, dove abbiamo scomposto la forza peso del corpo uno nei suoi componenti perpendicolari e paralleli alla fune.



Il nostro sistema è accelerato (le due masse o scivolano verso destra o verso sinistra). In verticale invece c'è equilibrio: il corpo uno scivola sul piano rimanendovi attaccato. La reazione vincolare $\vec{R}$ è uguale e contraria alla forza peso $\vec{P}_{1y}$.

$$\vec{R} + \vec{P}_{y1} = 0 \tag{7.71}$$

Invece in orizzontale possiamo scrivere:

$$\vec{P}_{x1} + \vec{F} + (-\vec{F}) + \vec{P}_2 = \vec{F}_{\text{tot x}} \tag{7.72}$$

Prendiamo le componenti considerando come positivo il verso verso destra:

$$P_{x1} + P_2 = m_{\text{tot}}a \tag{7.73}$$

$$-m_1 g \sin(\alpha) + m_2 g = (m_1 + m_2)a \tag{7.74}$$

Ricaviamo l'accelerazione (positiva se il sistema è accelerato verso destra, ovvero se cade il corpo due).

$$a = \frac{-m_1 g \sin(\alpha) + m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{-8\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \sin(35°) + 3\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{8\,\text{kg} + 3\,\text{kg}} = -1{,}41\,\text{m/s}^2 \tag{7.75}$$

Quindi il corpo due è accelerato verso l'alto.

2. Per trovare il valore della tensione della fune consideriamo il corpo due. Applicando ad esso il secondo principio della dinamica possiamo scrivere:

$$-\vec{F} + \vec{P}_2 = \vec{F}_{\text{tot}\,2} \tag{7.76}$$

$$-F + m_2 g = m_2 a \tag{7.77}$$

Nella precedente equazione sulle componenti delle forze che agiscono sul corpo due abbiamo lasciato il vettore $F_{tot\,2}$ con il segno positivo anche se sappiamo che essendo l'accelerazione del corpo diretta verso l'alto (o verso sinistra nell'ultimo disegno mostrato) il componente del vettore è negativo: il segno corretto compare comunque quando sostituiamo il valore con segno di a nel calcolo finale.

$$-F = m_2 a - m_2 g \tag{7.78}$$

Possiamo infatti sostituire l'accelerazione a con segno che prima abbiamo travato.

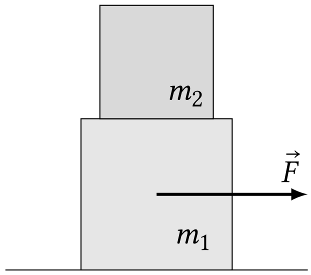
$$F = m_2 g - m_2 a = 3\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} - (3\,\mathrm{kg} \cdot -1{,}41\,\mathrm{m/s^2}) = 33{,}7\,\mathrm{N} \tag{7.79}$$

Infine, per il terzo principio della dinamica, la tensione della fune ad una sua estremità è uguale e contraria alla forza che la fune esercita sul corpo in quel punto:

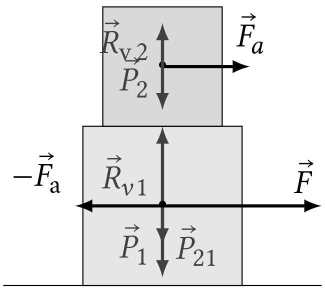
$$|T| = |F| \tag{7.80}$$

Esercizio 55 *Abbiamo un sistema formato da due corpi di massa $m_1 = 15\,\text{kg}$ e $m_2 = 11\,\text{kg}$. I due corpi sono poggiati uno sopra l'altro. Tra il primo e secondo corpo è presente attrito: il coefficiente di attrito statico è $\mu_\text{s} = 0{,}5$, quello dinamico $\mu_\text{d} = 0{,}3$.*
Tra il secondo corpo e il piano d'appoggio non c'è attrito.
Il corpo uno è spinto verso destra da una forza $F = 160\,\text{N}$.

1. *Trova se il corpo due rimarrà fermo sul corpo uno.*
2. *Nel caso scivolasse trova la forza totale che agisce su uno e su due.*
3. *Trova l'accelerazione con cui i due corpi si muovono.*



Cominciamo con riportare in figura tutte le forze che agiscono sui due corpi, costruendo un diagramma di corpo libero (le forze non sono in scala).



Sul *corpo due* agisce la forza peso $\vec{P}_2$, la reazione vincolare $\vec{R}_{\text{v}\,2}$ del piano su cui è appoggiato (cioè il corpo uno) e la forza di attrito $\vec{F}_\text{a}$.
Sul *corpo uno* agisce la forza peso $\vec{P}_1$, la reazione vincolare $\vec{R}_{\text{v}\,1}$ del piano su cui è appoggiato, la forza $\vec{F}$, una forza d'attrito $\vec{F}_\text{a}$ uguale e contraria a quella che spinge il corpo due. Inoltre agisce anche la forza peso trasmessa dal corpo due e che abbiamo chiamato $\vec{P}_{21}$: il corpo uno deve sostenere il suo peso e quello del corpo due.
Tutte le forze che agiscono in verticale sui due corpi sono equilibrate: infatti i due corpi possono solo muoversi in orizzontale.

A questo punto, per studiare il sistema formato dai due corpi, trascuriamo le forze che agiscono in verticale (se non per quanto riguarda l'attrito) e concentriamoci su quelle che agiscono in orizzontale.

1. Osserviamo la figura e applichiamo al corpo due il secondo principio della dinamica.

$$\vec{F}_{\text{tot}\,2} = \vec{F}_\text{a} \tag{7.81}$$

Il corpo due viene trascinato verso destra dalla forza d'attrito. Se il corpo non scivola l'attrito è statico. Determiniamo quindi quanto vale la massima forza di attrito statico che il corpo può sopportare. Osserviamo che il corpo è schiacciato solo dalla sua forza peso per cui:

$$F_{\text{a.s. MAX}} = \mu F_\text{schiacciamento} = \mu_\text{s}|\vec{P}_2| = \mu_\text{s} mg = 0{,}5 \cdot 11\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 53{,}9\,\text{N} \tag{7.82}$$

Se il corpo due non scivola sul corpo uno allora i corpi costituiscono un sistema solidale di due corpi sospinto dalla forza totale $\vec{F}$ e che si muove tutto con la stessa accelerazione:

$$\vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a} \tag{7.83}$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{160\,\text{N}}{15\,\text{kg} + 11\,\text{kg}} = 6{,}15\,\text{m/s}^2 \tag{7.84}$$

Riscriviamo il secondo principio della dinamica riferito al corpo due, supponendo che rimanga attaccato al corpo uno:

$$F_{\text{tot}\,2} = m_2 a = 11\,\text{kg} \cdot 6{,}15\,\text{m/s}^2 = 67{,}7\,\text{N} \tag{7.85}$$

Questo fatto ci porta a dire che $F_{\text{a.s. MAX}} < F_{\text{tot 2}}$: la forza di attrito non basta a trascinare il corpo senza farlo scivolare, quindi **il corpo due scivola sul corpo uno**.

2. A questo punto possiamo dire che è presente attrito dinamico. Calcoliamo questa forza d'attrito:

$$F_{\text{a}} = \mu F_{\text{schiacciamento}} = \mu_{\text{d}}|\vec{P}_2| = \mu_{\text{d}} mg = 0{,}3 \cdot 11\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 32{,}4\,\text{N} \tag{7.86}$$

Questa forza corrisponde anche alla forza totale che agisce sul corpo due:

$$F_{\text{tot 2}} = F_{\text{a}} \tag{7.87}$$

Sul corpo uno invece agisce sia la forza $\vec{F}$ che la forza di attrito $-\vec{F}_{\text{a}}$

$$\vec{F}_{\text{tot 1}} = \vec{F} + (-\vec{F}_{\text{a}}) \tag{7.88}$$

$$F_{\text{tot 1}} = F - F_a = 160\,\text{N} - 32{,}4\,\text{N} = 128\,\text{N} \tag{7.89}$$

3. Ora sappiamo la forza totale che agisce sui due corpi; possiamo ricavare l'accelerazione corrispondente.

$$a_1 = \frac{F_{\text{tot 1}}}{m1} = \frac{128\,\text{N}}{15kg} = 8{,}53\,\text{m/s}^2 \tag{7.90}$$

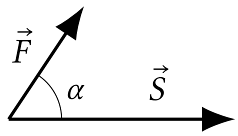
$$a_2 = \frac{F_{\text{tot 2}}}{m2} = \frac{32{,}4\,\text{N}}{11kg} = 2{,}93\,\text{m/s}^2 \tag{7.91}$$

Il corpo due accelera meno del corpo uno.

8 Lavoro e energia

8.1 Lavoro

Esercizio 56 *Quanto lavoro fa una forza, il cui modulo vale* 15 N*, che muove il suo punto di applicazione di* 25 m *come indicato in figura* ($\alpha = 60°$)*?*

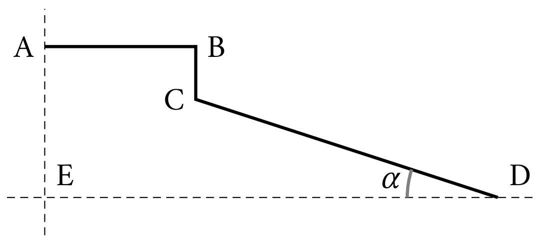


Il lavoro fatto da una forza $\vec{F}$ costante per spostare il suo punto di applicazione di una quantità $\vec{S}$ è dato dal prodotto scalare di $\vec{F}$ per $\vec{S}$:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}||\vec{S}| \cos \alpha = 15\,\mathrm{N} \cdot 25\,\mathrm{m} \cdot 0{,}5 = 187{,}5\,\mathrm{J} \tag{8.1}$$

Esercizio 57 *Un corpo puntiforme di massa* 6 kg *viene spostato dal punto* A *al punto* D *seguendo il percorso indicato nella figura seguente.* $\overline{\mathrm{AB}} = 3\,\mathrm{dm}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 26\,\mathrm{mm}$, $\overline{\mathrm{CD}} = 88\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 22°$.

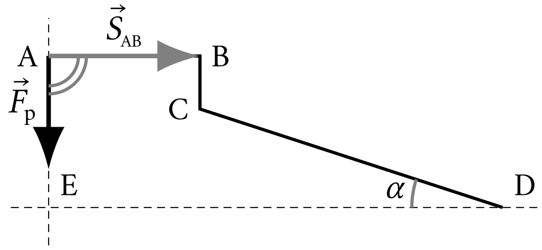
1. *Trova il lavoro totale compiuto dalla forza peso che agisce sul corpo nel compiere quello spostamento.*
2. *Trova il lavoro totale compiuto dalla forza peso che agisce sul corpo nel compiere lo spostamento alternativo* A - E - D.
3. *Come ci aspettiamo che siano i due lavori ottenuti e perché?*



La forza peso che agisce sull'oggetto ha lo stesso valore in ogni punto del percorso (stiamo rimanendo in prossimità della superficie terrestre).

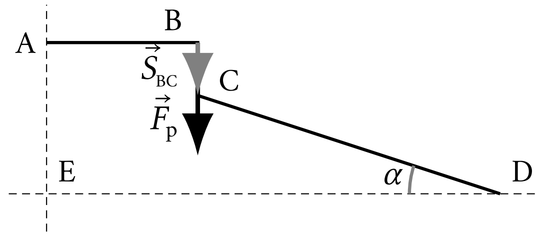
$$F_\mathrm{p} = mg = 6\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 58{,}9\,\mathrm{N} \tag{8.2}$$

La formula usata nel precedente esercizio per trovare il lavoro compiuto da una forza si può applicare solo se lo spostamento è rettilineo e la forza rimane costante. Altrimenti possiamo sommare il lavoro elementare compiuto nei singoli tratti rettilinei.



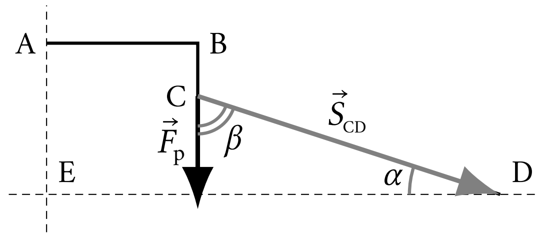
Consideriamo allora il primo tratto $\overline{AB}$. La forza è diretta verso il basso e lo spostamento forma un angolo di 90° con la forza.

$$L_{AB} = |\vec{F}_p||\vec{S}_{AB}|\cos(90°) = 58{,}9\,\text{N} \cdot 3\,\text{dm} \cdot 0 = 0\,\text{J} \tag{8.3}$$



Consideriamo il secondo tratto $\overline{BC}$. La forza è diretta verso il basso e lo spostamento forma un angolo di 0° con la forza.

$$L_{BC} = |\vec{F}_p||\vec{S}_{BC}|\cos(0°) = 58{,}9\,\text{N} \cdot 26\,\text{mm} \cdot 1 = 58{,}9\,\text{N} \cdot 0{,}026\,\text{m} = 1{,}53\,\text{J} \tag{8.4}$$



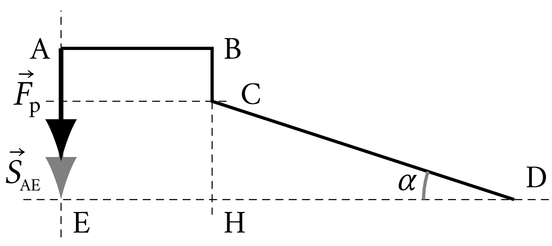
Consideriamo il terzo tratto $\overline{CD}$. La forza è diretta verso il basso. Per trovare l'angolo β che lo spostamento forma con la forza osserviamo nella precedente figura che esso è il terzo angolo di un triangolo rettangolo in cui l'altro angolo acuto è α. Per cui possiamo scrivere:

$$\beta = 180° - \alpha - 90° = 180° - 22° - 90° = 68° \tag{8.5}$$

$$L_{CD} = |\vec{F}_p||\vec{S}_{CD}|\cos(68°) = 58{,}9\,\text{N} \cdot 88\,\text{cm} \cdot 0{,}375 = 58{,}9\,\text{N} \cdot 0{,}88\,\text{m} \cdot 0{,}375 = 19{,}42\,\text{J} \tag{8.6}$$

Infine il lavoro totale è:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} = 0\,\text{J} + 1{,}53\,\text{J} + 19{,}42\,\text{J} = 20{,}95\,\text{J} \tag{8.7}$$

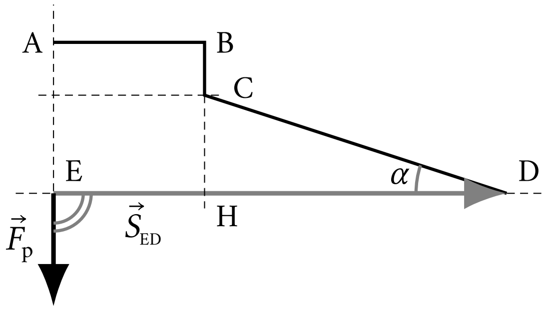


Consideriamo adesso il percorso alternativo A - E - D. Partiamo dal tratto $\overline{AE}$: esso è formato da un tratto lungo quanto $\overline{BC}$ e da un tratto lungo quanto $\overline{CH}$. Quest'ultimo, in particolare può essere visto come la proiezione sulla verticale del tratto $\overline{CD}$. Per cui possiamo scrivere:

$$|\vec{S}_{AE}| = |\vec{S}_{BC}| + |\vec{S}_{CD}| \sin(\alpha) = 0{,}026\ \mathrm{m} + 0{,}88\ \mathrm{m} \cdot \sin(22°) = 0{,}356\ \mathrm{m} \tag{8.8}$$

La forza peso è parallela allo spostamento quindi:

$$L_{AE} = |\vec{F}_p||\vec{S}_{AE}| \cos(0°) = 58{,}9\ \mathrm{N} \cdot 0{,}356\ \mathrm{m} \cdot 1 = 20{,}97\ \mathrm{J} \tag{8.9}$$



Nel tratto $\overline{ED}$ lo spostamento è lungo quanto il tratto $\overline{AB}$ più il tratto $\overline{HD}$. Quest'ultimo può essere visto come la proiezione in orizzontale del tratto $\overline{CD}$. Per cui possiamo scrivere:

$$|\vec{S}_{ED}| = |\vec{S}_{AB}| + |\vec{S}_{CD}| \cos(\alpha) = 3\ \mathrm{m} + 0{,}88\ \mathrm{m} \cdot \cos(22°) = 3{,}82\ \mathrm{m} \tag{8.10}$$

La forza peso è perpendicolare allo spostamento quindi:

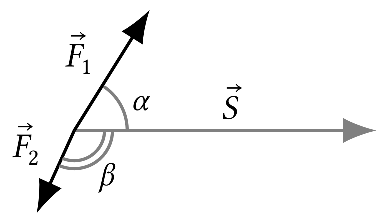
$$L_{ED} = |\vec{F}_p||\vec{S}_{ED}| \cos(90°) = 58{,}9\ \mathrm{N} \cdot 3{,}82\ \mathrm{m} \cdot 0 = 0\ \mathrm{J} \tag{8.11}$$

Infine il lavoro totale è:

$$L_{tot} = L_{AE} + L_{ED} = 20{,}97\ \mathrm{J} + 0\ \mathrm{J} = 20{,}97\ \mathrm{J} \tag{8.12}$$

Il lavoro compiuto dalla forza peso per spostare il suo punto di applicazione dal punto A al punto E è risultato (nel limite degli arrotondamenti introdotti nel calcolo) lo stesso. Questa è una conseguenza della conservatività di questa forza: qualsiasi percorso avessimo scelto per andare da A ad E il lavoro della forza peso sarebbe stato lo stesso.

Esercizio 58 *Due forze, il cui modulo vale rispettivamente* 75 N *e* 35 N*, spostano un corpo per* 25 m *come indicato in figura.* ($\alpha = 40°$; $\beta = 100°$).
Trova il lavoro totale compiuto dalle due forze .



Il lavoro totale compiuto da più forze che compiono lo stesso spostamento è uguale alla somma dei lavori delle singole forze. Per cui il lavoro compiuto dalle due forze è:

$$L_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{s} = |\vec{F}_1||\vec{s}| \cos(\alpha) = 75\ \mathrm{N} \cdot 25\ \mathrm{m} \cdot 0{,}766 = 1436\ \mathrm{J} \tag{8.13}$$

$$L_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{s} = |\vec{F}_2||\vec{s}| \cos(\beta) = 35\ \mathrm{N} \cdot 25\ \mathrm{m} \cdot (-0{,}174) = -152\ \mathrm{J} \tag{8.14}$$

$$L_{tot} = L_1 + L_2 = 1436\ \mathrm{J} - 152\ \mathrm{J} = 1284\ \mathrm{J} \tag{8.15}$$

Esercizio 59 *Una forza variabile F sposta il suo punto di applicazione su un percorso rettilineo ed è così definita:*

$$F(x) = \begin{cases} 3\,\mathrm{N} & se\ \ 0\,\mathrm{m} \le x < 2\,\mathrm{m} \\ 2\,\mathrm{N} + \dfrac{x}{2}(\mathrm{N/m}) & se\ \ 2\,\mathrm{m} \le x < 4\,\mathrm{m} \\ 16\,\mathrm{N} - 3x(\mathrm{N/m}) & se\ \ 4\,\mathrm{m} \le x < 6\,\mathrm{m} \\ -8\,\mathrm{N} + x(\mathrm{N/m}) & se\ \ 6\,\mathrm{m} \le x \end{cases} \tag{8.16}$$

Trova il lavoro svolto dalla forza nel tratto tra $x = 0\,\mathrm{m}$ *e* $x = 8\,\mathrm{m}$, *sapendo che l'angolo tra forza e spostamento è nullo.*

Il lavoro di una forza variabile è legato all'area sottesa dalla curva che descrive la forza in un grafico forza/spostamento. La nostra forza è definita per casi, con una espressione diversa a seconda dell'intervallo considerato.

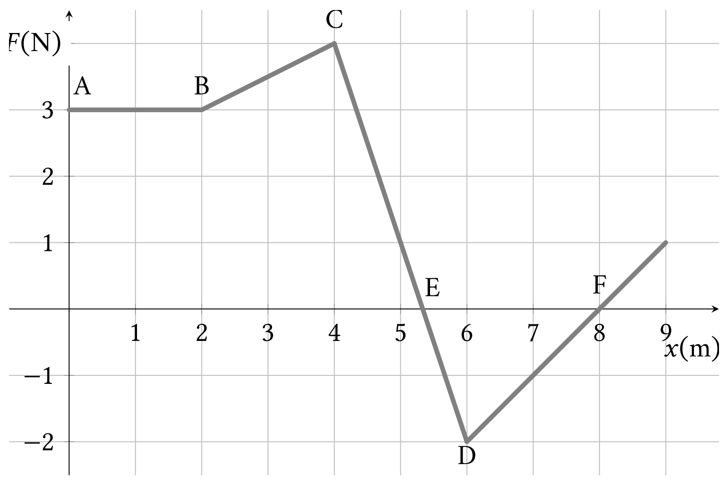
Il primo caso è una funzione costante; gli altri sono funzioni lineari e quindi rappresentano delle rette. Per disegnare queste rette basta calcolare due punti della retta: il primo e l'ultimo dell'intervallo, ad esempio. Per la funzione costante basta un tratto orizzontale col valore della costante.

$$\text{secondo caso:} \qquad \begin{cases} F(2\,\mathrm{m}) = 2\,\mathrm{N} + \dfrac{2\,\mathrm{m}}{2}(\mathrm{N/m}) = 3\,\mathrm{N} \\ F(4\,\mathrm{m}) = 2\,\mathrm{N} + \dfrac{4\,\mathrm{m}}{2}(\mathrm{N/m}) = 4\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{8.17}$$

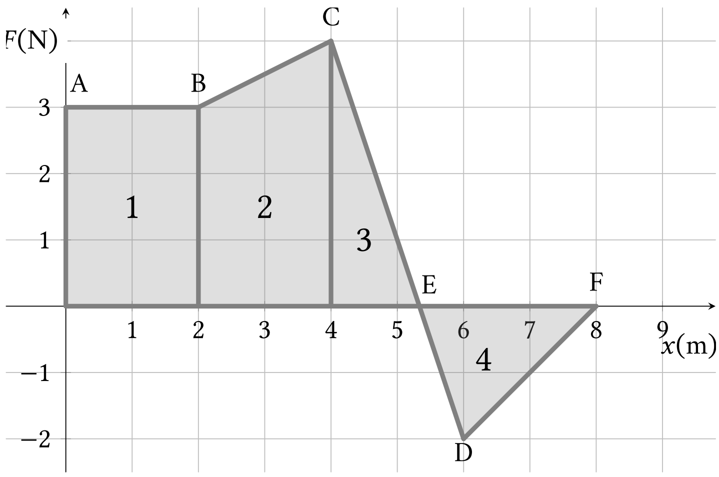
$$\text{terzo caso:} \qquad \begin{cases} F(4\,\mathrm{m}) = 16\,\mathrm{N} - 3(4\,\mathrm{m})(\mathrm{N/m}) = 4\,\mathrm{N} \\ F(6\,\mathrm{m}) = 16\,\mathrm{N} - 3(6\,\mathrm{m})(\mathrm{N/m}) = -2\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{8.18}$$

$$\text{quarto caso:} \qquad \begin{cases} F(6\,\mathrm{m}) = -8\,\mathrm{N} + (6\,\mathrm{m})(\mathrm{N/m}) = -2\,\mathrm{N} \\ F(8\,\mathrm{m}) = -8\,\mathrm{N} + (8\,\mathrm{m})(\mathrm{N/m}) = 0\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{8.19}$$

Riportiamo quanto descritto nel grafico seguente, indicando con una lettera gli estremi dei tratti o la loro intersezione con gli assi.



Ora dividiamo il grafico ottenuto (nell'intervallo richiesto dall'esercizio) in aree facilmente calcolabili, come di seguito indicato.



Il lavoro di una forza variabile è legato all'area sottesa dal grafico della forza rispetto all'asse dello spostamento. Quest'area va presa con il segno positivo se la forza è positiva e negativa altrimenti. Il lavoro totale compiuto è dato dalla somma algebrica delle aree.

Nel grafico precedente possiamo individuare quattro aree. Per l'area 3 e 4 abbiamo bisogno di conoscere dove la curva del terzo caso interseca l'asse x. Troviamo quel punto E imponendo che la funzione sia nulla, cioè imponendo che la forza sia uguale a zero.

$$\begin{aligned} F(x) = 16\,\mathrm{N} - 3x(\mathrm{N/m}) &= 0\,\mathrm{N} \\ 3x(\mathrm{N/m}) &= 16\,\mathrm{N} \\ x = \frac{16}{3}\,\mathrm{m} &\simeq 5{,}33\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{8.20}$$

Lavoro dell'area (rettangolare) 1.

$$L_1 = 2\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{N} = 6\,\mathrm{J} \qquad\qquad A = b \cdot h \tag{8.21}$$

Lavoro dell'area (trapezioidale) 2.

$$L_2 = \frac{(3\,\mathrm{N} + 4\,\mathrm{N}) \cdot 2\,\mathrm{m}}{2} = 7\,\mathrm{J} \qquad\qquad A = \frac{(b_\mathrm{M} + b_\mathrm{m})h}{2} \tag{8.22}$$

Lavoro dell'area (triangolare) 3.

$$L_3 = \frac{1{,}33\,\mathrm{m} \cdot 4\,\mathrm{N}}{2} = 2{,}66\,\mathrm{J} \qquad\qquad A = \frac{bh}{2} \tag{8.23}$$

Lavoro dell'area (triangolare) 4.

$$L_4 = -\frac{2{,}67\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{N}}{2} = -2{,}67\,\mathrm{J} \qquad\qquad A = \frac{bh}{2} \tag{8.24}$$

Infine:

$$L_\mathrm{tot} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 6\,\mathrm{J} + 7\,\mathrm{J} + 2{,}66\,\mathrm{J} - 2{,}67\,\mathrm{J} = 13\,\mathrm{J} \tag{8.25}$$

Osservazione. Il coseno dell'angolo tra forza e spostamento non è comparso perché la consegna dice che i due vettori sono paralleli. Altrimenti avremmo dovuto moltiplicare tutti i lavori per il valore del coseno.

8.2 Potenza

Esercizio 60 *In* 127 s *un blocco viene trascinato per* 68 cm *su un piano orizzontale da una forza di* 79 N*, la cui direzione forma un angolo di* 69° *rispetto al piano stesso.*

Calcola la potenza con la quale viene eseguito il lavoro.

La potenza è definita come lavoro per unità di tempo:

$$P = \frac{L}{t} \tag{8.26}$$

In questo caso il lavoro fatto dalla forza è:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}||\vec{S}|\cos(\theta) = 79\,\mathrm{N} \cdot 0{,}68\,\mathrm{m} \cdot 0{,}358 = 19{,}3\,\mathrm{J} \tag{8.27}$$

La potenza sviluppata è quindi:

$$P = \frac{19{,}3\,\mathrm{J}}{127\,\mathrm{s}} = 0{,}152\,\mathrm{W} \tag{8.28}$$

8.3 Energia cinetica

Esercizio 61 *Una merendina ha una energia chimica di* 180 kcal*. Trasformando questa energia tutta in energia cinetica di un corpo di massa* 14 kg *a che velocità potrebbe arrivare, supponendo che parta da fermo e si muova su un piano senza attrito?*

Supponiamo, secondo quanto indicato dal testo, che tutta l'energia chimica della merendina si renda disponibile per il corpo dato sotto forma di energia cinetica. Ricordando la definizione di energia cinetica E_c di un corpo di massa m e velocità $\vec{v}$, possiamo scrivere:

$$E_\mathrm{iniziale} = E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{8.29}$$

In quest'ultima espressione conosciamo tutte le grandezze tranne la velocità. Se la mettiamo in evidenza nelle espressioni date abbiamo risolto il problema.

L'energia è data in kcal; la dobbiamo trasformare in joule, nel Sistema Internazionale, ricordando che una caloria è equivalente a circa 4,186 J.

$$480\,\mathrm{kcal} = 480000\,\mathrm{cal} = 480000 \cdot 4{,}186\,\mathrm{J} = 2009280\,\mathrm{J} \tag{8.30}$$

$$v^2 = \frac{2E_\mathrm{c}}{m} \tag{8.31}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{c}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2009280\,\mathrm{J}}{14\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{281143\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = 536\,\mathrm{m/\,s} \tag{8.32}$$

8.4 Teorema dell'energia cinetica

Esercizio 62 *Una forza F spinge un treno di massa* $m = 3{,}4 \times 10^5$ kg *in orizzontale per due minuti. La velocità del treno cambia da* 25 km/h *a* 35 km/h.

Supponendo che il treno non sia rallentato da alcun attrito, trova il lavoro fatto dalla forza F.

Per trovare il lavoro fatto dalla forza in generale dobbiamo sapere di quanto si è spostato il suo punto di applicazione. In questo caso potremmo ricavare lo spazio percorso dalla variazione di velocità e dal tempo nel quale dura, aggiungendo l'ulteriore ipotesi che il moto sia uniformemente accelerato.

Oppure, più semplicemente e senza ulteriori ipotesi, possiamo applicare il *teorema dell'energia cinetica*: il lavoro fatto da tutte le forze che agiscono sul corpo è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo.

$$L_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{f}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{i}}^2 \tag{8.33}$$

Nel nostro caso le forze in gioco sono la forza F, la forza peso P e la reazione vincolare del piano R_{v}: la forza perso è equilibrata dalla reazione vincolare e quindi non compiono lavoro. In ogni caso sono perpendicolari allo spostamento e per entrambe il coseno dell'angolo che compare nel prodotto scalare del lavoro darebbe zero.

In conclusione, il lavoro di tutte le forze è proprio il lavoro della forza F.

$$L_F = \frac{1}{2}(3{,}4 \times 10^5\ \mathrm{kg})(9{,}72\ \mathrm{m/s})^2 - \frac{1}{2}(3{,}4 \times 10^5\ \mathrm{kg})(6{,}94\ \mathrm{m/s})^2 = 7{,}9 \times 10^6\ \mathrm{J} \tag{8.34}$$

Le velocità devono essere trasformate in metri al secondo altrimenti il risultato non sarebbe in joule.

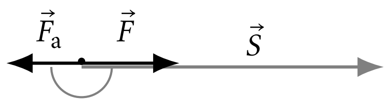
Esercizio 63 *Una forza F spinge una slitta di massa* $m = 125$ kg *in orizzontale per* 10 m. *La velocità della slitta cambia da* 15 km/h *a* 32 km/h. *Sulla slitta agisce inoltre una forza di attrito con coefficiente d'attrito dinamico* $\mu_{\mathrm{d}} = 0{,}2$.

Trova il lavoro fatto dalla forza F.

Per trovare la risposta a questo esercizio usiamo, come nel precedente, il teorema dell'energia cinetica. In questo caso la forza F non è l'unica che compie il lavoro, c'è anche la forza d'attrito.

$$L_{\mathrm{tot}} = L_F + L_{F_{\mathrm{a}}} \tag{8.35}$$

La forza d'attrito è diretta in verso opposto allo spostamento e dipende dalla forza con cui il corpo è schiacciato, in questo caso la forza peso (che non compie lavoro).



$$F_{\mathrm{a}} = \mu_{\mathrm{d}} mg = 0{,}2 \cdot 125\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} = 245\ \mathrm{N} \tag{8.36}$$

$$L_{F_{\mathrm{a}}} = F_{\mathrm{a}} S \cos(180°) = 245\ \mathrm{N} \cdot 10\ \mathrm{m} \cdot (-1) = -2450\ \mathrm{J} \tag{8.37}$$

$$L_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{f}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{i}}^2 = \frac{1}{2}(125\ \mathrm{kg})(8{,}89\ \mathrm{m/s})^2 - \frac{1}{2}(125\ \mathrm{kg})(4{,}17\ \mathrm{m/s})^2 = 979\ \mathrm{J} \tag{8.38}$$

Infine:

$$L_F = L_{\mathrm{tot}} - L_{F_{\mathrm{a}}} = 979\ \mathrm{J} - (-2450\ \mathrm{J}) = 3430\ \mathrm{J} \tag{8.39}$$

8.5 Energia potenziale

Esercizio 64 *Un corpo si trova in un punto dello spazio in cui l'energia potenziale vale* 560 J. *Questo corpo viene spostato di* 12 m *da una forza conservativa* F *(legata a quell'energia potenziale) che opera nello stesso verso e direzione dello spostamento, compiendo un lavoro* $L = 1200\,\mathrm{J}$. *Dopo questo spostamento il corpo viene spostato in un altro punto in cui l'energia potenziale vale* $U = -200\,\mathrm{J}$.

1. *Quanto vale l'energia potenziale nel secondo punto?*
2. *Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza* F *nel secondo spostamento?*

1. Per definizione di energia potenziale possiamo scrivere che la variazione di energia potenziale tra un punto A e un punto B è uguale al lavoro cambiato di segno della forza conservativa ad essa associata, compiuto se viene spostato il suo punto di applicazione dal punto A al punto B:

$$\Delta U = U_\mathrm{B} - U_\mathrm{A} = -L_\mathrm{AB} \tag{8.40}$$

Nel nostro caso chiamiamo A il primo punto e B il secondo. Mettiamo quindi in evidenza l'energia potenziale nel secondo punto:

$$U_\mathrm{B} = U_\mathrm{A} - L_\mathrm{AB} = 560\,\mathrm{J} - 1200\,\mathrm{J} = -640\,\mathrm{J} \tag{8.41}$$

2. Applichiamo nuovamente la definizione di energia potenziale al secondo spostamento che ci porta ad un terzo punto C:

$$U_\mathrm{C} - U_\mathrm{B} = -L_\mathrm{BC} \tag{8.42}$$

Mettiamo quindi in evidenza il lavoro:

$$L_\mathrm{BC} = -U_\mathrm{C} + U_\mathrm{B} = -(-200\,\mathrm{J}) + (-640\,\mathrm{J}) = -440\,\mathrm{J} \tag{8.43}$$

Esercizio 65 *Una molla ideale di costante elastica* 3400 N/m *è compressa di* 3 cm.

1. *Quanto vale l'energia potenziale associata alla molla?*
2. *Quanto vale il lavoro compiuto dalla molla se viene compressa di altri* 5 cm*?*
3. *Quanto vale il lavoro compiuto da una forza esterna alla molla per effettuare questa compressione?*

1. L'energia potenziale associata alla molla vale:

$$U = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2} \cdot 3400\,\mathrm{N/m} \cdot (0{,}03\,\mathrm{m})^2 = 1{,}53\,\mathrm{J} \tag{8.44}$$

dove Δx è l'allungamento o compressione della molla rispetto alla sua posizione di equilibrio.

2. Il lavoro compiuto dalla forza elastica della molla quando questa passa dalla compressione Δx_i alla compressione Δx_f vale:

$$L_\mathrm{elas.} = U_i - U_f = \frac{1}{2}k(\Delta x_\mathrm{i})^2 - \frac{1}{2}k(\Delta x_\mathrm{f})^2 \tag{8.45}$$

Se la molla viene compressa di altri 5 cm vuol dire che la nuova compressione arriva a 5 cm + 3 cm = 8 cm. Per cui:

$$L_\mathrm{elas.} = \frac{1}{2} \cdot 3400\,\mathrm{N/m} \cdot (0{,}03\,\mathrm{m})^2 - \frac{1}{2} \cdot 3400\,\mathrm{N/m} \cdot (0{,}08\,\mathrm{m})^2 = 1{,}53\,\mathrm{J} - 10{,}88\,\mathrm{J} = -9{,}35\,\mathrm{J} \tag{8.46}$$

Il lavoro è negativo perché la forza elastica si oppone allo spostamento.

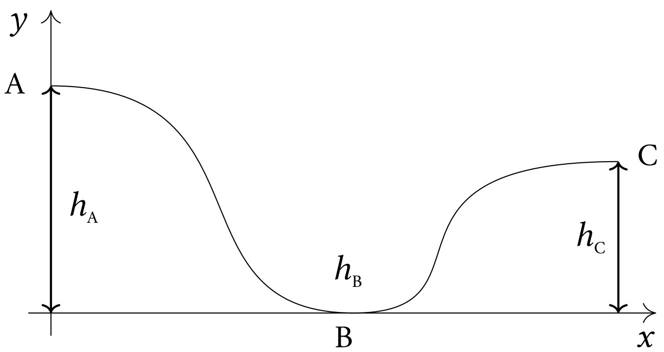
3. Il lavoro compiuto da una forza esterna per compiere la stessa compressione è uguale e contrario a quello della forza elastica.

$$L_{\text{esterna}} = -L_{\text{elas.}} \tag{8.47}$$

8.6 Conservazione dell'energia meccanica

Esercizio 66 *Un oggetto di massa* 3,5 kg *scende lungo un pendio privo di attrito partendo da fermo dal punto* A *ad un'altezza* $h_{\mathrm{A}} = 13\,\mathrm{m}$.

1. *Qual è l'energia meccanica iniziale del corpo?*
2. *Che velocità avrà nel punto* B *a valle all'altezza* $h_{\mathrm{B}} = 0\,\mathrm{m}$ *?*
3. *Che velocità nel punto* C *ad un'altezza* $h_{\mathrm{C}} = 5\,\mathrm{m}$*?*
4. *Il corpo potrebbe superare la collina oltre il punto* C*?*



Se un corpo scivola su un pendio senza attrito esso sarà soggetto, in mancanza di altre indicazioni, alla sola forza di gravità e la forza vincolare del piano. La forza vincolare del pendio è sempre perpendicolare ad esso e il corpo scivola parallelamente alla superficie. Questa forza non compie lavoro perché forza e spostamento formano un angolo retto; d'altra parte la forza di gravità è una forza conservativa.

Quindi possiamo applicare al nostro corpo il *principio di conservazione dell'energia meccanica: su un corpo soggetto solo a forze conservative l'energia meccanica si conserva* (Possiamo anche dire e meglio: in cui compiono lavoro solo forze conservative).

L'energia meccanica è la somma dell'energia cinetica e potenziale del corpo. In questo caso possiamo scrivere:

$$E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \tag{8.48}$$

Se l'energia meccanica si conserva allora possiamo legare quel che accade in due punti diversi con questa grandezza comune.

Si calcola l'energia meccanica in un punto in cui tutte le grandezze in essa contenute sono note. Conosciuta questa energia, che deve essere la stessa dappertutto, si può ricavare una delle grandezze in essa contenuta per un altra posizione del corpo, conoscendo il valore di tutte le altre grandezze nella nuova posizione.

1. Nel punto A la velocità v_{A} vale 0 m/s perché il corpo parte da fermo; l'altezza h_{A} è nota. Possiamo determinare l'energia meccanica. L'energia meccanica vale:

$$E_{\mathrm{m_A}} = \frac{1}{2}m \cdot (0\,\mathrm{m/s})^2 + 3{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 13\,\mathrm{m} = 446{,}4\,\mathrm{J} \tag{8.49}$$

2. Nel punto B conosciamo tutte le grandezze tranne la velocità v_{B}. Allora leghiamo l'energia meccanica nel punto in cui la conosciamo (il punto iniziale A), all'energia meccanica in B.

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{m_A}} &= E_{\mathrm{m_B}} \\ E_{\mathrm{m_A}} &= \frac{1}{2} m v_{\mathrm{B}}^2 + m g h_{\mathrm{B}} \\ E_{\mathrm{m_A}} &= \frac{1}{2} m v_{\mathrm{B}}^2 \qquad (h_{\mathrm{B}} = 0\,\mathrm{m}) \end{aligned} \tag{8.50}$$

l'espressione che ci dà l'energia meccanica è diventata un'equazione algebrica di secondo grado la cui incognita è la velocità che cerchiamo.

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{B}}^2 &= \frac{E_{\mathrm{m_A}}}{\frac{1}{2} m} \\ v_{\mathrm{B}} &= \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\mathrm{m_A}}}{m}} \end{aligned} \tag{8.51}$$

La velocità nel punto *B* vale:

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 446{,}4\,\mathrm{J}}{3{,}5\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{255\,\mathrm{m^2/s^2}} = 16{,}0\,\mathrm{m/s} \tag{8.52}$$

3. Nel punto *C* valgono gli stessi ragionamenti del punto *B*, ma in questo caso l'altezza è h_{C}. Possiamo ricavare la velocità v_{C} dalle altre grandezze.

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{m_A}} &= E_{\mathrm{m_C}} \\ E_{\mathrm{m_A}} &= \frac{1}{2} m v_{\mathrm{C}}^2 + m g h_C \\ \frac{1}{2} m v_{\mathrm{C}}^2 &= E_{\mathrm{m_A}} - m g h_{\mathrm{C}} \\ v_{\mathrm{C}}^2 &= \frac{E_{\mathrm{m_A}} - m g h_{\mathrm{C}}}{\frac{1}{2} m} \\ v_{\mathrm{C}} &= \sqrt{\frac{2(E_{\mathrm{m_A}} - m g h_{\mathrm{C}})}{m}} \end{aligned} \tag{8.53}$$

La velocità nel punto *C* vale:

$$v_{\mathrm{C}} = \sqrt{\frac{2(446{,}4\,\mathrm{J} - 3{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 5\,\mathrm{m})}{3{,}5\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{549{,}5\,\mathrm{J}}{3{,}5\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{157\,\mathrm{m^2/s^2}} = 12{,}5\,\mathrm{m/s} \tag{8.54}$$

4. Il punto *C* si trova ad una altezza inferiore al punto *A*. Il corpo, proprio per la conservazione dell'energia meccanica, può scivolare sul pendio finché non giunge ad una altezza uguale a quella di partenza, dove l'energia potenziale avrà lo stesso valore iniziale e l'energia cinetica si annulla e il corpo si ferma.
   Quindi il corpo può risalire fino al punto *C*.

Esercizio 67 *Un oggetto, lanciato verticalmente verso l'alto, raggiunge un'altezza di* 644 cm*. Se ne determini la velocità iniziale nel sistema S.I. .*

In questo problema conosciamo l'altezza iniziale ($h_\mathrm{i} = 0\,\mathrm{m}$) e finale ($h_\mathrm{f} = 6{,}44\,\mathrm{m}$) raggiunta dall'oggetto, conosciamo la sua velocità finale ($v_\mathrm{f} = 0\,\mathrm{m/s}$) ma non conosciamo la velocità iniziale. Inoltre nel suo moto l'oggetto è soggetto alla sola forza di gravità, se trascuriamo l'attrito dell'aria: cosa lecita se diamo una descrizione approssimativa del moto.

La soluzione al problema ci può venire quindi dall'applicazione del principio di conservazione dell'energia meccanica che ci dice che in presenza di sole forze conservative (come la forza di gravità) l'energia meccanica si conserva e quindi l'eventuale variazione dell'energia cinetica è uguale e contraria alla variazione dell'energia potenziale del corpo:

$$\Delta E_\mathrm{c} = -\Delta U \quad ; \quad E_{\mathrm{c_f}} - E_{\mathrm{c_i}} = U_\mathrm{i} - U_\mathrm{f} \tag{8.55}$$

con

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{e} \quad U = mgh \tag{8.56}$$

Sostituendo abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(v_\mathrm{f}^2 - v_\mathrm{i}^2) &= mg(h_\mathrm{i} - h_\mathrm{f}) \\ \frac{1}{2}m(-v_\mathrm{i}^2) &= mg(-h_\mathrm{f}) \\ \frac{1}{2}v_\mathrm{i}^2 &= gh_\mathrm{f} \\ v_\mathrm{i} = \sqrt{2gh_\mathrm{f}} &= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 6{,}44\,\mathrm{m}} = 11{,}2\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{8.57}$$

diretta lungo l'asse y verso l'alto.

Osserviamo che con questo metodo possiamo trascurare la traiettoria effettiva del corpo durante il moto, ma la velocità trovata è relativa alla sola componente verticale. Niente possiamo dire su quella orizzontale se non che si conserva, perché in orizzontale non agisce alcuna forza. Peraltro il testo dice esplicitamente che il corpo è lanciato verticalmente, per cui la velocità orizzontale iniziale é nulla.

8.7 Conservazione dell'energia e attrito

Esercizio 68 *Un oggetto di massa* $m = 3{,}0\,\mathrm{kg}$ *inizia a scivolare dalla cima di un piano inclinato di altezza* $h = 2{,}2\,\mathrm{m}$. *Il piano ha un'inclinazione* $\alpha = 35°$. *L'oggetto è sottoposto ad una forza d'attrito il cui coefficiente è* $\mu_\mathrm{d} = 0{,}2$.

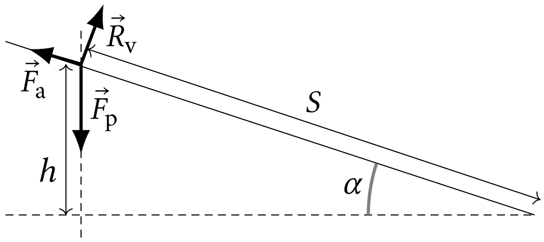
1. *Trova l'energia meccanica all'inizio del processo.*
2. *Trova il lavoro compiuto dalla forza d'attrito.*
3. *Trova l'energia meccanica del corpo alla fine del processo.*
   L'energia complessiva di tutto il sistema si conserva?
4. *Trova la velocità dell'oggetto quando arriva alla fine del piano.*
5. *Trova il lavoro fatto da tutte le forze che agiscono sul corpo, in totale e singolarmente.*

In questo esercizio *non possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica,* perché sul corpo agisce anche la forza d'attrito che compie lavoro. *Vale comunque la conservazione dell'energia*.

1. All'inizio della discesa l'energia è l'energia meccanica del corpo in cima al piano inclinato, dove è ancora fermo e quindi senza energia cinetica.

$$E_{\mathrm{m_i}} = mgh_\mathrm{i} = 3{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}2\,\mathrm{m} = 64{,}7\,\mathrm{J} \tag{8.58}$$

2. La forza d'attrito è legata alla forza con cui il corpo è schiacciato sul piano ovvero, in questo caso, dalla componente della forza peso perpendicolare al piano. Riportiamo in una figura tutte le forze in gioco e quant'altro necessario.



$$F_\mathrm{a} = \mu_\mathrm{d}\, mg\cos(35°) = 0{,}2 \cdot 3{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}819 = 4{,}82\,\mathrm{N} \tag{8.59}$$

La lunghezza dello spostamento S è quella del piano inclinato. La ricaviamo ricordando che in un triangolo rettangolo un cateto (l'altezza) è uguale all'ipotenusa (la lunghezza del piano inclinato) per il seno dell'angolo opposto al primo (l'inclinazione del piano).

$$h_\mathrm{i} = S\sin(35°) \quad ; \quad S = \frac{h_\mathrm{i}}{\sin(35°)} = 3{,}84\,\mathrm{m} \tag{8.60}$$

La forza si oppone allo spostamento e l'angolo tra forza e spostamento è 180°.

$$L_{F_\mathrm{a}} = F_\mathrm{a} S\cos(180°) = 4{,}82\,\mathrm{N} \cdot 3{,}84\,\mathrm{m} \cdot (-1) = -18{,}5\,\mathrm{J} \tag{8.61}$$

3. Quando il corpo arriva alla fine del piano *l'energia meccanica iniziale è diminuita* a causa del lavoro compiuto dalla forza d'attrito, ma *l'energia totale si conserva*.

$$E_{\mathrm{m_i}} = E_{\mathrm{m_f}} + E_{F_\mathrm{a}} \tag{8.62}$$

Inoltre l'energia persa per l'attrito è in modulo uguale al lavoro compiuto dalla forza d'attrito. Per cui, dalla precedente relazione possiamo scrivere:

$$E_{\mathrm{m_f}} = E_{\mathrm{m_i}} - E_{F_\mathrm{a}} = E_{\mathrm{m_i}} - |L_{F_\mathrm{a}}| = 64{,}7\,\mathrm{J} - 18{,}5\,\mathrm{J} = 46{,}2\,\mathrm{J} \tag{8.63}$$

4. L'energia meccanica finale è costituita dalla sola energia cinetica dato che l'altezza finale è 0 m e non c'è più energia potenziale gravitazionale.

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{m_f}} &= \frac{1}{2} m (v_\mathrm{f})^2 \\ (v_\mathrm{f})^2 &= \frac{E_{\mathrm{m_f}}}{\frac{1}{2} m} \\ v_\mathrm{f} &= \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{m_f}}}{m}} = 5{,}55\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{8.64}$$

5. Per trovare il lavoro fatto da tutte le forze che agiscono sul corpo possiamo applicare il teorema dell'energia cinetica.

$$L_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{f}^2 - \frac{1}{2} m v_\mathrm{i}^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}0\,\mathrm{kg}[(5{,}55\,\mathrm{m/s})^2 - (0\,\mathrm{m/s})^2] = 46{,}2\,\mathrm{J} \tag{8.65}$$

Le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso, la forza d'attrito e la reazione vincolare del piano. Il lavoro della forza d'attrito l'abbiamo già trovato.

$$L_{\mathrm{F_a}} = -18{,}5\,\mathrm{J} \tag{8.66}$$

Il lavoro della forza peso è legato alla variazione di energia potenziale.

$$L_\mathrm{p} = U_\mathrm{i} - U_\mathrm{f} = mgh_\mathrm{i} - mgh_\mathrm{f} = 3{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}2\,\mathrm{m} = 64{,}7\,\mathrm{J} \tag{8.67}$$

Il lavoro della reazione vincolare del piano è sempre nullo perché la reazione è sempre perpendicolare al piano e quindi allo spostamento.

Osservazioni

In diversi passaggi dell'esercizio ho indicato più cifre significative di quanto fosse corretto per meglio evidenziare alcuni risultati comuni tra i vari passaggi. In particolare nell'ultima domanda abbiamo:

$$L_{\mathrm{tot}} = L_\mathrm{p} + L_{F_\mathrm{a}} \tag{8.68}$$

La cui somma è proprio il valore prima trovato.

Inoltre il lavoro della forza d'attrito, come spesso succede, è risultato negativo, ma questo risultato non è sempre vero: ci può essere anche un lavoro positivo ed un incremento dell'energia meccanica.

8.8 Conservazione dell'energia e molla elastica

Esercizio 69 *Una molla ideale di costante elastica* $5{,}2 \times 10^4\,\mathrm{N/m}$ *è posta in orizzontale su un piano senza attrito. Un corpo di massa* $m = 3{,}0\,\mathrm{kg}$ *gli va incontro sul piano con una velocità* $v = 12\,\mathrm{m/s}$

1. *Di quanto si comprime la molla quando riesce a fermare il corpo?*
2. *A che velocità arriverà il corpo quando la molla si sarà ridilatata?*
3. *Quanto vale il lavoro compiuto dalla molla da quando viene colpita dal corpo a quando lo respinge separandosi da esso?*
4. *Di quanto si comprimerebbe la molla se anch'essa avesse una massa* $m_{\mathrm{m}} = 0{,}35\,\mathrm{kg}$*?*
5. *A che velocità arriverebbe il corpo una volta respinto con questa nuova condizione?*
6. *Cosa farà questa molla dopo il distacco dal corpo?*

Per quanto descritto dal testo sui corpi del problema agiscono solo forze conservative e quindi possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica.

1. Prima dell'impatto con la molla l'energia meccanica del sistema è solo quella cinetica del corpo lanciato verso la molla.

$$E_{\mathrm{m_i}} = E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}0\,\mathrm{kg} \cdot (12\,\mathrm{m/s})^2 = 216\,\mathrm{J} \tag{8.69}$$

   Dopo l'impatto con la molla l'energia cinetica del corpo diventa tutta energia potenziale elastica.

$$E_{\mathrm{m_f}} = E_{\mathrm{m_i}} = U = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \tag{8.70}$$

   dove Δx è la compressione della molla. Mettiamo in evidenza questo termine e scriviamo:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{m_i}}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 216\,\mathrm{J}}{5{,}2 \times 10^4\,\mathrm{N/m}}} = 0{,}14\,\mathrm{m} \tag{8.71}$$

2. Dopo il rilascio della molla l'energia è diventata nuovamente tutta energia cinetica del corpo, ma con la velocità di segno opposto al precedente. Per cui:

$$v_{\mathrm{f}} = -12\,\mathrm{m/s} \tag{8.72}$$

3. Il lavoro compiuto dalla molla vale:

$$L_{\mathrm{m}} = U_i - U_f = \frac{1}{2}k(\Delta x_{\mathrm{i}})^2 - \frac{1}{2}k(\Delta x_{\mathrm{f}})^2 = 0\,\mathrm{J} \tag{8.73}$$

   Questo lavoro vale zero perché la molla era non compressa, sia prima di intercettare il corpo, sia dopo averlo respinto. D'altra parte, nella fase di compressione la forza elastica compie un lavoro negativo, dato che la forza si oppone allo spostamento, mentre nella fase di espansione il lavoro è lo stesso ma positivo, dato che la forza è concorde con lo spostamento.

4. Anche se la molla avesse una massa, nella fase di massima compressione, con la molla ferma, l'energia del sistema sarebbe tutta energia potenziale elastica e la compressione della molla la stessa di prima.

$$\Delta x_2 = \Delta x \tag{8.74}$$

5. Se attribuiamo una massa anche alla molla allora nella fase di rilascio molla e corpo procedono con la stessa velocità, fino a che la molla non ritorna nella sua posizione di equilibrio, senza più energia potenziale, ma ora con energia cinetica. Applichiamo quindi ancora la conservazione dell'energia meccanica.

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{m_i}} &= E_{\mathrm{m_f}} \\ E_{\mathrm{m_f}} &= \frac{1}{2}m(v_\mathrm{f})^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{m}(v_\mathrm{f})^2 = \frac{1}{2}(m+m_\mathrm{m})(v_\mathrm{f})^2 \\ (v_\mathrm{f})^2 &= \frac{E_{\mathrm{m_i}}}{\frac{1}{2}(m+m_\mathrm{m})} \\ v_\mathrm{f} &= \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{m_i}}}{m+m_\mathrm{m}}} = 11{,}4\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{8.75}$$

La velocità del corpo è leggermente inferiore perché una parte dell'energia è passata alla molla.

6. La molla con massa ha acquistato definitivamente una parte dell'energia iniziale del corpo e continuerà ad oscillare, trasformando energia cinetica in potenziale e viceversa.

9 Fluidodinamica

9.1 Portata ed equazione di continuità

Esercizio 70 *Un tubo rotondo, dal diametro interno di* 15 mm*, è attraversato e riempito completamente da una corrente d'acqua con una velocità di* 3 m/s*. Trova:*

1. *la portata del tubo;*
2. *la velocità dell'acqua in una sezione del tubo dove il diametro si restringe a* 12 mm*.*

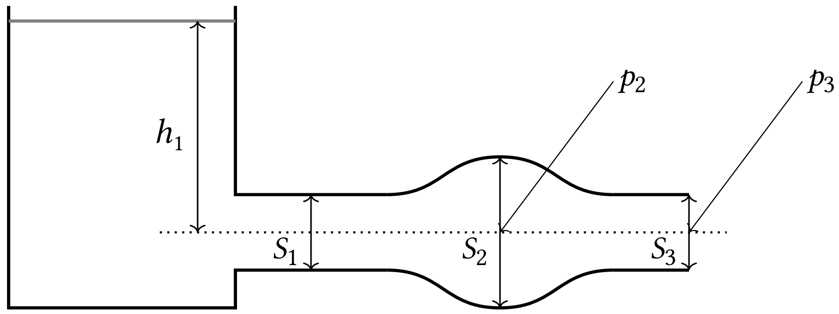
1. La portata q può essere definita come il prodotto della sezione trasversale del tubo per la velocità del fluido:
$$q = Sv \tag{9.1}$$
Il tubo è rotondo quindi la sezione ha forma circolare.
$$S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{15\,\text{mm}}{2}\right)^2 = \pi(0{,}0075\,\text{m})^2 = 0{,}0000177\,\text{m}^2 \tag{9.2}$$
$$q = 0{,}0000177\,\text{m}^2 \cdot 3\,\text{m/s} = 0{,}00053\,\text{m}^3/\text{s} \tag{9.3}$$

2. Per trovare la velocità dell'acqua della sezione ristretta applichiamo all'acqua l'equazione di continuità in quella sezione e in quella iniziale (possiamo applicare l'equazione di continuità in quanto l'acqua è essenzialmente incomprimibile, il tubo è privo di perdite o sorgenti e stiamo supponendo che la velocità del liquido sia la stessa in tutti i punti della sezione).
$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \tag{9.4}$$
$$S_2 = \pi\left(\frac{12\,\text{mm}}{2}\right)^2 = \pi(0{,}006\,\text{m})^2 = 0{,}0000113\,\text{m}^2 \tag{9.5}$$
$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} = \frac{0{,}00053\,\text{m}^3/\text{s}}{0{,}0000113\,\text{m}^2} = 4{,}69\,\text{m/s} \tag{9.6}$$

9.2 Legge di Bernoulli

Esercizio 71 *Una vasca piena d'acqua, come rappresentato (non in scala) nella figura seguente, è dotata alla sua base di un grosso tubo di sezione circolare. Il livello dell'acqua h_1 rispetto alla linea che passa per il centro del tubo è di* 12 m*. Il diametro della sezione S_3 finale ed S_1 iniziale del tubo è* 12 cm*; il diametro della sezione centrale S_2 è invece* 15 cm*. Calcola:*

1. *la pressione in condizioni statiche all'imboccatura del tubo;*
2. *la velocità dell'acqua, quando il tubo è aperto, all'imboccatura;*
3. *la velocità dell'acqua, quando il tubo è aperto, nel punto* 2 *della sezione centrale.*



1. La pressione in condizioni statiche è quella idrostatica, quindi la pressione al centro dell'imboccatura del tubo (chiuso) è data dalla legge di Stevino:

$$p = p_0 + \rho g h \tag{9.7}$$

dove p_0 è la pressione atmosferica sulla vasca (al livello del mare vale $1{,}013 \times 10^5$ Pa), ρ è la densità del liquido ($\rho_{H_2O} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$), g è l'accelerazione di gravità ($9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$) e h è la profondità alla quale stiamo considerando la pressione (in questo caso h_1, altezza relativa del pelo libero dell'acqua nella vasca rispetto al centro dell'imboccatura). Quindi:

$$p = 1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa} + 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 12\,\mathrm{m} = 219020\,\mathrm{Pa} \tag{9.8}$$

Questa è la pressione all'interno dell'imboccatura del tubo quando è chiuso (unico modo per garantire le condizioni statiche); all'esterno la pressione è quella atmosferica.

2. Tutto cambia quando il tubo è aperto. In condizione di equilibrio la pressione del liquido all'imboccatura è la stessa dell'aria oltre il tubo. Per trovare la velocità del liquido in un punto possiamo applicare la legge di Bernoulli ad una linea di flusso del liquido passante per quel punto.

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost \tag{9.9}$$

Per applicare quella legge devono valere alcune condizioni:

(a) Il liquido deve essere incomprimibile (perché la densità deve essere uniforme).

(b) Dobbiamo considerare una linea di flusso, quindi il calcolo dev'essere riferito non all'imboccatura nel suo insieme, ma ad un particolare punto sulla stessa (prendiamo il punto P_3 indicato nella figura).

(c) La legge va applicata a due punti della stessa linea di flusso. Oltre al punto P_3 prendiamo un punto sul pelo libero dell'acqua nella vasca (tutta l'acqua fluisce dalla sommità della vasca all'imboccatura del liquido). Non importa sapere quale punto esatto passi per la nostra linea di flusso perché tutti i punti sul pelo libero dell'acqua nella vasca hanno la stessa altezza, pressione e velocità.

(d) Il liquido deve scorrere senza attrito, cioè senza dissipazione di energia.

(e) Il percorso esatto della linea di flusso non ha in generale importanza. A noi interessa solo che passi nei due punti considerati.

Un punto sul pelo libero dell'acqua nella vasca (nelle condizioni iniziali) ha pressione p_0 (la pressione atmosferica), altezza h_0 (possiamo considerarla nulla ponendo quel punto come livello di riferimento e verso verso l'alto) e velocità v_0 (possiamo considerarla trascurabile dal momento che l'ampiezza della vasca è verosimilmente molto maggiore delle dimensioni del tubo e il livello scende molto lentamente). Inoltre sappiamo che $p_0 = p_3$. Applichiamo la legge di Bernoulli:

$$p_0 + \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_3 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 \tag{9.10}$$

$$\frac{1}{2}\rho v_3^2 = -\rho g h_1 \tag{9.11}$$

$$\frac{1}{2}v_3^2 = -g h_1 \tag{9.12}$$

$$v_3 = \sqrt{-2gh_1} = \sqrt{-2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot -12\,\mathrm{m}} = 15{,}3\,\mathrm{m/s} \tag{9.13}$$

Il segno negativo comparso nell'ultima equazione è dovuto all'orientazione data alle posizioni e normalmente non compare nella maggior parte dei testi. In fine si annulla considerando che l'imboccatura del tubo è nella posizione -12 m rispetto a quella dell'acqua nella vasca.

3. Per calcolare la velocità del punto P_2 nella sezione centrale possiamo applicare l'equazione di continuità in quanto tutto il fluido che entra nel tubo deve uscire dall'altra estremità. Operiamo come nell'esercizio precedente.

$$v_2 S_2 = v_3 S_3 \tag{9.14}$$

Se noi conosciamo la velocità del fluido nella sezione di uscita possiamo trovare la velocità nella sezione centrale. Mettiamo in evidenza v_2 nella precedente equazione.
Il tubo è rotondo quindi la sezione ha forma circolare.

$$S_3 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{12\,\mathrm{cm}}{2}\right)^2 = \pi(0{,}06\,\mathrm{m})^2 = 0{,}0113\,\mathrm{m}^2 \tag{9.15}$$

$$S_2 = \pi \left(\frac{15\,\mathrm{cm}}{2}\right)^2 = \pi(0{,}075\,\mathrm{m})^2 = 0{,}0178\,\mathrm{m}^2 \tag{9.16}$$

$$v_2 = \frac{v_3 S_3}{S_2} = \frac{15{,}3\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 0{,}0113\,\mathrm{m}^2}{0{,}0178\,\mathrm{m}^2} = 9{,}71\,\mathrm{m/s} \tag{9.17}$$

In questa rappresentazione c'è tuttavia almeno una forzatura. La velocità del fluido nella sezione non è uniforme. Come abbiamo visto nella precedente domanda la velocità dipende dall'altezza e il tubo reale ha una certa altezza. In generale l'equazione di continuità va applicata ad un tubo di flusso. Un sottile tubo di flusso al centro della condotta procederà in orizzontale fino all'uscita della stessa, dove abbiamo considerato precedentemente la velocità. In pratica la valutazione fatta è comunque sufficientemente rappresentativa di quel che può accadere in un tubo sottile attraversato da un liquido a bassa velocità.

10 Quantità di moto e centro di massa

10.1 Quantità di moto

Esercizio 72 *Un corpo di massa* $m = 5{,}6\,\text{kg}$ *si muove con velocità* $v = 12\,\text{km/h}$.
Determina la quantità di moto del corpo.

La quantità di moto di un corpo è data da $\vec{p} = m\vec{v}$, cioè il prodotto della massa del corpo per la sua velocità.

$$12\,\text{km/h} = \frac{12\,\text{km}}{\text{h}} = \frac{12000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 3{,}33\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \tag{10.1}$$

La quantità di moto in modulo è:

$$p = mv = 5{,}6\,\text{kg} \cdot 3{,}33\,\text{m}\,\text{s}^{-1} = 18{,}7\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \tag{10.2}$$

Esercizio 73 *Un corpo di massa* $m_1 = 5{,}6\,\text{kg}$ *si muove con velocità* $v_1 = 12\,\text{km/h}$ *in una data direzione. Un altro corpo, di massa* $m_2 = 2{,}6\,\text{kg}$ *si muove con velocità* $v_2 = 42\,\text{km/h}$ *in una direzione a* $33°$ *rispetto al primo.*
Determina la quantità di moto totale del sistema formato dai due corpi.

La quantità di moto di un insieme di corpi è data dalla somma vettoriale delle quantità di moto di ognuno di essi.

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{10.3}$$

Per calcolare il modulo della quantità di moto totale dapprima determiniamo le componenti della quantità di moto dei due corpi lungo la direzione della velocità del primo (Si può scegliere una qualsiasi direzione del piano o spazio, ma questa scelta rende i calcoli più semplici). Calcoliamo la somma dei due vettori per componenti. Infine ricaviamo il modulo di questa somma ovvero la quantità di moto totale.

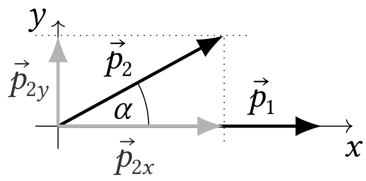
Esprimiamo tutte le grandezze di partenza in unità del SI.

$$\begin{cases} v_1 = 12\,\text{km/h} = 3{,}33\,\text{m/s} \\ v_2 = 42\,\text{km/h} = 11{,}66\,\text{m/s} \end{cases} \tag{10.4}$$

Le due quantità di moto sono:

$$\begin{cases} p_1 = m_1 v_1 = 5{,}6\,\text{kg} \cdot 3{,}33\,\text{m/s} = 18{,}7\,\text{kg}\,\text{m/s} \\ p_2 = m_2 v_2 = 2{,}6\,\text{kg} \cdot 11{,}6\,\text{m/s} = 30{,}2\,\text{kg}\,\text{m/s} \end{cases} \tag{10.5}$$

Ora dobbiamo scegliere due assi ortogonali rispetto a cui scomporre le due quantità di moto. Scegliamo come asse delle ascisse la direzione e il verso individuato dalla velocità del primo corpo. Conseguentemente possiamo rappresentare i due vettori secondo la seguente figura.



Il primo vettore ha componente solo sull'asse x:

$$p_{1x} = 18{,}7\,\mathrm{kg\,m/s} \quad ; \quad p_{1y} = 0\,\mathrm{kg\,m/s} \tag{10.6}$$

Invece per l'altro vettore:

$$\begin{cases} p_{2x} = p_2 \cos(\alpha) = 30{,}2\,\mathrm{kg\,m/s} \cdot \cos(33°) = 25{,}3\,\mathrm{kg\,m/s} \\ p_{2y} = p_2 \sin(\alpha) = 30{,}2\,\mathrm{kg\,m/s} \cdot \sin(33°) = 16{,}4\,\mathrm{kg\,m/s} \end{cases} \tag{10.7}$$

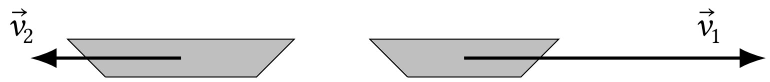
$$\begin{gathered} \vec{p}_{\mathrm{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (p_{1x} + p_{2x}\,;\ p_{1y} + p_{2y}) \\ (18{,}7\,\mathrm{kg\,m/s} + 25{,}3\,\mathrm{kg\,m/s}\,;\ 0\,\mathrm{kg\,m/s} + 16{,}4\,\mathrm{kg\,m/s}) = (44\,\mathrm{kg\,m/s}\,; 16{,}4\,\mathrm{kg\,m/s}) \end{gathered} \tag{10.8}$$

Infine il modulo della quantità di moto totale è:

$$|\vec{p}_{\mathrm{tot}}| = \sqrt{(p_{\mathrm{tot\,x}})^2 + (p_{\mathrm{tot\,y}})^2} = \sqrt{(44\,\mathrm{kg\,m/s})^2 + (16{,}4\,\mathrm{kg\,m/s})^2} = 47{,}0\,\mathrm{kg\,m/s} \tag{10.9}$$

10.2 Conservazione della quantità di moto

Esercizio 74 *Due barche stanno ferme su un lago a breve distanza. Un occupante della barca* 1 *spinge la barca 2. Le barche, libere di muoversi senza attrito, acquistano rispettivamente la velocità* $v_1 = 3{,}1\,\mathrm{km/h}$ *e* $v_2 = -1{,}5\,\mathrm{km/h}$.



1. *Sapendo che la massa della barca* 1 *con i suoi occupanti è* $m_1 = 1400\,\mathrm{kg}$ *quale è la massa della seconda barca?*
2. *Se poi dalla barca* 1 *viene lanciato con velocità* $v_3 = 16\,\mathrm{km/h}$ *(sempre rispetto al lago) un grosso pesce di massa* $m_3 = 15\,\mathrm{kg}$ *nella stessa direzione e verso della velocità della barca* 1*, questa accelera o rallenta? e di quanto varia la sua velocità?*

1. Sulle barche agisce inizialmente la forza peso e la reazione vincolare dell'acqua, in una situazione di equilibrio. Sul sistema delle due barche non agisce complessivamente forza esterna: la forza peso e la reazione dell'acqua sono uguali e contrarie.
   Quando un occupante di una barca spinge l'altra, sul sistema sta agendo una forza interna: anche in questo caso non ci sono forze esterne.
   Quindi prima e dopo la spinta sul sistema non agiscono forze esterne: *la quantità di moto si conserva*.
   La quantità di moto iniziale è nulla perché le due barche sono inizialmente ferme rispetto al sistema di riferimento del lago.

$$\begin{gathered} p_{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{f}} \\ 0\,\mathrm{kg\,m/s} = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{gathered} \tag{10.10}$$

Nell'ultima relazione non conosciamo la massa della seconda barca: la possiamo ricavare mettendo in evidenza m_2.

$$m_2 = \frac{-m_1 v_1}{v_2} = \frac{-1400\,\mathrm{kg}\cdot 3{,}1\,\mathrm{km/h}}{-1{,}5\,\mathrm{km/h}} = 2893\,\mathrm{kg} \tag{10.11}$$

2. Lanciando un oggetto dalla barca possiamo ancora applicare la conservazione della quantità di moto: il sistema a cui applicarlo è costituito dalla barca 1 e il suo pesce.
   Prima del lancio la quantità di moto è il p_1 prima utilizzato, se osserviamo la scena ancora dal sistema di riferimento del lago. Invece, dal punto di vista della barca, prima del lancio sia la barca che il pesce sono fermi e dopo si muovono in verso opposto. Noi studiamo ancora il problema nel primo sistema di riferimento perché i dati che abbiamo sono riferiti ad esso.
   In ogni caso la conservazione della quantità di moto avviene quale che sia il sistema inerziale da cui osserviamo la scena.

$$\begin{aligned} p_\mathrm{i} &= p_\mathrm{f} \\ p_1 = m_1 v_{1\mathrm{i}} &= (m_1 - m_3) v_{1\mathrm{f}} + m_3 v_{3\mathrm{f}} \end{aligned} \tag{10.12}$$

Mettiamo in evidenza

$$v_{1\mathrm{f}} = \frac{m_1 v_\mathrm{i} - m_3 v_3}{(m_1 - m_3)} = \frac{1400\,\mathrm{kg}\cdot 3{,}1\,\mathrm{km/h} - 15\,\mathrm{kg}\cdot 16\,\mathrm{km/h}}{1400\,\mathrm{kg} - 15\,\mathrm{kg}} = 2{,}96\,\mathrm{km/h} \tag{10.13}$$

10.3 Urti in una dimensione

Esercizio 75 *Due corpi puntiformi di massa* $m_1 = 5{,}6\,\mathrm{kg}$ *e* $m_2 = 2{,}7\,\mathrm{kg}$ *si muovono liberamente nello spazio sulla stessa retta. Il sistema formato dai due corpi non è sottoposto ad alcuna forza esterna. Entrambi i corpi si muovono nello stesso verso: il primo con una velocità* $v_1 = 620\,\mathrm{km/h}$ *e il secondo con una velocità* $v_2 = 120\,\mathrm{km/h}$*. Ad un certo punto i due corpi si urtano rimanendo attaccati.*

Trova la velocità finale del sistema in modulo, direzione e verso.

Se il sistema non è sottoposto a forze esterne la sua quantità di moto totale rimane invariata prima e dopo l'urto.

La quantità di moto totale prima dell'urto è data dalla somma dei moduli delle quantità di moto iniziali, perché i due corpi si muovono sulla stessa retta.

La quantità di moto totale dopo l'urto è quella di un unico corpo puntiforme, che si muove ancora sulla stessa retta. Dal momento che la quantità di moto iniziale ha componenti solo su una retta, continuerà ad avere componenti solo su quella retta anche dopo l'urto.

Per cui possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} p_\mathrm{i} &= p_\mathrm{f} \\ p_1 + p_2 &= p_\mathrm{f} \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= (m_1 + m_2) v_\mathrm{f} \end{aligned} \tag{10.14}$$

L'unica incognita di questa equazione è la velocità finale e possiamo metterla in evidenza:

$$v_\mathrm{f} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} \tag{10.15}$$

Trasformiamo nel S.I. le velocità date e sostituiamo tutti i dati nella precedente espressione.

$$\begin{cases} v_1 = 620\,\mathrm{km/h} = 172{,}2\,\mathrm{m/s} \\ v_2 = 120\,\mathrm{km/h} = 33{,}3\,\mathrm{m/s} \end{cases} \tag{10.16}$$

Le due velocità hanno lo stesso verso per cui le utilizziamo attribuendo ad esse lo stesso segno (positivo per nostra arbitraria scelta).

$$v_\mathrm{f} = \frac{5{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 172{,}2\,\mathrm{m/s} + 2{,}7\,\mathrm{kg} \cdot 33{,}3\,\mathrm{m/s}}{(5{,}6\,\mathrm{kg} + 2{,}7\,\mathrm{kg})} = 127\,\mathrm{m/s} \tag{10.17}$$

Il segno positivo di questo calcolo ci dice che la velocità ha lo stesso verso di quelle iniziali; la direzione abbiamo già detto essere quella dei due corpi incidenti.

Esercizio 76 *Due corpi puntiformi di massa* $m_1 = 12\,\mathrm{kg}$ *e* $m_2 = 42\,\mathrm{kg}$ *si muovono liberamente nello spazio sulla stessa retta. Il sistema formato dai due corpi non è sottoposto ad alcuna forza esterna.*
Il primo corpo si muove con una velocità $v_1 = 1230\,\mathrm{km/h}$ *e il secondo con una velocità* $v_2 = 320\,\mathrm{km/h}$*, ma in verso opposto. Ad un certo punto i due corpi si urtano in maniera perfettamente elastica.*
Trova la velocità finale dei due corpi in modulo, direzione e verso.

Se il sistema non è sottoposto a forze esterne la sua quantità di moto totale rimane invariata prima e dopo l'urto. Il moto avviene su una retta quindi avremo componenti solo su quella retta.

Il fatto che l'urto sia perfettamente elastico implica che l'energia cinetica totale del sistema si conservi nell'urto. Possiamo scrivere quindi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases} \tag{10.18}$$

Il precedente sistema è in due equazioni e in due incognite (le velocità finali), ma un'equazione è quadratica, per cui avremo due soluzioni. Una è quella banale in cui le velocità finale ed iniziale sono uguali e quindi non si è avuto urto. L'altra soluzione che si trova (per la dimostrazione rimandiamo a un comune libro di testo) è:

$$\begin{cases} v_{1f} = \dfrac{(m_1 - m_2) v_{1i} + 2 m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} = \dfrac{(m_2 - m_1) v_{2i} + 2 m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \end{cases} \tag{10.19}$$

Trasformiamo nel S.I. le velocità date e sostituiamo tutti i dati nella precedente espressione.

$$\begin{cases} v_1 = 1230\,\mathrm{km/h} = 341{,}7\,\mathrm{m/s} \\ v_2 = -320\,\mathrm{km/h} = -88{,}9\,\mathrm{m/s} \end{cases} \tag{10.20}$$

Abbiamo scelto arbitrariamente di attribuire il segno positivo alla velocità iniziale del primo corpo; di conseguenza l'altro, muovendosi in verso opposto, ha velocità iniziale di segno negativo.

$$\begin{cases} v_{1f} = \dfrac{(12\,\mathrm{kg} - 42\,\mathrm{kg}) \cdot 341{,}7\,\mathrm{m/s} + 2 \cdot 42\,\mathrm{kg} \cdot (-88{,}9\,\mathrm{m/s})}{12\,\mathrm{kg} + 42\,\mathrm{kg}} = -328\,\mathrm{m/s} \\ v_{2f} = \dfrac{(42\,\mathrm{kg} - 12\,\mathrm{kg}) \cdot (-88{,}9\,\mathrm{m/s}) + 2 \cdot 12\,\mathrm{kg} \cdot 341{,}7\,\mathrm{m/s}}{12\,\mathrm{kg} + 42\,\mathrm{kg}} = 103\,\mathrm{m/s} \end{cases} \tag{10.21}$$

I due corpi, dopo l'urto, si muovono ancora sulla stessa retta. La direzione della velocità è ancora quella di partenza. Dai segni prima ottenuti possiamo dire che entrambe i corpi hanno ora velocità di verso opposto a quella di partenza.

10.4 Non sempre si conserva

Esercizio 77 *Un mattone di massa* $m = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ *è appeso ad un filo sottile, flessibile e di massa trascurabile. Lanciamo dal basso verso l'alto una pallina appiccicosa sul mattone. La pallina, di massa* $m_\mathrm{p} = 0{,}035\,\mathrm{kg}$*, dopo che colpisce il mattone vi rimane attaccata; la sua velocità al momento dell'urto è* $v = 120\,\mathrm{m/s}$.

Trova a che altezza arriva il mattone dopo l'urto.

Per risolvere il problema può sembrare opportuno usare il principio di conservazione della quantità di moto, ma in questo caso la pallina è soggetta ad una forza esterna non equilibrata: la forza peso. Quindi *non vale la conservazione della quantità di moto*. Può sembrare anche utile applicare la conservazione dell'energia meccanica, ma l'urto è anelastico e quindi l'energia cinetica non si conserva e *non si conserva neanche l'energia meccanica*.

La strategia risolutiva è dividere il processo in due parti.

La *prima parte* riguarda l'istante dell'urto. Se l'urto dura un'instante la forza peso non altera la quantità di moto del sistema e possiamo calcolare la velocità dei due corpi uniti un'istante dopo l'urto.

La *seconda parte* avviene dopo l'urto: in questo intervallo di tempo vale la conservazione dell'energia meccanica dato che l'urto è già avvenuto.

L'urto è anelastico per cui, applicando la conservazione della quantità di moto possiamo scrivere:

$$p_\mathrm{i} = p_\mathrm{f} \tag{10.22}$$

$$m_\mathrm{p} v = (m + m_\mathrm{p}) v_\mathrm{f} \tag{10.23}$$

Ricaviamo la velocità del sistema dopo l'urto :

$$v_\mathrm{f} = \frac{m_\mathrm{p} v}{m + m_\mathrm{p}} = \frac{0{,}035\,\mathrm{kg} \cdot 120\,\mathrm{m/s}}{5{,}0\,\mathrm{kg} + 0{,}035\,\mathrm{kg}} = 0{,}83\,\mathrm{m/s} \tag{10.24}$$

Applichiamo ora la conservazione dell'energia meccanica ponendo l'altezza iniziale del sistema immediatamente dopo l'urto uguale a zero. All'inizio c'è soltanto energia cinetica, alla fine il sistema si ferma e c'è solo energia potenziale gravitazionale.

$$\begin{aligned} E_\mathrm{m\,i} &= E_\mathrm{m\,f} \\ E_\mathrm{c} &= E_\mathrm{p} \\ \frac{1}{2} m_\mathrm{tot} v_\mathrm{f}^2 &= m_\mathrm{tot}\, g\, h_\mathrm{max} \\ h_\mathrm{max} &= \frac{1}{2}\frac{v_\mathrm{f}^2}{g} = 0{,}035\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{10.25}$$

10.5 Impulso

Esercizio 78 *Una palla di massa* $m = 520\,\text{g}$ *colpisce il pavimento con una velocità* $v_1 = 70\,\text{km/h}$ *secondo un angolo* $\alpha = 30°$ *rispetto al pavimento stesso.*

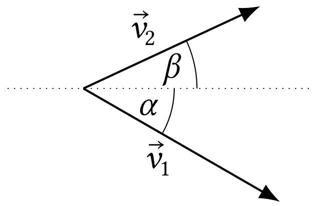
La palla rimbalza con una velocità $v_2 = 60\,\text{km/h}$ *secondo un angolo* $\beta = 25°$.

Trova la forza media esercita dal pavimento durante l'urto se dura tre centesimi di secondo.

La forza media che il pavimento esercita sulla palla durante l'urto è legata all'impulso della forza ovvero alla variazione di quantità di moto.

$$\vec{I} = \vec{F}_\text{m}\Delta t = \Delta\vec{p} \tag{10.26}$$

L'urto avviene in due dimensioni: per trovare il modulo della forza media dobbiamo trovare la variazione della quantità di moto trattandola vettorialmente. Facciamo un disegno in cui rappresentiamo la velocità (e quindi la quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$) un istante prima dell'urto e un istante dopo.



Dal disegno possiamo determinare le componenti della quantità di moto.

Convertiamo le velocità in metri al secondo.

$$v_1 = 70\,\text{km/h} = 19{,}4\,\text{m/s} \quad ; \quad v_2 = 60\,\text{km/h} = 16{,}7\,\text{m/s} \tag{10.27}$$

$$\begin{cases} p_{1x} = m \cdot v_{1x} = m \cdot v \cdot \cos\alpha = 0{,}520\,\text{kg} \cdot 19{,}4\,\text{m/s} \cdot \cos(30°) = 8{,}75\,\text{kg m/s} \\ p_{1y} = m \cdot v_{1y} = m \cdot v \cdot \sin\alpha = 0{,}520\,\text{kg} \cdot 19{,}4\,\text{m/s} \cdot \sin(30°) = -5{,}05\,\text{kg m/s} \end{cases} \tag{10.28}$$

$$\begin{cases} p_{2x} = m \cdot v_{2x} = m \cdot v \cdot \cos\beta = 0{,}520\,\text{kg} \cdot 16{,}7\,\text{m/s} \cdot \cos(25°) = 7{,}87\,\text{kg m/s} \\ p_{2y} = m \cdot v_{2y} = m \cdot v \cdot \sin\beta = 0{,}520\,\text{kg} \cdot 16{,}7\,\text{m/s} \cdot \sin(25°) = 3{,}67\,\text{kg m/s} \end{cases} \tag{10.29}$$

La variazione di quantità di moto è:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p} &= \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \\ &(p_{2x} - p_{1x}, p_{2y} - p_{1y}) = (7{,}87\,\text{kg m/s} - 8{,}75\,\text{kg m/s}; 3{,}67\,\text{kg m/s} - (-5{,}05\,\text{kg m/s})) = \\ &(-0{,}88\,\text{kg m/s}; 8{,}72\,\text{kg m/s}) \end{aligned} \tag{10.30}$$

Infine:

$$|\Delta\vec{p}| = \sqrt{(-0{,}88\,\text{kg m/s})^2 + (8{,}72\,\text{kg m/s})^2} = 8{,}76\,\text{kg m/s} \tag{10.31}$$

$$F_\text{m} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{8{,}76\,\text{kg m/s}}{0{,}03\,\text{s}} = 292\,\text{N} \tag{10.32}$$

10.6 Centro di massa

Esercizio 79 *Due corpi puntiformi di massa* $m_1 = 5{,}6\,\mathrm{kg}$ *e* $m_2 = 2{,}7\,\mathrm{kg}$ *sono posti alle estremità di un'asta rigida di massa trascurabile lunga* $0{,}45\,\mathrm{m}$.

Trova la posizione del centro di massa del sistema dato.

Il sistema presentato ha una sola dimensione. Il centro di massa si trova necessariamente sull'asse individuato dall'asta. La definizione del centro di massa per due masse puntiformi è:

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} \tag{10.33}$$

Gli unici valori che non conosciamo sono x_1 e x_2, cioè le posizioni assolute delle due masse. Tuttavia, in questo caso, ciò che importa è solo la posizione relativa. Scegliamo ad esempio di porre la prima massa nella posizione $x_1 = 0\,\mathrm{m}$ e la seconda nella posizione $x_2 = 0{,}45\,\mathrm{m}$, all'altra estremità dell'asta. Sostituendo tutti i dati abbiamo che:

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{0\,\mathrm{m} \cdot 5{,}6\,\mathrm{kg} + 0{,}45\,\mathrm{m} \cdot 2{,}7\,\mathrm{kg}}{5{,}6\,\mathrm{kg} + 2{,}7\,\mathrm{kg}} = 0{,}15\,\mathrm{m} \tag{10.34}$$

Il centro di massa si trova a $0{,}15\,\mathrm{m}$ dalla posizione della prima massa, lungo l'asta.

Esercizio 80 *Un cannone inizialmente fermo, è poggiato su un binario senza attrito. Il cannone spara con un angolo di* $30°$ *un proiettile da* $10\,\mathrm{kg}$ *con una velocità di* $800\,\mathrm{m/s}$*; il cannone rincula con una velocità di* $1{,}2\,\mathrm{m/s}$.

1. *Trova la massa del cannone.*
2. *Trova la velocità del centro di massa del sistema formato da cannone e proiettile prima e subito dopo il lancio.*
3. *In riferimento alla sola componente orizzontale della velocità verifica se l'energia cinetica del sistema si è conservata e trova una motivazione al risultato ottenuto.*

1. Il cannone e il proiettile, prima dello sparo, sono in quiete su un piano senza attrito. Su entrambi agisce la forza di gravità e la reazione vincolare del piano. Le due forze sono uguali e contrarie: la loro somma è nulla. Sul sistema, complessivamente, non agiscono forze esterne.
   Dopo lo sparo il cannone continua a stare sul piano di appoggio, ma il proiettile si muoverà di moto parabolico, soggetto alla sola di forza di gravità. Sul proiettile agisce una forza esterna diversa da zero non più equilibrata e quindi la quantità di moto non si conserva.
   Tuttavia, se consideriamo il moto solamente per quanto riguarda le forze che agiscono parallelamente al piano, non abbiamo forze esterne che agiscono sul sistema: possiamo applicare il principio di conservazione della quantità di moto.
   La quantità di moto iniziale è nulla perché i due corpi sono inizialmente in quiete.

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{i}} &= p_{\mathrm{f}} \\ 0\,\mathrm{kg\,m/s} &= p_{\mathrm{c}} + p_{\mathrm{px}} = m_{\mathrm{c}} v_{\mathrm{c}} + m_p v_{\mathrm{px}} \end{aligned} \tag{10.35}$$

   Abbiamo preso la sola componente orizzontale della quantità di moto del proiettile e quindi la componente orizzontale della velocità al momento dello sparo. Nell'ultima relazione non conosciamo la massa del cannone: la possiamo ricavare mettendo in evidenza m_c.

$$m_c = \frac{-m_p v_{px}}{v_c} = \frac{-m_p v_p \cos(30°)}{v_c} = \frac{-10\,\mathrm{kg}\cdot 800\,\mathrm{m/s}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1{,}2\,\mathrm{m/s}} = 5773\,\mathrm{kg} \qquad (10.36)$$

Abbiamo dato un segno negativo alla velocità di rinculo del cannone perché deve avere verso contrario a quella del proiettile.

2. La velocità del centro di massa, così come la sua posizione, vanno calcolate preferibilmente per componenti: sono grandezze vettoriali. Nel nostro caso possiamo calcolare la velocità lungo il piano e perpendicolarmente ad esso. In orizzontale avremo le componenti della velocità trovate al punto precedente; in verticale compare solo la velocità verticale del proiettile. Consideriamo cannone e proiettile come corpi puntiformi.
   All'inizio sia il cannone che il proiettile sono fermi.

$$\begin{aligned} v_{x_{cm}}(\text{in.}) &= 0\,\mathrm{m/s} \\ v_{y_{cm}}(\text{in.}) &= 0\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \qquad (10.37)$$

$$v_{x_{cm}}(\text{fin.}) = \frac{v_c m_c + v_{x_p} m_p}{m_c + m_p} = \frac{-1{,}2\,\mathrm{m/s}\cdot 5773\,\mathrm{kg} + 800\,\mathrm{m/s}\cdot\cos(30°)\cdot 10\,\mathrm{kg}}{5773\,\mathrm{kg} + 10\,\mathrm{kg}} \cong 0\,\mathrm{m/s} \qquad (10.38)$$

   Questo è quello che ci aspettiamo dalla conservazione della quantità di moto: la velocità del centro di massa deve rimanere constante. Il valore ottenuto non è esattamente zero perché il valore utilizzato per la massa del cannone non è anch'esso esatto.

$$v_{y_{cm}}(\text{fin.}) = \frac{v_{y_p} m_p}{m_c + m_p} = \frac{800\,\mathrm{m/s}\cdot\sin 30°\cdot 10\,\mathrm{kg}}{5773\,\mathrm{kg} + 10\,\mathrm{kg}} = 0{,}69\,\mathrm{m/s} \qquad (10.39)$$

   La variazione di velocità rende evidente la non conservazione della quantità di moto per la componente verticale.

3. L'energia cinetica iniziale è nulla: i due corpi sono entrambi fermi.
   Dopo lo sparo l'energia cinetica è la somma dell'energia cinetica del cannone e del proiettile.

$$E_{ci} = 0\,\mathrm{J} \qquad (10.40)$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2} m_c {v_c}^2 + \frac{1}{2} m_p {v_{px}}^2 = \frac{1}{2} 5773\,\mathrm{kg}(-1{,}2\,\mathrm{m/s})^2 + \frac{1}{2} 10\,\mathrm{kg}\left(800\,\mathrm{m/s}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2{,}40\times 10^6\,\mathrm{J} \qquad (10.41)$$

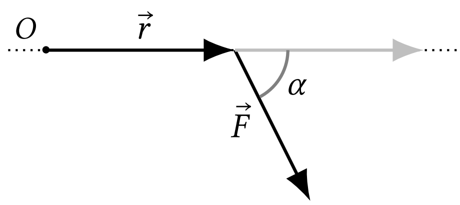
   L'energia cinetica è variata: è una conseguenza della conservazione dell'energia. L'energia potenziale dell'esplosivo che ha spinto il proiettile si è trasformata in energia cinetica.

11 Statica dei corpi rigidi

11.1 Momento di una forza

Esercizio 81 *Una forza* $\vec{F}$ *il cui modulo vale* 23 N *forma un angolo di* 30° *con la direzione del vettore posizione* $\vec{r}$*. I due vettori giacciono nel piano del foglio e il vettore posizione è lungo* 30 cm*.*

1. *Trova in modulo il vettore momento della forza data rispetto al punto O.*
2. *Trova direzione e verso del momento della forza.*



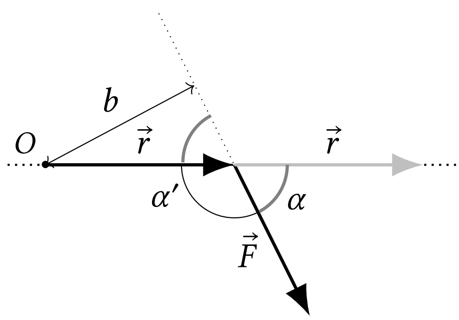
1. Il *momento di una forza* rispetto ad un punto è dato in modulo da:

$$M = |r||F| \sin\alpha \tag{11.1}$$

dove $|r|$ è il modulo del vettore posizione della forza rispetto al punto rispetto al quale è calcolato il momento; α è il più piccolo degli angoli formati dal vettore posizione e la forza; il punto O è detto *polo del momento*.
In questo caso abbiamo:

$$M = 0{,}3\ \mathrm{m} \cdot 23\ \mathrm{N} \cdot \sin(30°) = 3{,}45\ \mathrm{Nm} \tag{11.2}$$

Per quanto riguarda l'angolo in realtà potremo prendere anche l'angolo α' tra i due vettori: esso è il supplementare dell'angolo α e quindi ha comunque lo stesso seno ($\sin\alpha' = \sin(\pi - \alpha)$).



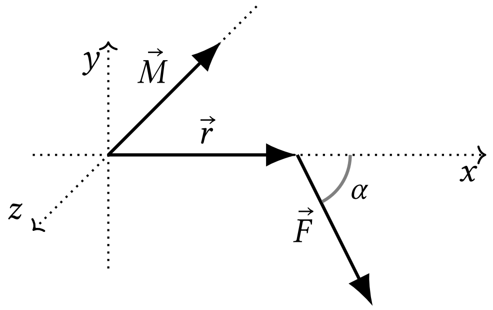
Inoltre, se prolunghiamo la retta su cui sta il vettore forza (detta *retta d'azione* della forza), chiamiamo *braccio del momento* la distanza b del polo dalla retta d'azione della forza. Il braccio

b è sempre uguale a $|\vec{r}| \sin\alpha$: di conseguenza il punto di applicazione della forza sulla sua retta d'azione non influisce sul momento della forza poiché il braccio corrispondente è sempre lo stesso. Il momento è sempre $M = bF$.

2. Il vettore momento della forza è il prodotto vettoriale del vettore posizione per il vettore forza.

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{11.3}$$

Per trovare direzione e verso del vettore momento possiamo usare la regola della mano destra. Prendiamo in ordine alfabeto le prime tre dita della mano destra: indice, medio e pollice. Possiamo associarle rispettivamente al vettore posizione, alla forza e al momento.
Nel nostro caso il vettore momento della forza è perpendicolare al piano del foglio e entrante in esso.



Osservazioni.
Il prodotto vettoriale non è commutativo e quindi se scambiamo l'ordine dei fattori il prodotto cambia (di verso o segno).
Dopo aver allineato l'indice al vettore posizione il medio può trovarsi con un angolo qualsiasi rispetto all'indice. Nella figura di prima per fare gli allineamenti siamo costretti a ruotare la mano col pollice verso il piano del foglio, da cui il verso dato al momento.

11.2 Momento di più forze

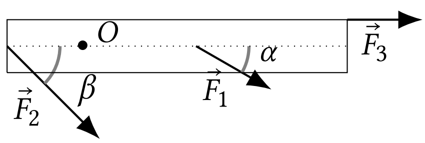
Esercizio 82 *Tre forze, come indicato in figura, agiscono su un'asta lunga* 9 cm *e alta* 1,4 cm*, incernierata sul cardine O. Il cardine si trova sull'asse dell'asta a* 2 cm *dal bordo sinistro.*

$F_1 = 23\,\mathrm{N}$; $\alpha = 30°$ $F_2 = 35\,\mathrm{N}$; $\beta = 45°$ $F_3 = 20\,\mathrm{N}$ *, parallelo all'asta, sul suo bordo.*

La distanza del punto di applicazione della forza $\vec{F}_1$ dal cardine é $r_1 = 3$ cm.

Tutti i vettori giacciono nel piano del foglio.

Determina, in modulo direzione e verso, il momento della forza totale rispetto al cardine dell'asta.



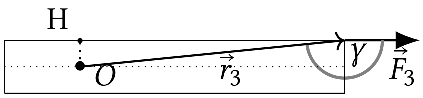
Il momento di una forza è una grandezza vettoriale, quindi la somma di più momenti è semplicemente una somma di vettori. In pratica la maggior parte dei problemi che si incontrano sui libri di testo fa rifermento a situazioni come quella di questo esercizio in cui tutti i vettori che determinano i momenti giacciono sullo stesso piano. Questo comporta che i vettori momento siano soltanto perpendicolari al piano: o uscenti da questo o entranti.

Consideriamo il momento associato alla forza $\vec{F}_1$.
L'angolo α è il più piccolo degli angoli tra i vettori $\vec{F}_1$ e $\vec{r}_1$, che è quello indicato in figura.
La direzione e verso del momento si può trovare con questi due modi:

- La forza tende a ruotare l'oggetto in senso orario: il momento della forza é perpendicolare al foglio e entrante in esso rispetto a noi. La componente del momento la prendiamo con il segno negativo. Se tende invece a ruotare l'oggetto in senso antiorario la prendiamo col segno positivo. Quindi il momento della forza $\vec{F}_1$ ha componente negativa.
- Con la regola della mano destra allineiamo l'indice al vettore posizione e il medio alla forza: allora il pollice, perpendicolare al piano delle altre due dita, avrà direzione e verso del momento. In questo caso risulta un momento perpendicolare al foglio e entrante in esso rispetto a noi. Per il segno della componente del momento l'indicazione è la stessa di prima.

Per la forza $\vec{F}_2$ procediamo allo stesso modo. Il momento della forza é perpendicolare al foglio e uscente da esso verso di noi. La componente del momento è positiva.

Per le forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sappiamo già dalla figura quali sono gli angoli formati dai vettori posizione e la lunghezza dei vettori posizione rispetto al polo dato. Per il vettore $\vec{F}_3$ possiamo completare la figura come segue.



In teoria dovremmo determinare la lunghezza del vettore $\vec{r}_3$ e l'ampiezza dell'angolo. In realtà basta conoscere il braccio della forza, ovvero la lunghezza di quel segmento OH, perpendicolare alla retta d'azione di $\vec{F}_3$ (la retta d'azione è la retta su cui giace il vettore). Quel segmento è la metà dell'asta ed è anche uguale a $|\vec{r}_3|\sin\gamma$ in quanto braccio della forza. Il segno del momento è negativo perché la forza tende a far ruotare il corpo in senso orario. Il momento della forza é perpendicolare al foglio e entrante in esso rispetto a noi.

Calcoliamo i moduli dei momenti rispetto al polo indicato.

$$
\begin{aligned}
M_1 &= |\vec{r}_1||\vec{F}_1|\sin\alpha = 0{,}03\ \text{m}\cdot 23\ \text{N}\sin(30°) = 0{,}345\ \text{Nm}\\
M_2 &= |\vec{r}_2||\vec{F}_2|\sin\beta = 0{,}02\ \text{m}\cdot 35\ \text{N}\sin(45°) = 0{,}50\ \text{Nm}\\
M_3 &= |\vec{r}_3||\vec{F}_3|\sin\gamma = 0{,}007\ \text{m}\cdot 20\ \text{N} = 0{,}14\ \text{Nm}
\end{aligned}
\tag{11.4}
$$

La somma delle componenti dei momenti, prese con il segno opportuno secondo quanto stabilito prima, è:

$$
M_{\text{tot}} = M_1 + M_2 + M_3 = -0{,}345\ \text{Nm} + 0{,}50\ \text{Nm} - 0{,}14\ \text{Nm} = 0{,}015\ \text{Nm} \tag{11.5}
$$

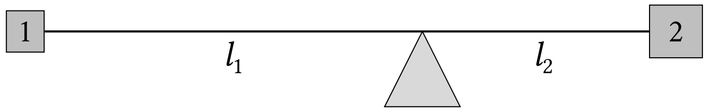
Quindi il momento totale ha componente positiva, è perpendicolare al piano del foglio e ha il verso uscente verso di noi.

11.3 Equilibrio del corpo rigido

Esercizio 83 *Un ripiano di massa trascurabile è poggiato su un vincolo e ha due corpi puntiformi posti alle sue estremità, come illustrato nella figura seguente.*

Sapendo che $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$*,* $l_1 = 34\,\mathrm{cm}$ *e* $l_2 = 24\,\mathrm{cm}$*:*

1. *Trova se il ripiano senza la massa 2 è in equilibrio.*
2. *Trova il valore della massa 2 tale per cui il ripiano può restare in equilibrio.*



Condizione necessaria per l'equilibrio di un corpo rigido è che la somma delle forze esterne agenti sul corpo sia zero e che sia zero anche la somma dei momenti delle forze esterne calcolate rispetto ad un qualsiasi punto.

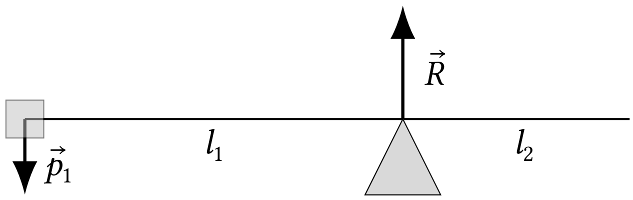
$$\sum \vec{F}_{\mathrm{est}} = 0 \tag{11.6}$$

$$\sum \vec{M}_{\mathrm{est}} = 0 \tag{11.7}$$

Queste due equazioni vettoriali equivalgono a sei equazioni scalari, due per ogni asse. Dovremo in generale scomporre le forze e i momenti per ricavare queste eventuali sei equazioni.

Se il corpo non è in equilibrio basta che non sia soddisfatta una delle due condizioni precedenti: verifichiamole entrambe in ogni caso.

1. Aggiungiamo alla figura tutte le forze presenti: in particolare la forza peso di entrambe i corpi e la reazione vincolare del fulcro che è diretta perpendicolarmente al ripiano.



Prima condizione

Sul nostro sistema iniziale, costituito dalla massa 1 e dall'asta rigida, agiscono due forze: la forza peso della massa 1 e la reazione vincolare del fulcro sull'asta. Determiniamo innanzi tutto la forza peso:

$$p_1 = mg = 5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 49{,}1\,\mathrm{N} \tag{11.8}$$

Per quanto riguarda la prima condizione, che è necessaria perché il sistema sia in equilibrio traslazionale, possiamo osservare che le due forze agiscono lungo la stessa direzione: per determinare se la loro somma vettoriale è nulla possiamo considerare direttamente le loro componenti lungo quella direzione. Quindi prendiamo il loro modulo con un segno se va in un certo verso (ad esempio verso l'alto) e con segno opposto se va verso il basso. Possiamo scrivere che:

$$\sum \vec{F}_{\mathrm{est}} = \vec{p}_1 + \vec{R} \tag{11.9}$$

$$F_{\mathrm{est}} = p_1 + R = -49{,}1\,\mathrm{N} + R \tag{11.10}$$

Tuttavia non sappiamo quanto valga la risultante R. Questa condizione di equilibrio è per il momento indeterminata.

Seconda condizione

Per quanto riguarda la seconda condizione dapprima calcoliamo il modulo dei momenti delle forze presenti. *Se il corpo è in equilibrio il polo rispetto a cui calcolare i momenti può essere scelto ad arbitrio*. Con altre parole, se la somma delle forze è nulla siamo autorizzati a cercare la seconda condizione per l'equilibrio determinando i momenti delle forze rispetto ad un qualsiasi punto: se la somma dei momenti è nulla per quel punto lo sarà per qualsiasi altro punto.

Noi in realtà non sappiamo se la somma delle forze sia nulla. Tuttavia viceversa possiamo affermare che *se le condizioni di equilibrio non valgono in un punto allora non sussistono del tutto*, a prescindere da ciò che accade alla somma delle forze.

Se poniamo il polo nel fulcro dell'asta allora il vettore posizione del punto di applicazione della forza $\vec{R}$ rispetto al polo scelto è nullo e questo ci consente di annullarne il momento. Dalla figura possiamo osservare che il vettore posizione associato alla forza peso 1 è lungo l_1 e che l'angolo tra il prolungamento del vettore posizione e la forza vale 90°.

$$M_R = R \cdot 0\,\mathrm{m} \cdot \sin\gamma = 0\,\mathrm{Nm} \tag{11.11}$$

$$M_{p_1} = p_1 l_1 \sin\alpha = 49{,}1\,\mathrm{N} \cdot 0{,}34\,\mathrm{m} \cdot \sin(90°) = 16{,}7\,\mathrm{Nm} \tag{11.12}$$

Per sommare i momenti osserviamo che l'asse su cui agiscono è per tutti perpendicolare al piano del disegno. Per fare la somma vettoriale basta prendere le loro componenti con il segno opportuno. Per attribuire un segno ai momenti controlliamo se tendono a far ruotare il sistema in senso antiorario o orario. Possiamo dare arbitrariamente il segno positivo al verso che vogliamo. Tuttavia scegliamo come positivo il verso antiorario, come nell'esercizio precedente. La componente di M_{p_1} ha quindi segno positivo; la componente di M_R è nulla, dato che agisce sul polo.

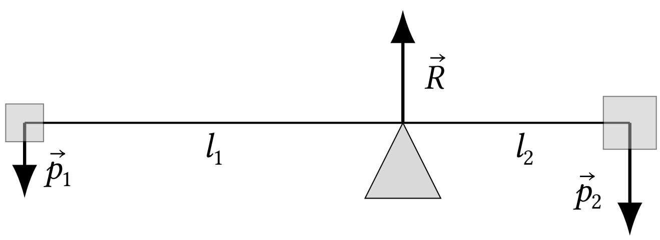
In conclusione:

$$\sum \vec{M}_{\mathrm{tot}} = \vec{M}_R + \vec{M}_{p_1} \tag{11.13}$$

$$M_{\mathrm{tot}} = M_R + M_{p_1} = 0\,\mathrm{Nm} + 16{,}7\,\mathrm{Nm} = 16{,}7\,\mathrm{Nm} \tag{11.14}$$

Il sistema non è in equilibrio perché la somma dei momenti è diversa da zero e tende a ruotare il sistema in senso antiorario. La reazione vincolare R rimane indeterminata.

2. Adesso consideriamo anche la presenza della massa 2. Il suo momento agisce su un retta perpendicolare al piano del disegno. Il segno da attribuire alla componente, per quanto fissato prima, è quello negativo perché tende a far ruotare il sistema in senso orario.



Se il sistema è in equilibrio deve essere nulla la somma delle forze. Quindi scriviamo:

$$\sum \vec{F}_{\mathrm{est}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{R} = 0 \tag{11.15}$$

$$F_{\text{est}} = p_1 + p_2 + R = -49{,}1\,\text{N} - |p_2| + R = 0 \tag{11.16}$$

Abbiamo un equazione in due incognite e quindi infinite soluzioni.
Analogamente, per quanto riguarda la condizione di equilibrio sui momenti:

$$\sum \vec{M}_{\text{tot}} = \vec{M}_R + \vec{M}_{p_1} + \vec{M}_{p_2} = 0 \tag{11.17}$$

$$M_{\text{tot}} = M_R + M_{p_1} + M_{p_2} = 0\,\text{Nm} + 16{,}7\,\text{Nm} - |M_{p_2}| = 0 \tag{11.18}$$

Da cui ricaviamo che:

$$|M_{p_2}| = p_2 l_2 \sin(90°) = 16{,}7\,\text{Nm} \tag{11.19}$$

dove l_2 è la lunghezza del vettore posizione della forza peso 2 rispetto al polo e l'angolo vale 90°. Dall'equazione precedente possiamo ricavare il peso.

$$p_2 = \frac{16{,}7\,\text{Nm}}{l_2 \sin(90°)} = \frac{16{,}7\,\text{Nm}}{0{,}24\,\text{m} \cdot \sin(90°)} = 69{,}6\,\text{N} \tag{11.20}$$

Infine, ricordandoci che $p = mg$, possiamo ricavare la massa:

$$m_2 = \frac{p_2}{g} = \frac{69{,}6\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2} = 7{,}01\,\text{kg} \tag{11.21}$$

E la reazione vincolare

$$F_{\text{est}} = p_1 + p_2 + R = -49{,}1\,\text{N} - 69{,}6\,\text{N} + R = 0 \tag{11.22}$$

$$R = 49{,}1\,\text{N} + 69{,}6\,\text{N} = 118{,}2\,\text{N} \tag{11.23}$$

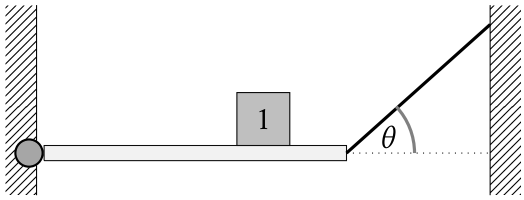
Osservazione.

Per quanto riguarda il corpo poggiato sul ripiano ci potremmo chiedere se si debba considerare anche la reazione vincolare tra corpo e ripiano stesso. In realtà, sebbene tale forza esista (anche se non detto esplicitamente), consideriamo la forza peso che agisce su tali corpi (puntiformi) solo per le conseguenze che hanno sul corpo rigido del sistema.

Quindi, per essere più precisi, dovremmo rappresentare e considerare nel disegno non già la forza peso del corpo, ma la forza che il corpo esercita sul corpo rigido. Questa forza è uguale in modulo e verso, ma non come punto di applicazione, al peso del corpo solo nel caso in cui il sistema sia in equilibrio.

Esercizio 84 *Un'asta omogenea, incernierata al muro, libera di ruotare in un piano verticale intorno alla cerniera e posta in orizzontale, come sommariamente rappresentato nella figura seguente, sostiene una massa* $m_1 = 540$ kg *posta a* 1,8 m *dalla cerniera. La massa dell'asta è* 200 kg *e la sua lunghezza* 2,5 m*. All'altra estremità dell'asta un corda tesa, di massa trascurabile e attaccata ad un altro muro, sostiene l'asta e forma un angolo* $\theta = 70°$ *con l'orizzontale.*

Determina la forza esercitata dalla corda sull'asta.



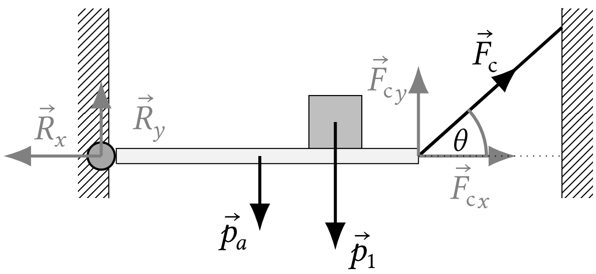
Condizione necessaria per l'equilibrio di un corpo rigido è che la somma delle forze esterne agenti sul corpo sia zero e che sia zero anche la somma dei momenti delle forze esterne calcolate rispetto ad un qualsiasi punto.

$$\sum \vec{F}_{\text{est}} = 0 \tag{11.24}$$

$$\sum \vec{M}_{\text{est}} = 0 \tag{11.25}$$

Sul nostro sistema, costituito dalla massa 1 e dall'asta rigida, agiscono quattro forze: la forza peso della massa, la forza peso dell'asta, la reazione vincolare del fulcro sull'asta e la forza della corda.

Nella figura successiva (non in scala) segniamo i componenti della forza della corda perpendicolari e paralleli al piano. Per quanto riguarda la reazione vincolare sappiamo che il componente orizzontale deve essere uguale e contrario al componente orizzontale della forza della corda, ma del componente verticale conosciamo solo il verso: deve essere verso l'alto per evitare che l'asta non abbia sostegno sulla sinistra.



Il nostro sistema, per come è congegnato, non ha libertà di muoversi se non nel piano del disegno. La forza che agisce sull'asse z, cioè perpendicolarmente al piano, è nulla. Per cui non dobbiamo preoccuparci di ciò che avviene lungo l'asse z.

Di conseguenza abbiamo tre condizioni da soddisfare per la condizione di equilibrio: due per la forza e una per i momenti.

Condizioni sulle forze.

Osserviamo che le forze non agiscono lungo la stessa direzione: per determinare se la loro somma vettoriale è nulla possiamo considerare le loro componenti lunghi degli assi privilegiati, possibilmente ortogonali, ad esempio lungo l'asta e perpendicolarmente ad essa. Per quanto riguarda le componenti della forza della corda lungo la direzione dell'asta (asse x) e perpendicolarmente all'asta (asse y), queste due componenti sono tra loro collegate e quindi conoscendo il valore di una possiamo determinare il valore dell'altra:

$$\begin{aligned} F_{cx} &= F_c \cos(\theta) \\ F_{cy} &= F_c \sin(\theta) \end{aligned} \tag{11.26}$$

La forza peso agisce integralmente lungo l'asse y.

Possiamo quindi scrivere che:

$$\sum \vec{F}_{\text{est}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_a + \vec{R} + \vec{F}_c \tag{11.27}$$

In particolare lungo la direzione dell'asta (asse x):

$$F_{\text{est}x} = R_x + F_{cx} = R_x + F_c \cos(\theta) = 0 \tag{11.28}$$

Invece perpendicolarmente all'asta (asse y):

$$F_{\text{est}y} = R_y + F_{cy} + p_a + p_1 = R_y + F_c \sin(\theta) + p_a + p_1 = 0 \tag{11.29}$$

Abbiamo un sistema di due equazioni in tre incognite e quindi con infinite soluzioni: ci serve ancora la condizione sui momenti.

Condizione sui momenti

Determiniamo innanzi tutto l'intensità delle forze peso:

$$p_1 = m_1 g = 540\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 5297\,\text{N} \tag{11.30}$$

$$p_a = m_a g = 200\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 1962\,\text{N} \tag{11.31}$$

La scelta di un polo rispetto a cui calcolare i momenti è arbitraria se il sistema è in equilibrio, come stiamo supponendo che sia. Allora prendiamo come polo il punto in cui è incernierata l'asta. In questo modo il momento relativo alla reazione vincolare ha il vettore posizione (del punto di applicazione della forza rispetto al polo) nullo e quindi è esso stesso nullo.

$$\sum \vec{M}_{\text{tot}} = \vec{M}_R + \vec{M}_{p_1} + \vec{M}_{p_a} + \vec{M}_{F_c} = 0 \tag{11.32}$$

Consideriamo il modulo dei momenti.

$$M_{p_1} = p_1 l_1 \sin(90°) = 5297\,\text{N} \cdot 1{,}8\,\text{m} \cdot 1 = 9534\,\text{Nm} \tag{11.33}$$

Se l'asta è omogenea e uniforme il suo centro di massa si trova a metà della sua lunghezza e lì possiamo considerare applicata la sua forza peso:

$$M_{p_a} = p_a \frac{l_a}{2} \sin(90°) = 1962\,\text{N} \cdot \frac{2{,}5\,\text{m}}{2} \cdot 1 = 2452\,\text{Nm} \tag{11.34}$$

$$M_{F_c} = F_c l_a \sin(\theta) \tag{11.35}$$

Infine per attribuire un segno corretto alle componenti dei momenti stabiliamo come positivo il verso di rotazione antiorario.

$$M_{\text{tot}} = M_R + M_{p_1} + M_{p_a} + M_{F_c} = 0\,\text{Nm} - 9534\,\text{Nm} - 2452\,\text{Nm} + M_{F_c} = 0 \tag{11.36}$$

Da cui ricaviamo che:

$$M_{F_c} = 11986\,\text{Nm} \tag{11.37}$$

Ma sappiamo anche che:

$$M_{F_c} = F_c \cdot 2{,}5\,\text{m} \cdot \sin(70°) \tag{11.38}$$

Uniamo le ultime due relazioni per ricavare la forza della corda:

$$F_c = \frac{11986\,\text{Nm}}{2{,}5\,\text{m} \cdot \sin(70°)} = 5102\,\text{N} \tag{11.39}$$

12 Cinematica rotazionale

Esercizio 85 *Una ruota gira con velocità angolare costante* $\omega = 12\,\mathrm{rad/s}$.

1. *Quanto ruota in* 23 s*?*
2. *Quanti giri compie in quel tempo?*

1. La ruota gira con velocità angolare costante: vale una legge analoga a quella relativa al moto rettilineo uniforme, dove, invece di avere una posizione x, abbiamo un angolo θ.

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t = 12\,\mathrm{rad/s} \cdot 23\,\mathrm{s} = 322\,\mathrm{rad} \tag{12.1}$$

dove θ_0 è l'angolo iniziale di rotazione che abbiamo supposto uguale a zero.

2. Un giro completo della ruota corrisponde a una rotazione di 2π rad o 360°. Quindi il numero di giri compiuti è:

$$N_{\text{giri}} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{322\,\mathrm{rad}}{2\pi} = 51\,\text{giri} \tag{12.2}$$

Osservazione. La velocità angolare, per lo meno in altri contesti come le onde o le oscillazioni, è spesso indicata in s^{-1} senza l'indicazione dei radianti dato che i radianti sono una grandezza adimensionale, ma propriamente andrebbero sempre indicati.

Esercizio 86 *Una ruota larga* 110 cm *gira con velocità angolare costante* $\omega = 25\,\text{giri/s}$.

1. *Quanto ruota in* 47 s*?*
2. *Quanti giri compie in quel tempo?*
3. *Qual è la velocità a cui sta rotolando la ruota se rotola su un piano?*
4. *Quanta strada percorre la ruota in quel tempo?*

1. Se la domanda "quanto ruota?" la intendiamo come "di quale angolo è ruotata?" allora dobbiamo trasformare la velocità di rotazione in unità del sistema internazionale.

$$\omega = 25\,\text{giri/s} = 25\,\mathrm{rad/s} \cdot 2\pi = 157\,\mathrm{rad/s} \tag{12.3}$$

Quindi la rotazione totale (partendo da zero) è stata:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t = 157\,\mathrm{rad/s} \cdot 47\,\mathrm{s} = 7383\,\mathrm{rad} \tag{12.4}$$

2. Come nel precedente esercizio possiamo scrivere:

$$N_{\text{giri}} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{7383\,\mathrm{rad}}{2\pi} = 1175\,\text{giri} \tag{12.5}$$

Avremmo potuto usare anche la legge relativa alla velocità angolare costante, con l'indicazione della velocità in giri al secondo invece che come radianti al secondo.

$$N_{\text{giri}} = \omega t = 25\,\text{giri/s} \cdot 47\,\text{s} = 1175\,\text{rad} \tag{12.6}$$

3. Nel moto circolare uniforme la velocità tangenziale è $v = 2\pi r f$, dove f è la frequenza ovvero il numero di giri al secondo compiuti dalla circonferenza. Se la ruota rotola senza strisciare allora *la velocità del mozzo e quindi la velocità con cui si sposta la ruota* è uguale alla velocità tangenziale del bordo esterno della ruota vista dal sistema di riferimento del mozzo.
   Invece, dal sistema di riferimento del terreno la velocità del punto di contatto col terreno è zero, mentre il punto diametralmente opposto ad esso è il doppio di v.
   La ruota è larga 110 cm, quindi il suo raggio è $r = 55$ cm.

$$v = 2\pi r f = 2\pi \cdot 0{,}55\,\text{m} \cdot 25\,\text{s}^{-1} = 86{,}4\,\text{m/s} \tag{12.7}$$

   Frequenza e velocità angolare in giri al secondo hanno lo stesso numero, ma unità di misura diversa.
4. Possiamo usare la legge del moto rettilineo uniforme per trovare la strada percorsa.

$$x = vt = 2\pi r f t = 2\pi \cdot 0{,}55\,\text{m} \cdot 25\,\text{s}^{-1} \cdot 47\,\text{s} = 4061\,\text{m} \tag{12.8}$$

Esercizio 87 *Una ruota larga* 45 cm *gira con velocità angolare iniziale* $\omega_i = 12\,\text{rad/s}$ *e viene accelerata. L'accelerazione angolare vale* $\alpha = 0{,}23\,\text{rad/s}^2$ *e dura per* 47 s.
Infine la ruota viene frenata e fatta arrestare in 9,0 m.
1. *Qual è la velocità finale della ruota in accelerazione?*
2. *Quanti giri compie in quel tempo?*
3. *Quanti giri compie in frenata?*
4. *Qual è l'accelerazione angolare nella frenata?*
5. *Qual è l'accelerazione lineare nella frenata?*

1. La ruota gira con accelerazione angolare costante: vale una legge analoga a quella relativa al moto uniformemente accelerato, dove, invece di avere una velocità v, abbiamo una velocità angolare ω.

$$\omega(t) = \omega_i + \alpha t = 12\,\text{rad/s} + 0{,}23\,\text{rad/s}^2 \cdot 47\,\text{s} = 22{,}8\,\text{rad/s} \tag{12.9}$$

2. Stabiliamo innanzi tutto l'angolo di rotazione complessivo: abbiamo anche qui una legge analoga a quella relativa al moto uniformemente accelerato, con l'angolo iniziale nullo.

$$\theta(t) = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 12\,\text{rad/s} \cdot 47\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}23\,\text{rad/s}^2 \cdot (47\,\text{s})^2 = 818\,\text{rad} \tag{12.10}$$

   Un giro completo della ruota corrisponde ad una rotazione di 2π rad, quindi il numero di giri compiuti è:

$$N_{\text{giri}} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{818\,\text{rad}}{2\pi} = 130\,\text{giri} \tag{12.11}$$

3. Se dividiamo la distanza percorsa per la circonferenza otteniamo il numero di giri compiuti.

$$N_{\text{giri}} = \frac{x}{2\pi r} = \frac{x}{\pi d} = \frac{9{,}0\,\text{m}}{\pi \cdot 0{,}45\,\text{m}} = 6{,}37\,\text{giri} \tag{12.12}$$

4. Nella frenata la velocità angolare varia da 22,8 rad/s a zero in un moto accelerato. Possiamo scrivere la seguente relazione che lega queste velocità alla rotazione θ avvenuta e alla accelerazione angolare α.
$$(\omega_f)^2 - (\omega_i)^2 = 2\alpha\theta \tag{12.13}$$
Per ricavare l'accelerazione dobbiamo conoscere la rotazione totale θ in radianti che è legata al numero di giri.
$$\theta = N_{\text{giri}} \cdot 2\pi = 40\,\text{rad} \tag{12.14}$$
Infine:
$$\alpha = \frac{(\omega_f)^2 - (\omega_i)^2}{2\theta} = \frac{-(22{,}8\,\text{rad/s})^2}{2 \cdot 40\,\text{rad}} = -6{,}50\,\text{rad/s}^2 \tag{12.15}$$
5. Anche per l'accelerazione lineare vale una relazione simile alla precedente:
$$(v_f)^2 - (v_i)^2 = 2ax \tag{12.16}$$
La velocità finale $v_f = 0\,\text{m/s}$, mentre la velocità iniziale in frenata la leghiamo alla velocità angolare.
$$v_i = \omega_i r = 22{,}8\,\text{rad/s} \cdot \frac{45\,\text{cm}}{2} = 22{,}8\,\text{rad/s} \cdot 0{,}225\,\text{m} = 5{,}13\,\text{m/s} \tag{12.17}$$
Infine:
$$a = \frac{(v_f)^2 - (v_i)^2}{2x} = \frac{-(5{,}13\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}0\,\text{m}} = -1{,}46\,\text{m/s}^2 \tag{12.18}$$

13 Dinamica del corpo rigido

13.1 Energia cinetica rotazionale

Esercizio 88 *Una palla sferica ha una massa* $m = 140\,\mathrm{g}$*, un momento di inerzia* $I = 0{,}038\,\mathrm{kg\,m^2}$ *e si muove ad una velocità* $v = 35\,\mathrm{km/h}$ *compiendo 4,5 giri al secondo.*

1. *Qual è l'energia cinetica traslazionale della palla?*
2. *Qual è l'energia cinetica rotazionale?*

1. L'energia cinetica traslazionale è:

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 140\,\mathrm{g} \cdot (35\,\mathrm{km/h})^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}140\,\mathrm{kg} \cdot (9{,}72\,\mathrm{m/s})^2 = 6{,}6\,\mathrm{J} \tag{13.1}$$

2. Se la palla compie 4,5 rotazioni al secondo la sua velocità angolare vale:

$$\omega = 4{,}5\,\mathrm{giri/s} = 4{,}5\,\mathrm{rad/s} \cdot 2\pi = 28{,}3\,\mathrm{rad/s} \tag{13.2}$$

L'energia cinetica rotazionale è:

$$E_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}038\,\mathrm{kg\,m^2} \cdot (28{,}3\,\mathrm{rad/s})^2 = 15{,}2\,\mathrm{J} \tag{13.3}$$

Esercizio 89 *Una palla sferica ha una massa* $m = 1{,}7\,\mathrm{kg}$*, il raggio è* $r = 35\,\mathrm{mm}$ *e si muove ad una velocità* $v = 15\,\mathrm{km/h}$*, compiendo 23 giri al secondo.*

1. *Qual è l'energia cinetica della palla se è una sfera piena?*
2. *Qual è l'energia cinetica della palla se è una sfera cava?*

L'energia cinetica totale è la somma di quella traslazionale e rotazionale.

$$E_\mathrm{c\,tot} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{13.4}$$

Dobbiamo conoscere il momento d'inerzia I della palla. Se è una sfera piena vale:

$$I_\mathrm{sp} = \frac{2}{5}mr^2 = \frac{2}{5} \cdot 1{,}7\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}035\,\mathrm{m})^2 = 0{,}0238\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{13.5}$$

Se è una sfera cava vale:

$$I_\mathrm{sc} = \frac{2}{3}mr^2 = \frac{2}{3} \cdot 1{,}7\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}035\,\mathrm{m})^2 = 0{,}0397\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{13.6}$$

Allora l'energia cinetica rotazionale nei due casi vale:

$$E_{\text{rot sp}} = \frac{1}{2} I_{\text{sp}} \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0238\,\text{kg m}^2 \cdot (23 \cdot 2\pi\,\text{rad/s})^2 = 249\,\text{J} \tag{13.7}$$

$$E_{\text{rot sc}} = \frac{1}{2} I_{\text{sc}} \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0397\,\text{kg m}^2 \cdot (23 \cdot 2\pi\,\text{rad/s})^2 = 414\,\text{J} \tag{13.8}$$

L'energia cinetica traslazionale vale:

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}7\,\text{kg} \cdot \left(\frac{15}{3{,}6}\,\text{m/s}\right)^2 = 14{,}8\,\text{J} \tag{13.9}$$

Infine, l'energia cinetica totale per la sfera piena vale:

$$E_{\text{c tot}} = E_{\text{c}} + E_{\text{rot sp}} = 14{,}8\,\text{J} + 249\,\text{J} = 264\,\text{J} \tag{13.10}$$

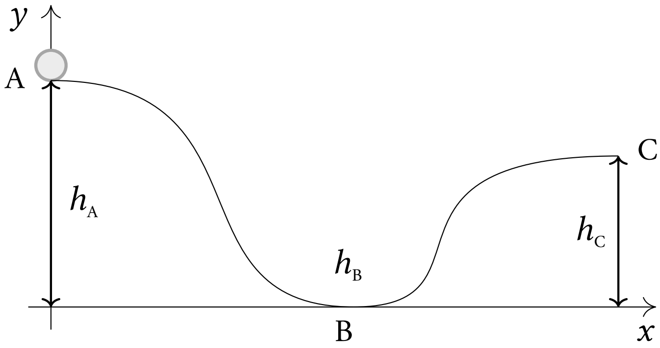
Per la sfera cava invece:

$$E_{\text{c tot}} = E_{\text{c}} + E_{\text{rot sc}} = 14{,}8\,\text{J} + 414\,\text{J} = 429\,\text{J} \tag{13.11}$$

13.2 Conservazione dell'energia

Esercizio 90 *Una biglia di acciaio piena, di raggio* 15 mm*, scende lungo un pendio rotolando, senza strisciare e senza perdere energia per attrito, partendo da ferma dal punto* A *ad un'altezza* $h_\mathrm{A} = 2{,}8\,\mathrm{m}$.

1. *Qual è l'energia meccanica iniziale del corpo?*
2. *Che velocità avrà nel punto* B *a valle, all'altezza* $h_\mathrm{B} = 0\,\mathrm{m}$ *?*
3. *Che velocità nel punto* C *ad un'altezza* $h_\mathrm{C} = 1{,}9\,\mathrm{m}$*?*
4. *Il corpo potrebbe superare l'avvallamento oltre il punto* C*?*



Questo esercizio è analogo a quello già proposto nel capitolo sul lavoro [8.6]. La situazione fisica è un po' più realistica perché abbiamo un sfera che rotola invece che un corpo che scivola soltanto. Per ruotare partendo da ferma deve per forza esserci attrito, ma stiamo comunque imponendo che non ci sia dissipazione di energia, ad esempio per attrito volvente.

Quindi possiamo applicare al nostro corpo il *principio di conservazione dell'energia meccanica: su un corpo in cui compiono lavoro solo forze conservative l'energia meccanica si conserva*.

L'energia meccanica è la somma dell'energia cinetica e potenziale del corpo, ma in questo contesto dobbiamo tener conto anche dell'energia cinetica rotazionale. Possiamo scrivere:

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{rot} + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh \tag{13.12}$$

Se l'energia meccanica si conserva allora possiamo legare quel che accade in due punti diversi con questa grandezza comune.

Si calcola l'energia meccanica in un punto in cui tutte le grandezze in essa contenute sono note. Conosciuta questa energia, che deve essere la stessa dappertutto, si può ricavare una delle grandezze in essa contenuta per un altra posizione del corpo, conoscendo il valore di tutte le altre grandezze nella nuova posizione.

1. Nel punto A la velocità v_A e la velocità angolare ω_A sono nulle perché il corpo parte da fermo; l'altezza h_A è nota. Non conosciamo ancora la massa del corpo. Se sappiamo che il corpo è d'acciaio possiamo conoscerne la densità da opportune tabelle e da questo determinarne la massa.

$$m = d \cdot V = d \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 7800\,\mathrm{kg/m^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}015\,\mathrm{m})^2 = 0{,}110\,\mathrm{kg} \tag{13.13}$$

Determiniamo infine l'energia meccanica.

$$E_{\mathrm{m_A}} = \frac{1}{2}m \cdot (0\,\mathrm{m/s})^2 + \frac{1}{2}I \cdot (0\,\mathrm{rad/s})^2 + 0{,}110\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}8\,\mathrm{m} = 3{,}02\,\mathrm{J} \tag{13.14}$$

2. Nel punto B conosciamo tutte le grandezze tranne la velocità lineare e angolare. Siccome abbiamo due incognite e un'unica condizione non possiamo ancora trovare la velocità lineare. Tuttavia, per una sfera che rotola, la velocità lineare di traslazione è legata a quella angolare dalla relazione $v = \omega r$. Allora esprimiamo l'energia meccanica in funzione della sola velocità v.

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 + mgh \tag{13.15}$$

Dobbiamo anche esplicitare il momento d'inerzia I per la sfera che ruota rispetto ad un suo asse di simmetria: $I = \frac{2}{5}mr^2$. Per cui possiamo scrivere:

$$E_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{5}mv^2 \tag{13.16}$$

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 + mgh = \frac{7}{10}mv^2 + mgh \tag{13.17}$$

Adesso possiamo legare l'energia meccanica nel punto in cui la conosciamo (il punto iniziale A), all'energia meccanica in B.

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{m_A}} &= E_{\mathrm{m_B}} \\ E_{\mathrm{m_A}} &= \frac{7}{10}mv_\mathrm{B}^2 + mgh_\mathrm{B} \\ E_{\mathrm{m_A}} &= \frac{7}{10}mv_\mathrm{B}^2 \qquad (h_\mathrm{B} = 0\,\mathrm{m}) \end{aligned} \tag{13.18}$$

l'espressione che ci dà l'energia meccanica è diventata un'equazione algebrica di secondo grado la cui incognita è la velocità che cerchiamo.

$$\begin{aligned} v_\mathrm{B}^2 &= \frac{E_{\mathrm{m_A}}}{\frac{7}{10}m} \\ v_\mathrm{B} &= \sqrt{\frac{10\cdot E_{\mathrm{m_A}}}{7m}} \end{aligned} \tag{13.19}$$

La velocità nel punto B vale:

$$v_\mathrm{B} = \sqrt{\frac{10\cdot 3{,}02\,\mathrm{J}}{7\cdot 0{,}110\,\mathrm{kg}}} = 6{,}26\,\mathrm{m/s} \tag{13.20}$$

3. Nel punto C valgono gli stessi ragionamenti del punto B, ma in questo caso l'altezza è h_C. Possiamo ricavare la velocità v_C dalle altre grandezze.

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{m_A}} &= E_{\mathrm{m_C}} \\ E_{\mathrm{m_A}} &= \frac{7}{10}mv_\mathrm{C}^2 + mgh_C \\ \frac{7}{10}mv_\mathrm{C}^2 &= E_{\mathrm{m_A}} - mgh_\mathrm{C} \\ v_\mathrm{C}^2 &= \frac{E_{\mathrm{m_A}} - mgh_\mathrm{C}}{\frac{7}{10}m} \\ v_\mathrm{C} &= \sqrt{\frac{10(E_{\mathrm{m_A}} - mgh_\mathrm{C})}{7m}} \end{aligned} \tag{13.21}$$

La velocità nel punto C vale:

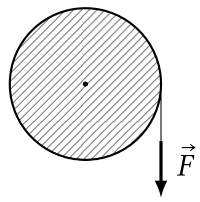
$$v_C = \sqrt{\frac{10(3{,}02\,\mathrm{J} - 0{,}110\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}9\,\mathrm{m})}{7 \cdot 0{,}110\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{9{,}70\,\mathrm{J}}{0{,}770\,\mathrm{kg}}} = 3{,}55\,\mathrm{m/s} \qquad (13.22)$$

4. Il punto C si trova ad una altezza inferiore al punto A. Il corpo, proprio per la conservazione dell'energia meccanica, può scivolare sul pendio finché non giunge ad una altezza uguale a quella di partenza, dove l'energia potenziale avrà lo stesso valore iniziale e l'energia cinetica si annulla e il corpo si ferma. Il fatto che il corpo rotoli non cambia queste considerazioni. Quindi il corpo può risalire fino al punto C.

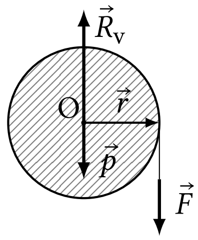
13.3 Momento della forza

Esercizio 91 *Un cilindro di massa* $m = 10\,\text{kg}$ *e raggio* $r = 12\,\text{cm}$ *può ruotare liberamente intorno al suo asse centrale. Una fune di massa trascurabile è legata intorno al cilindro ed è tirata con una forza costante* $F = 5{,}0\,\text{N}$*, come mostrato in figura.*

1. *Qual è il momento della forza esercitata sul cilindro?*
2. *Quale accelerazione angolare ha il cilindro?*
3. *Quale velocità di rotazione acquista dopo due secondi se parte da fermo?*
4. *Di quanto è scesa la fune in quei due secondi?*
5. *Qual è la tensione della fune se il cilindro è tenuto fermo?*
6. *Qual è la tensione della fune quando il cilindro non è trattenuto?*



1. Il cilindro è in equilibrio traslazionale: la somma delle forze che agiscono su di esso vale zero. Sul corpo agisce la forza peso $\vec{p}$ e la forza $\vec{F}$ verso il basso e la reazione vincolare dell'asse di sospensione verso l'altro.
   La forza $\vec{F}$ è tangente alla ruota per cui il vettore posizione del momento della forza rispetto al centro del cilindro è perpendicolare alla forza stessa. Le altre due forze agiscono direttamente sull'asse di rotazione e non contribuiscono al momento della forza.

   $$M = Fr\sin(90°) = 5{,}0\,\text{N} \cdot 0{,}12\,\text{m} = 0{,}6\,\text{kg m} \qquad (13.23)$$

2. Per conoscere la velocità di rotazione finale partiamo dal considerare la seconda legge della dinamica riferita al moto rotazionale: la possiamo applicare perché il corpo rigido ruota rispetto ad un asse fisso.
   $$M = I\alpha \qquad (13.24)$$
   Se il momento M è costante anche l'accelerazione angolare α conseguente è costante: ricaviamola. Ricordiamo che il momento d'inerzia I di un cilindro rispetto al suo asse di simmetria centrale è $I = \frac{1}{2}mr^2$.
   $$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{Fr}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{2F}{mr} = \frac{2 \cdot 5{,}0\,\text{N}}{10\,\text{kg} \cdot 0{,}12\,\text{m}} = 8{,}33\,\text{rad/s}^2 \qquad (13.25)$$

3. Il moto è uniformemente accelerato per cui la velocità angolare finale vale:
   $$\omega_f = \omega_i + \alpha \cdot t = 0\,\text{rad/s} + 8{,}33\,\text{rad/s}^2 \cdot 2\,\text{s} = 16{,}7\,\text{rad/s} \qquad (13.26)$$

4. La fune è solidale con il cilindro, per cui la fune si svolge dello stesso tanto dello spostamento del bordo del cilindro. A sua volta il bordo del cilindro percorre una distanza x_r proporzionale allo spostamento angolare θ.
   $$x_r = \theta \cdot r \qquad (13.27)$$
   Sappiamo che la rotazione del cilindro è uniformemente accelerata, parte da fermo e per semplicità supponiamo che lo spostamento angolare iniziale sia zero (possiamo indicare ad

arbitrio un qualsiasi valore iniziale). Per cui:

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 = 0\,\text{rad} + 0\,\text{rad/s} \cdot 2\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 8{,}33\,\text{rad/s}^2 \cdot (2\,\text{s})^2 = 16{,}7\,\text{rad} \qquad (13.28)$$

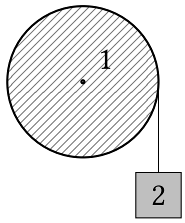
Infine:

$$x_r = \theta \cdot r = 16{,}7\,\text{rad} \cdot 0{,}12\,\text{m} = 2{,}00\,\text{m} \qquad (13.29)$$

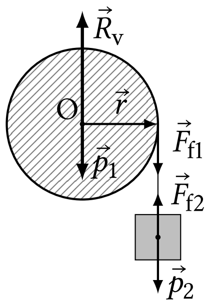
5. Se il sistema è fermo e quindi in equilibrio allora la fune è tirata verso il basso dalla forza $\vec{F}$ e verso l'alto dalla reazione vincolare del cilindro che la tiene ferma ed è uguale è contraria a $\vec{F}$. Per cui la tensione della fune è:
$$T = F = 5{,}0\,\text{N} \qquad (13.30)$$
6. La fune ha massa trascurabile: per questo motivo, anche se in movimento, la sua tensione è la stessa. Infatti la forza complessiva che agisce su essa è sempre nulla e poiché la forza $\vec{F}$ è scritto essere sempre uguale anche la tensione della fune ha lo stesso valore individuato al punto precedente.

Esercizio 92 *Un cilindro di massa* $m_1 = 10\,\text{kg}$ *e raggio* $r = 12\,\text{cm}$ *può ruotare liberamente intorno al suo asse centrale. Una fune di massa trascurabile è legata intorno al cilindro ed è tirata da un corpo di massa* $m_2 = 1{,}2\,\text{kg}$, *come mostrato in figura.*

1. *Qual è il momento della forza esercitata sul cilindro?*
2. *Quale accelerazione angolare ha il cilindro?*
3. *Qual è la tensione della fune se il cilindro è tenuto fermo?*
4. *Qual è la tensione della fune quando il cilindro non è trattenuto?*



Cominciamo analizzando le forze che agiscono sul sistema.
Il cilindro è in equilibrio traslazionale: la somma delle forze che agiscono su di esso vale zero. Sul corpo agisce la forza peso $\vec{p}_1$, la forza $\vec{F}_{f1}$ verso il basso, del filo sul corpo 1, e la reazione vincolare dell'asse di sospensione verso l'altro.
La forza $\vec{F}_{f1}$ è tangente alla ruota per cui il vettore posizione del momento della forza rispetto al centro del cilindro è perpendicolare alla forza stessa. Le altre due forze agiscono direttamente sull'asse di rotazione e non contribuiscono al momento della forza.
Invece sul corpo sospeso 2 agisce la forza $\vec{F}_{f2}$ verso l'alto, del filo sul corpo 2, e la forza peso $\vec{p}_2$. Queste due forze non sono uguali e contrarie perché il corpo è accelerato verso il basso.



1. Il momento della forza che agisce sul cilindro è legato alla forza F_{f1}, che non conosciamo. Per poterla determinare dobbiamo risolvere un sistema mettendo insieme più condizioni e informazioni.
Le forze F_{f1} e F_{f2} sono uguali e contrarie. Infatti, come già sottolineato nell'esercizio 52, se la massa della fune è trascurabile la forza complessiva che agisce su di essa è nulla. Chiamiamo allora questa forza semplicemente F_f.
Chiamiamo a l'accelerazione con cui il corpo due sta scendendo, presa col segno negativo se verso il basso; essa corrisponde anche all'accelerazione tangenziale di un punto sul bordo del cilindro. Per cui la II legge di Newton applicata al corpo due ci fa scrivere:
$$m_2 a = p_2 + (-F_f) = m_2 g - F_f \qquad (13.31)$$

Applichiamo il secondo principio della dinamica nella forma rotazionale al corpo uno.

$$\begin{aligned} M &= I\alpha \\ F_\mathrm{f}\, r \sin(90°) &= \frac{1}{2} m_1 r^2 \alpha \\ F_\mathrm{f} &= \frac{1}{2} m_1 r \alpha \end{aligned} \tag{13.32}$$

Infine consideriamo che l'accelerazione tangenziale di un punto sul bordo del cilindro è legata all'accelerazione angolare:

$$a = \alpha r \tag{13.33}$$

Con le tre condizioni otteniamo un sistema di tre equazioni in tre incognite: F_f, a e α.

$$\begin{cases} m_2 a = m_2 g - F_\mathrm{f} \\ F_\mathrm{f} = \dfrac{1}{2} m_1 r \alpha \\ a = \alpha r \end{cases} \tag{13.34}$$

Mettiamo in evidenza e calcoliamo le tre grandezze.

$$\begin{cases} F_\mathrm{f} = m_2 g - m_2 a \\ F_\mathrm{f} = \dfrac{1}{2} m_1 r \alpha = \dfrac{1}{2} m_1 r \dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{2} m_1 a \\ \alpha = \dfrac{a}{r} \end{cases} \tag{13.35}$$

$$\begin{aligned} m_2 g - m_2 a &= \frac{1}{2} m_1 a \\ m_2 g &= \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2\right) a \\ a &= \frac{m_2 g}{\left(\frac{1}{2} m_1 + m_2\right)} = \frac{1{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{\left(\frac{1}{2} 10\,\mathrm{kg} + 1{,}2\,\mathrm{kg}\right)} = 1{,}80\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned} \tag{13.36}$$

$$F_\mathrm{f} = \frac{1}{2} m_1 a = \frac{1}{2} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}80\,\mathrm{m/s^2} = 9{,}50\,\mathrm{N} \tag{13.37}$$

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{1{,}80\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}12\,\mathrm{m}} = 15{,}8\,\mathrm{rad/s^2} \tag{13.38}$$

Infine possiamo calcolare il momento della forza.

$$M = F_\mathrm{f}\, r \sin(90°) = 9{,}50\,\mathrm{N} \cdot 0{,}12\,\mathrm{m} = 1{,}14\,\mathrm{N\,m} \tag{13.39}$$

2. Abbiamo già calcolato che $\alpha = 15{,}8\,\mathrm{rad/s^2}$.
3. La tensione della fune quando il cilindro è fermo è in modulo uguale al peso del corpo due. Questa tensione deve essere superiore a quella che si ha quando il cilindro è in movimento.

$$T = p_2 = m_2 g = 1{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 11{,}8\,\mathrm{N} \tag{13.40}$$

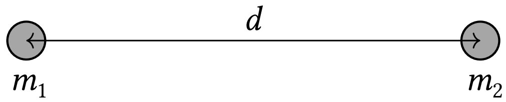
4. La tensione della fune quando il cilindro è in movimento corrisponde in modulo alla forza F_f che il filo esercita su i due corpi.

$$T = F_\mathrm{f} = 9{,}50\,\mathrm{N} \tag{13.41}$$

14 Gravitazione

14.1 Forza gravitazionale tra due corpi puntiformi

Esercizio 93 *Due corpi puntiformi dotati rispettivamente di massa $m_1 = 12\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 25\,\mathrm{kg}$ sono posti nel vuoto alla distanza $d = 1{,}2\,\mathrm{m}$. Calcola l'intensità della forza gravitazionale tra i due corpi e indica nella figura seguente direzione e verso della forza che agisce su ognuno.*



La legge di gravitazione universale dei corpi stabilisce quale debba essere la forza che intercorre tra due masse puntiformi, m_1 e m_2, poste nel vuoto a distanza d l'una dall'altra, dove G è la costante di gravitazione universale. Nella nostra figura le masse sono state disegnate come dei cerchi, per renderle meglio visibili.

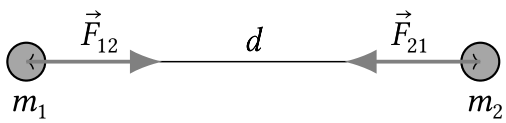
Per cui l'intensità della forza tra i due corpi è:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}\,\frac{12\,\mathrm{kg} \cdot 25\,\mathrm{kg}}{(1{,}2\,\mathrm{m})^2} = \tag{14.1}$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 12 \cdot 25}{1{,}44} \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2\,kg^2}}{\mathrm{kg^2\,m^2}} = 1{,}4 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$$

La forza può essere solo attrattiva. La forza $\vec{F}_{12}$ che agisce sul corpo m_1 posto in presenza del corpo m_2 è uguale e contraria alla forza $\vec{F}_{21}$ che agisce sul corpo m_2 posto in presenza del corpo m_1. La direzione delle due forze è lungo l'asse che congiunge il centro dei due corpi.

Possiamo completare la figura in questo modo:



Esercizio 94 *La Luna è attratta gravitazionalmente di più dalla Terra o dal Sole?*

Per rispondere alla domanda calcoliamo la forza di attrazione prima con la Terra e poi con il Sole. Ricaviamo i dati relativi alla massa e alle distanze tra questi corpi dalla tabella in appendice a questo libro. Come distanza tra la Luna e il Sole usiamo il raggio dell'orbita terrestre.

$$F_{LT} = G\frac{m_L m_T}{d^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}\frac{(7{,}34 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}) \cdot (5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg})}{(3{,}84 \times 10^8\,\mathrm{m})^2} = 1{,}98 \times 10^{20}\,\mathrm{N} \quad (14.2)$$

$$F_{LS} = G\frac{m_L m_S}{d^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}\frac{(7{,}34 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}) \cdot (1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg})}{(1{,}49 \times 10^{11}\,\mathrm{m})^2} = 4{,}39 \times 10^{20}\,\mathrm{N} \quad (14.3)$$

14.2 Moto orbitale

Esercizio 95 *Un satellite artificiale orbita intorno alla Terra su un orbita circolare a* 400 km *di altitudine. Determina:*

1. *l'accelerazione di gravità a cui è sottoposto il satellite;*
2. *la velocità orbitale;*
3. *il periodo di rivoluzione intorno alla Terra.*

1. Se combiniamo assieme la legge di gravitazione universale con l'usuale formula per la forza peso possiamo determinare l'accelerazione di gravità g a cui è sottoposto il satellite.
   Il raggio dell'orbita è la somma del raggio terrestre più l'altitudine a cui il satellite si trova.

$$r = r_t + h = 6{,}372 \times 10^3\,\mathrm{km} + 0{,}400 \times 10^3\,\mathrm{km} = 6{,}772 \times 10^3\,\mathrm{km} = 6{,}772 \times 10^6\,\mathrm{m} \quad (14.4)$$

   Inoltre il raggio dell'orbita corrisponde anche alla distanza tra i centri di massa della Terra e del satellite ($r = d$).

$$\begin{aligned} F_p &= F_G \\ m_s g &= G\frac{m_s m_T}{d^2} \\ g &= G\frac{m_T}{d^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}\frac{5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6{,}772 \times 10^6\,\mathrm{m})^2} = 8{,}68\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned} \quad (14.5)$$

2. La velocità orbitale si può ricavare dalla seguente relazione:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6{,}772 \times 10^6\,\mathrm{m}}} = 7{,}67 \times 10^3\,\mathrm{m/s} \quad (14.6)$$

   Possiamo ricavare quella relazione considerando che, per avere un orbita circolare e un moto circolare uniforme, la forza centripeta è data dalla forza di attrazione gravitazionale sul satellite.

$$\begin{aligned} m_s\frac{v^2}{r} &= G\frac{m_s m_T}{r^2} \\ \frac{v^2}{r} &= G\frac{m_T}{r^2} \\ v^2 &= \frac{G m_T}{r} \end{aligned} \quad (14.7)$$

3. Se il moto è circolare uniforme vale la seguente relazione:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{14.8}$$

   T è il periodo di rivoluzione e lo mettiamo in evidenza.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6{,}772 \times 10^6\ \mathrm{m}}{7{,}67 \times 10^3\ \mathrm{m/s}} = 5{,}55 \times 10^3\ \mathrm{s} \tag{14.9}$$

14.3 Energia potenziale gravitazionale

Esercizio 96 *Un fumatore incosciente lascia cadere un accendino con una massa di* 50 g *dalla cima della torre degli Asinelli a Bologna da un altezza di* 97,20 m.
Calcola esattamente di quanto è variata la sua energia potenziale quando arriva al suolo.

La forza di gravità è una forza conservativa e quindi ad essa è associata una energia potenziale. In prossimità del suolo quest'energia può essere espressa dalla relazione $U = mgh$, dove m è la massa del corpo, g l'accelerazione di gravità e h l'altezza a cui si trova il corpo rispetto ad una altezza di riferimento scelta ad arbitrio. La scelta arbitraria dell'altezza di riferimento è legata al significato fisico dell'energia potenziale: ciò che importa sono solo le variazioni di energia tra due posizioni e non il valore dell'energia in un punto.

L'espressione più generale per l'energia potenziale è però $U(r) = -\frac{GMm}{r}$; l'espressione si riferisce ad un corpo puntiforme di massa m, posto a distanza r dal centro di un altro corpo di massa M (la Terra) e dove $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/\,kg^2}$ è la costante di gravitazione universale.

La differenza di valore tra le due espressioni è solitamente trascurabile ai fini pratici. Nel testo ci viene chiesto di determinare la variazione esatta di energia, facendo implicitamente riferimento alla seconda espressione. Calcoliamo comunque la variazione con entrambe le espressioni per evidenziarne la differenza.

Per usare la prima espressione scegliamo come altezza di riferimento il suolo ($h = 0$ m).

$$\Delta E = E_{p2} - E_{p1} = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1) = 50\ \mathrm{g} \cdot (9{,}81\ \mathrm{m/s^2})(0\ \mathrm{m} - 97{,}20\ \mathrm{m}) = -47{,}68\ \mathrm{J} \tag{14.10}$$

Per quanto riguarda la seconda espressione r_1 (distanza iniziale) è la distanza tra il centro della Terra e la cima della torre; r_2 è invece il solo raggio terrestre, supponendo che la torre sia al livello del mare.

$$\Delta E = E_{p2} - E_{p1} = -\frac{GMm}{r_2} - \left(-\frac{GMm}{r_1}\right) = -\frac{GMm}{r_T} - \left(-\frac{GMm}{r_T + h}\right) = GMm\left(-\frac{1}{r_T} + \frac{1}{r_T + h}\right) = \tag{14.11}$$

$$6{,}674{\times}10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/\,kg^2}{\cdot}5{,}972{\times}10^{24}\ \mathrm{kg}{\cdot}0{,}05\ \mathrm{kg}\left(-\frac{1}{6371000\ \mathrm{m}} + \frac{1}{6371000\ \mathrm{m} + 97{,}20\ \mathrm{m}}\right) = -47{,}72\ \mathrm{J}$$

Nel l'ultimo calcolo abbiamo usato quattro cifre significative sia per la costante di gravitazione universale che per la massa della Terra perché la differenza con la precedente variazione di energia potenziale era anch'essa sulla quarta cifra significativa. Per una più corretta valutazione avremmo dovuto conoscere meglio anche l'accelerazione di gravità usata nel primo caso.

Esercizio 97 *Un proiettile è sparato verticalmente dalla superficie terrestre con velocità iniziale* $v = 1{,}2\ \mathrm{km/s}$. *Trascurando la resistenza dell'aria:*

1. *A che distanza dalla superficie terrestre potrà arrivare?*
2. *Qual è la velocità con cui la particella ricade sulla superficie terrestre?*

1. Possiamo risolvere questo esercizio applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica per le forze conservative, in questo caso la forza di gravità.
   Tuttavia il moto dell'oggetto non è tutto prossimo alla superficie terrestre come nell'esercizio precedente. Quando avviene questo non è corretto utilizzare $U = mgh$ come espressione

che definisce l'energia potenziale gravitazionale. Un proiettile lanciato verso l'alto con una velocità di 1 km/s arriva sicuramente a diversi km di altezza. In tali casi è opportuno utilizzare l'espressione generale $U(r) = -\frac{GMm}{r}$.
La Terra è un corpo sferico e il suo campo gravitazionale, al di là della superficie, si comporta come quello di un corpo puntiforme posto nel suo centro.
All'istante iniziale la distanza tra proiettile e Terra è il raggio della terra $r_\mathrm{T} = 6{,}37 \times 10^6$ m. Alla massima altezza dal suolo (h) la distanza tra proiettile e Terra è divenuta $r_\mathrm{T} + h$ e la velocità del proiettile è nulla.
Quindi la conservazione dell'energia meccanica ci consente di scrivere che:

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{ci}} + U_\mathrm{i} &= E_{\mathrm{cf}} + U_\mathrm{f} \\
\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r_\mathrm{T}} &= -\frac{GmM}{r_\mathrm{T} + h} \\
\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r_\mathrm{T}}\right) &= -\frac{GM}{(r_\mathrm{T} + h)} \\
r_\mathrm{T} + h &= -\frac{GM}{\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r_\mathrm{T}}\right)} \\
h &= -r_\mathrm{T} - \frac{GM}{\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r_\mathrm{T}}\right)}
\end{aligned} \tag{14.12}$$

$$h = -6{,}37\times10^6\ \mathrm{m} - \frac{6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/\,kg^2} \cdot 5{,}97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{\left(\frac{1}{2}\left(1,2 \cdot 10^3 \frac{m}{s}\right)^2 - \frac{6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/\,kg^2} \cdot 5{,}97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6{,}37 \times 10^6\ \mathrm{m}}\right)} = 74{,}1\ \mathrm{km} \tag{14.13}$$

2. Per la conservazione dell'energia meccanica la velocità di caduta al suolo (in modulo, ma non in direzione e verso) è la stessa che si ha al momento del lancio: se l'altezza a cui si ritrova il corpo è la stessa iniziale deve essere la stessa anche la velocità.

Esercizio 98 *Un meteorite passa a* 800 km *dalla Luna con una velocità* $v = 1{,}5$ km/s.
1. *Il meteorite riuscirà a sfuggire all'attrazione gravitazionale della Luna?*
2. *Quale velocità minima avrebbe dovuto avere per poter sfuggire via?*

1. Se l'energia totale del sistema meteorite-Luna è maggiore di zero il sistema non è legato e il meteorite può sfuggire. L'energia cinetica è solamente del meteorite; la distanza d da considerare è la somma del raggio della Luna e della distanza del meteorite dalla superficie della Luna.

$$E_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_\mathrm{L}}{d} \tag{14.14}$$

Nell'espressione precedente non conosciamo il valore della massa m del satellite, ma sappiamo che è necessariamente un numero positivo. Allora mettiamola in evidenza e calcoliamo il valore del fattore per il quale è moltiplicata.

$$E_{\mathrm{tot}} = m\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_\mathrm{L}}{d}\right) \tag{14.15}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_\mathrm{L}}{d} = \tag{14.16}$$

$$\frac{1}{2}(1{,}5 \times 10^3 \text{ m/s})^2 - \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{ kg}^2 \cdot 7{,}35 \times 10^{22} \text{ kg}}{1{,}74 \times 10^6 \text{ m} + 0{,}80 \times 10^6 \text{ m}} = -8{,}05 \times 10^5 \text{ J/kg} \tag{14.17}$$

Il valore precedente è negativo, quindi è negativa anche l'energia totale: *il meteorite non riuscirà a sfuggire all'attrazione gravitazionale della Luna*.

2. La velocità minima per sfuggire all'attrazione gravitazionale di un corpo è detta *velocità di fuga*. La sua espressione è:

$$v_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{2GM}{d}} \tag{14.18}$$

La massa da considerare è quella della Luna e *d*, come prima, è la distanza tra il centro della Luna e il centro del corpo.

$$v_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{ kg}^2 \cdot 7{,}35 \times 10^{22} \text{ kg}}{1{,}74 \times 10^6 \text{ m} + 0{,}80 \times 10^6 \text{ m}}} = 1{,}96 \times 10^3 \text{ m/s} \tag{14.19}$$

La precedente relazione si può facilmente ricavare considerando che quella velocità è quella che si avrebbe se l'energia totale del sistema fosse uguale a zero, cioè l'energia minima per poter sfuggire all'attrazione gravitazionale.

15 Termologia

15.1 Legge fondamentale della calorimetria

Esercizio 99 *Calcola la quantità di calore necessaria ad innalzare la temperatura di* 14 mg *di ferro da* 23 °C *a* 120 °C.

La legge fondamentale della calorimetria ci dice qual è la quantità di calore Q che dobbiamo fornire ad un corpo di massa m e calore specifico c per variarne la temperatura da una temperatura iniziale T_i ad una temperatura finale T_f .

$$Q = mc\Delta T = mc(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i}) \tag{15.1}$$

Tutte le unità di misura vanno espresse nel S.I.

Quindi in questo caso abbiamo che:

$$m = 14\,\mathrm{mg} = 14 \times 10^{-3}\,\mathrm{g} = 14 \times 10^{-3} 10^{-3}\,\mathrm{kg} = 14 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg} \tag{15.2}$$

Il calore specifico del ferro lo ricaviamo dalle tabelle: $c_{\mathrm{Fe}} = 450\,\mathrm{J/(K\,kg)}$.

$$\begin{aligned} t_\mathrm{i} &= 23\,^\circ\mathrm{C} \equiv 23\,\mathrm{K} + 273{,}15\,\mathrm{K} = 296{,}15\,\mathrm{K} \\ t_\mathrm{f} &= 120\,^\circ\mathrm{C} \equiv 120\,\mathrm{K} + 273{,}15\,\mathrm{K} = 393{,}15\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{15.3}$$

Quando abbiamo una variazione di temperatura ΔT possiamo usare indifferentemente gradi Celsius (t minuscola) o kelvin (T maiuscola) in quanto gli intervalli di temperatura espressi in gradi Celsius o kelvin sono numericamente uguali. Quindi in questo caso non era del tutto necessario convertire le temperature in kelvin.

Sostituiamo questi dati nella legge.

$$Q = 14 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot 450\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\,kg}} \cdot (393,15 - 296,15)\mathrm{K} = 0{,}61\,\mathrm{J} \tag{15.4}$$

15.2 Passaggi di stato

Esercizio 100 *Calcolare la quantità di calore totale necessaria per far fondere* 500 g *di ghiaccio inizialmente a* 0 °C *e portarli alla temperatura di* 17 °C.

[Il calore specifico dell'acqua è 4186 J/(kg K) *e il calore latente di fusione è* 333 kJ/K*]*

La legge fondamentale della calorimetria si può applicare solo a materiali che non subiscono un passaggio di stato nel salto di temperatura a cui vengono sottoposti. Durante il passaggio di stato la temperatura (per una sostanza pura) rimane costante e il calore che è necessario fornire per completare la transizione da una fase all'altra è detto calore latente (di fusione o di vaporizzazione).

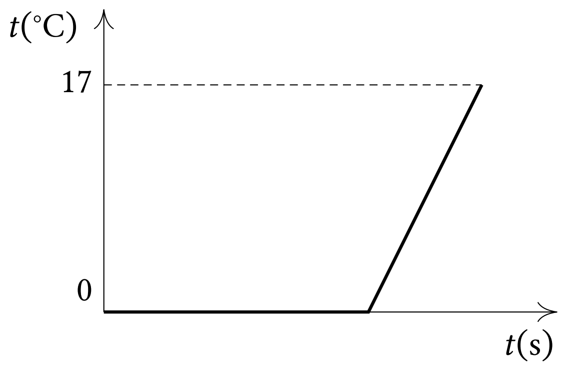
Qui dobbiamo prima fare fondere completamente il ghiaccio e poi possiamo fare salire la temperatura dell'acqua liquida fino alla temperatura finale.

Il **primo passo** è quello di calcolare quanto calore ci vuole per far fondere completamente l'acqua.

$$Q = m\lambda_\mathrm{f} \tag{15.5}$$

dove m è la massa della sostanza e λ_f è il calore latente, in questo caso di fusione, ovvero il calore che è necessario fornire ad un chilogrammo di sostanza per farle compiere il passaggio di stato.

Il **secondo passo** è quello di applicare la legge fondamentale della calorimetria per portare l'acqua liquida alla sua temperatura finale. Possiamo fare anche un grafico qualitativo della temperatura in funzione del tempo (supponendo un riscaldamento costante) per meglio renderci conto di quello che stiamo facendo.



Tutte le unità di misura vanno espresse nel S.I. per coerenza con i parametri a nostra disposizione.

$$m = 500\,\mathrm{g} = 0{,}5\,\mathrm{kg} \tag{15.6}$$

$$(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i}) = (17\,°\mathrm{C} - 0\,°\mathrm{C}) = 17\,°\mathrm{C} \equiv \Delta T = 17\,\mathrm{K} \tag{15.7}$$

Calore per fare fondere il ghiaccio:

$$Q = m\lambda_\mathrm{f} = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 333\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} = 166500\,\mathrm{J} \tag{15.8}$$

Calore per aumentare la temperatura dell'acqua liquida:

$$Q = mc\Delta T = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4186\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot 17\,\mathrm{K} = 35581\,\mathrm{J} \tag{15.9}$$

Il calore che in totale dobbiamo fornire è quindi:

$$Q = 166500\,\mathrm{J} + 35581\,\mathrm{J} = 202081\,\mathrm{J} \approx 202000\,\mathrm{J} \tag{15.10}$$

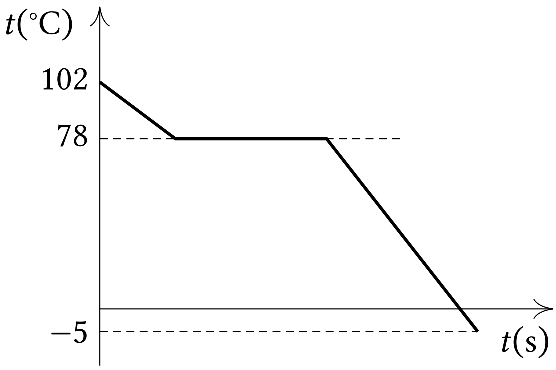
Esercizio 101 *Calcolare la quantità di calore totale che dobbiamo assorbire da* 23 kg *di etanolo, inizialmente a* 102 °C*, per portarli alla temperatura di* −5 °C*. Tutto il processo avviene alla presenza di solo etanolo tenuto alla pressione atmosferica.*

Questo esercizio può essere risolto esattamente con lo stesso metodo utilizzato nell'esercizio precedente. Qui dobbiamo fare attenzione alle particolari caratteristiche fisiche dell'etanolo. Guardando nelle opportune tabelle scopriamo che l'etanolo fonde a −114 °C e bolle a 78 °C. Quindi l'etanolo iniziale, se tenuto alla pressione di 1 atm, si trova allo stato gassoso; a −5 °C invece è liquido. Il nostro raffreddamento dovrà passare attraverso un passaggio di stato, da gassoso a liquido.

L'intero processo passa attraverso tre fasi.

1. Da 102 °C a 78 °C (temperatura di condensazione): raffreddamento del vapore.
2. Condensazione completa a 78 °C: passaggio di stato con temperatura costante.
3. Da 78 °C a −5 °C: raffreddamento del liquido.

Possiamo rappresentare con un grafico qualitativo quanto deve succedere.



Prima fase. Applichiamo la legge fondamentale della calorimetria.

$$Q = mc\Delta T = mc(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i}) \tag{15.11}$$

Il calore specifico dell'etanolo in fase gassosa a circa 100 °C vale 1800 J/(kg K) .

$$\Delta t = (t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i}) = (78\,^\circ\mathrm{C} - 102\,^\circ\mathrm{C}) = -24\,^\circ\mathrm{C} \equiv \Delta T = -24\,\mathrm{K} \tag{15.12}$$

Il segno meno deriva dal fatto che stiamo raffreddando la sostanza.

$$Q_1 = 23\,\mathrm{kg} \cdot 1800\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot (-24\,\mathrm{K}) = -993600\,\mathrm{J} \tag{15.13}$$

Seconda fase. Calore latente di evaporazione o condensazione (855000 J/kg).

$$Q = m\lambda_\mathrm{v} \tag{15.14}$$

$$Q_2 = 23\,\mathrm{kg} \cdot 855000\,\mathrm{J/kg} = 23 \cdot 855000\,\mathrm{J} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} = 19665000\,\mathrm{J} \tag{15.15}$$

Terza fase. Applichiamo nuovamente la legge fondamentale della calorimetria. L'etanolo è ora in fase liquida ($c = 2430\,\mathrm{J/(kg\,K)}$).

$$\Delta t = (t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i}) = (-5\,^\circ\mathrm{C} - 78\,^\circ\mathrm{C}) = -83\,^\circ\mathrm{C} \equiv \Delta T = -83\,\mathrm{K} \tag{15.16}$$

$$Q_3 = 23\,\text{kg} \cdot 2430\,\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot (-83\,\text{K}) = -4638870\,\text{J} \tag{15.17}$$

Le tre quantità che abbiamo ottenuto devono avere lo stesso segno perché il processo è sempre di raffreddamento. Il calore che in totale dobbiamo assorbire è quindi:

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 993600\,\text{J} + 19665000\,\text{J} + 4638870\,\text{J} = 25297470\,\text{J} \approx 25300000\,\text{J} \tag{15.18}$$

15.3 Calorimetro

Esercizio 102 *Un calorimetro è riempito con* 2500 ml *di acqua pura a* 17 °C*. In esso viene immerso un blocco di sostanza incognita la cui massa è* 500 g *alla temperatura di* 230 °C*. All'equilibrio il sistema, senza alcuna dissipazione di calore, raggiunge una temperatura finale di* 34 °C*.*

Trova il calore specifico della sostanza.

Un calorimetro ideale è un recipiente in grado di non disperdere calore e di non assorbirlo dalle sostanze in esso contenute. Se versiamo l'acqua (fredda) e il blocco (caldo) nel calorimetro si avrà unicamente un trasferimento di calore tra questi due oggetti.

Indichiamo con Q_a la quantità di calore assorbita dall'acqua e con Q_b quella ceduta dal blocco: la loro somma algebrica deve essere uguale a zero.

$$Q_a + Q_b = 0 \tag{15.19}$$

Sviluppiamo queste due espressioni, tenendo conto che l'acqua non cambia di stato (la temperatura finale è ancora sotto i 100 °C), e applichiamo la legge fondamentale della calorimetria. Indichiamo con t_f la temperatura finale e comune dell'acqua e del blocco, con il pedice a le grandezze riferite all'acqua e con il pedice b le grandezze riferite al blocco. L'unica incognita è il calore specifico del blocco c_b.

$$m_\mathrm{a}c_\mathrm{a}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ia}) + m_\mathrm{b}c_\mathrm{b}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ib}) = 0 \tag{15.20}$$

Mettiamo in evidenza l'incognita:

$$m_\mathrm{b}c_\mathrm{b}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ib}) = -m_\mathrm{a}c_\mathrm{a}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ia}) \tag{15.21}$$

$$c_\mathrm{b} = -\frac{m_\mathrm{a}c_\mathrm{a}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ia})}{m_\mathrm{b}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ib})} \tag{15.22}$$

Infine:

$$c_\mathrm{b} = -\frac{2{,}500\,\mathrm{kg}\cdot 4186\,\mathrm{J/(kg\,°C)}\cdot(34\,°\mathrm{C} - 17\,°\mathrm{C})}{0{,}500\,\mathrm{kg}\cdot(34\,°\mathrm{C} - 230\,°\mathrm{C})} = 1815\,\mathrm{J/(kg\,°C)} \tag{15.23}$$

Esercizio 103 *Un calorimetro è riempito con* 2500 ml *di acqua pura a* 17 °C*. In esso viene immerso un blocco di sostanza incognita la cui massa è* 500 g *alla temperatura di* 230 °C*. All'equilibrio il sistema, senza alcuna dissipazione di calore, raggiunge una temperatura finale di* 34 °C*.*

Il calorimetro ha una capacità termica di 120 J/°C*.*

Trova il calore specifico della sostanza.

Un calorimetro ideale è un recipiente in grado di non disperdere calore e di non assorbirlo dalle sostanze in esso contenute. Tuttavia, in condizioni reali, anche il calorimetro assorbe o cede calore al suo contenuto. Dobbiamo tenere conto nel bilancio termico anche di questo oggetto.

Per fortuna non ci interessa sapere massa e calore specifico del calorimetro: ci basta conoscere la sua capacità termica $C = mc$, prodotto della massa per il calore specifico, come indicato nei dati del problema. Tradizionalmente si usa la grandezza m_{H_20} detta "equivalente in acqua del calorimetro" dove si suppone che il calore specifico del calorimetro sia quello dell'acqua e invece di darci la capacità termica ci viene data la quantità d'acqua corrispondente, come se $C = m_{H_20}c_{H_20}$.

Sviluppiamo l'esercizio come quello precedente: indichiamo con Q_a la quantità di calore assorbita dall'acqua, con Q_b quella ceduta dal blocco e con Q_c quella assorbita dal calorimetro: la loro somma algebrica deve essere uguale a zero.

$$Q_a + Q_b + Q_c = 0 \tag{15.24}$$

Sviluppiamo queste due espressioni applicando la legge fondamentale della calorimetria. Indichiamo con t_f la temperatura finale e comune dell'acqua, del blocco e del calorimetro, con il pedice "a" le grandezze riferite all'acqua, con il pedice "b" le grandezze riferite al blocco; del calorimetro usiamo la capacità termica C e supponiamo che la sua temperatura iniziale sia quella dell'acqua in esso contenuta. L'unica incognita è il calore specifico del blocco c_b.

$$m_\mathrm{a} c_\mathrm{a}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ia}) + m_\mathrm{b} c_\mathrm{b}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ib}) + C(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ia}) = 0 \tag{15.25}$$

Mettiamo in evidenza l'incognita:

$$m_\mathrm{b} c_\mathrm{b}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ib}) = -m_\mathrm{a} c_\mathrm{a}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ia}) - C(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ia}) \tag{15.26}$$

$$c_\mathrm{b} = -\frac{m_\mathrm{a} c_\mathrm{a}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ia}) + C(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ia})}{m_\mathrm{b}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{ib})} \tag{15.27}$$

Infine:

$$c_\mathrm{b} = -\frac{2{,}500\,\mathrm{kg} \cdot 4186\,\mathrm{J/(kg\,^\circ C)} \cdot (34\,^\circ\mathrm{C} - 17\,^\circ\mathrm{C}) + 120\,\mathrm{J/^\circ C} \cdot (34\,^\circ\mathrm{C} - 17\,^\circ\mathrm{C})}{0{,}500\,\mathrm{kg} \cdot (34\,^\circ\mathrm{C} - 230\,^\circ\mathrm{C})} = 1836\,\mathrm{J/(kg\,^\circ C)} \tag{15.28}$$

Il valore ottenuto nell'esercizio precedente con il calorimetro ideale, con gli stessi dati, era sottostimato rispetto a quello più realistico qui ottenuto.

15.4 Conduzione del calore

Esercizio 104 *Una finestra fatta di vetro è larga* 166 cm *e alta* 89 cm*; lo spessore del vetro è* 12 mm*; una faccia si trova ad una temperatura di* 21 °C *e l'altra a* 4 °C*.* ($k = 0{,}7\,\mathrm{W/(m\,K)}$)

Calcola quanto calore fluisce attraverso la finestra ogni secondo.

Per dare risposta a questa domanda utilizziamo la legge di Fourier. La legge ci dice quanto calore Q fluisce attraverso una parete di area A e spessore L in un tempo Δt, dove una parete si trova alla temperatura T_1 e l'altra alla temperatura T_2 e con $T_2 > T_1$:

$$Q = k\frac{(T_2 - T_1)A\Delta t}{L} \tag{15.29}$$

In questo caso:

$$(t_2 - t_1) = 21\,°\mathrm{C} - 4\,°\mathrm{C} = 17\,°\mathrm{C} \equiv (T_2 - T_1) = 17\,\mathrm{K} \tag{15.30}$$

Le dimensioni della parete sono:

$$b = 166\,\mathrm{cm} = 1{,}66\,\mathrm{m} \tag{15.31}$$

$$h = 89\,\mathrm{cm} = 0{,}89\,\mathrm{m} \tag{15.32}$$

$$L = 12\,\mathrm{mm} = 0{,}012\,\mathrm{m} \tag{15.33}$$

L'area è quindi:

$$A = bh = 1{,}66\,\mathrm{m} \cdot 0{,}89\,\mathrm{m} = 1{,}4774\,\mathrm{m}^2 \tag{15.34}$$

Il tempo Δt vale 1 s. Sostituendo tutte le grandezze nella legge abbiamo che:

$$Q = 0{,}7\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}\,\frac{17\,\mathrm{K} \cdot 1{,}4774\,\mathrm{m}^2 \cdot 1\,\mathrm{s}}{0{,}012\,\mathrm{m}} = 1465\,\mathrm{J} \tag{15.35}$$

Esercizio 105 *Una stanza chiusa si trova ad una temperatura di* 24 °C*. Tutte le pareti sono perfettamente isolanti tranne una finestra di* 4 m² *costituita da uno strato di vetro* ($k = 1\,\mathrm{W/(m\,K)}$) *di spessore* 7 mm*, uno strato d'aria* ($k = 0{,}026\,\mathrm{W/(m\,K)}$) *di spessore* 3 mm *ed uno strato di plexiglas* ($k = 0{,}19\,\mathrm{W/(m\,K)}$) *di spessore* 4 mm*. La temperatura esterna è di* 4 °C*.*

Qual è la potenza termica dissipata attraverso la finestra?

In questo caso abbiamo un oggetto costituito da diversi strati di diverso materiale. Per trovare la risposta useremo la legge di Fourier specifica.

$$Q = \frac{(T_2 - T_1)A\Delta t}{\dfrac{L_1}{k_1} + \ldots + \dfrac{L_n}{k_n}} \tag{15.36}$$

La differenza di temperatura tra le due pareti è:

$$(T_2 - T_1) = 24\,°\mathrm{C} - 4\,°\mathrm{C} = 20\,°\mathrm{C} \equiv (t_2 - t_1) = 20\,\mathrm{K} \tag{15.37}$$

Sostituendo tutte le grandezze nella legge abbiamo che:

$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{17\,\mathrm{K} \cdot 4\,\mathrm{m}^2 \cdot 1\,\mathrm{s}}{\dfrac{0{,}007\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{W/(m\,K)}} + \dfrac{0{,}003\,\mathrm{m}}{0{,}026\,\mathrm{W/(m\,K)}} + \dfrac{0{,}004\,\mathrm{m}}{0{,}19\,\mathrm{W/(m\,K)}}} = 474\,\mathrm{W} \tag{15.38}$$

Esercizio 106 *Il cofano di auto è esposto al sole: è di forma rettangolare, largo* 160 cm *e alto* 95 cm. *Si trova alla temperatura di* 70 °C. *Sapendo che il coefficiente di emissione vale* 0,9 *trova l'energia irradiata dal cofano mantenendo quella temperatura per* 3 *ore.*

Possiamo applicare in questo caso la legge di Stefan-Boltzmann, che lega la potenza P irradiata da un corpo con la sua temperatura assoluta T, cioè espressa in Kelvin; S è la superficie radiante, ε il coefficiente di emissione e σ la costante di Stefan-Boltzmann.

$$P = \varepsilon\sigma S T^4 \tag{15.39}$$

In questo caso:

$$S = bh = 160\,\mathrm{cm} \cdot 95\,\mathrm{cm} = 1{,}60\,\mathrm{m} \cdot 0{,}95\,\mathrm{m} = 1{,}52\,\mathrm{m}^2 \tag{15.40}$$

$$T = 70\,^\circ\mathrm{C} = 343{,}15\,\mathrm{K} \tag{15.41}$$

$$P = 0{,}9 \cdot 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/\,m^2\,K^4} \cdot 1{,}52\,\mathrm{m}^2 \cdot (343{,}15\,\mathrm{K})^4 = 1196\,\mathrm{W} \tag{15.42}$$

Infine l'energia irradiata in 3 ore vale:

$$E = Pt = 1196\,\mathrm{W} \cdot 3\,\mathrm{h} = 1196\,\mathrm{W} \cdot 3 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 12{,}9 \times 10^6\,\mathrm{J} \tag{15.43}$$

15.5 Dilatazione termica

Esercizio 107 *Una parete di vetro spessa* 13 mm*, alta* 80 cm *e larga* 320 cm *è esposta a variazioni di temperatura di* 45 °C *tra inverno ed estate. Le dimensioni indicate si riferiscono a quelle che si hanno alla temperatura più bassa. Se la cornice della vetrina non può allargarsi di più di* 2 mm*, riuscirà la vetrina a non rompersi a causa della dilatazione termica?*

La vetrina per dilatazione termica si allarga in tutte e tre le sue dimensioni, ma in questo caso siamo interessati solo al suo allargamento e quindi ad una dilazione lineare.

La legge della dilazione lineare lega la lunghezza L di un oggetto che si trova alla temperatura t con la sua lunghezza L_0 ad una temperatura di riferimento t_0.

$$L = L_0(1 + \alpha(t - t_0)) \tag{15.44}$$

dove α è il coefficiente di dilazione lineare per il materiale considerato. Nel nostro caso $t - t_0$ è la variazione di temperatura tra inverno ed estate, L_0 è la larghezza della vetrina alla temperatura più bassa e L la larghezza alla temperatura più alta. Il valore di α lo ricaviamo dalle tabelle. Quindi:

$$L = 320\,\mathrm{cm}(1 + 0{,}8 \times 10^{-5}\,\frac{1}{^\circ\mathrm{C}} \cdot 45\,^\circ\mathrm{C}) = 3{,}20\,\mathrm{m}(1 + 3{,}60 \times 10^{-4}) = 3{,}2012\,\mathrm{m} \tag{15.45}$$

Per cui l'allungamento è:

$$\Delta(L) = L - L_0 = 3{,}2012\,\mathrm{m} - 3{,}2000\,\mathrm{m} = 0{,}0012\,\mathrm{m} = 1{,}2\,\mathrm{mm} \tag{15.46}$$

La vetrina non si romperà.

15.6 Gas perfetti e legge dei gas perfetti

Esercizio 108 *Un recipiente indeformabile contiene* 10 mol *di gas perfetto alla temperatura di* 200 °C*. Sapendo che* $pV = 23\,\mathrm{Pa\,m^3}$ *calcola quanti litri di gas contiene il recipiente.*

La legge dei gas perfetti è:

$$pV = nRT \tag{15.47}$$

dove p è la pressione, V il volume, n il numero di moli, $R = 8{,}314\,\mathrm{J/\,mol\,K}$ la costante dei gas perfetti e T la temperatura (assoluta) del gas. Nel nostro caso l'unica grandezza incognita è il volume.

Per cui mettiamo in evidenza il volume nella nostra relazione.

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{10\,\mathrm{mol} \cdot 8{,}314\,\mathrm{J/\,mol\,K}}{23\,\mathrm{Pa}} = 3{,}61\,\mathrm{m^3} \tag{15.48}$$

Esercizio 109 *Un recipiente contiene* 2,0 l *di ossigeno alla pressione* $p_1 = 23 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$*. Un secondo recipiente contiene* 8,0 l *di azoto alla pressione* $p_2 = 13 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ *e alla stessa temperatura. I due gas vengono miscelati assieme in un contenitore da* 4,0 l*.*

Trova la pressione della miscela nel terzo contenitore.

Se mischiamo due gas in un unico recipiente la pressione totale del gas equivale alla somma delle pressioni parziali che avrebbero i due gas se stessero nel recipiente separatamente. Affinché questa condizione si verifichi i due gas non devono interagire.

Quindi calcoliamo separatamente la pressione parziale del singolo gas nel nuovo recipiente. La trasformazione è a temperatura costante. Possiamo applicare la legge di Boyle.

$$P_\mathrm{i} V_\mathrm{i} = P_\mathrm{f} V_\mathrm{f} \tag{15.49}$$

Da cui:

$$P_\mathrm{f} = \frac{P_\mathrm{i} V_\mathrm{i}}{V_\mathrm{f}} \tag{15.50}$$

Per il primo gas:

$$P_\mathrm{1f} = \frac{23 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 2{,}0\,\mathrm{l}}{4{,}0\,\mathrm{l}} = 11{,}5 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{15.51}$$

Per il secondo gas:

$$P_\mathrm{2f} = \frac{13 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 8{,}0\,\mathrm{l}}{4{,}0\,\mathrm{l}} = 26 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{15.52}$$

Non abbiamo trasformato i volumi in metri cubi perché il loro rapporto è lo stesso quale che sia l'unità di misura.

Infine la pressione totale è:

$$P_\mathrm{tot} = P_\mathrm{1f} + P_\mathrm{2f} = 11{,}5 \times 10^5\,\mathrm{Pa} + 26 \times 10^5\,\mathrm{Pa} = 38 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{15.53}$$

Esercizio 110 *Una bombola di gas contiene* 50 *litri di* O_2 *alla pressione di* 50 atm *e alla temperatura di* 40 °C. *Determina la massa del gas nel S.I.*

La legge dei gas perfetti è $pV = nRT$, dove, in particolare, n è il numero di moli.
Il numero di moli è dato dal rapporto tra la massa m del gas e la sua massa molare MM.

$$n = \frac{m}{MM} \tag{15.54}$$

Quest'ultima è numericamente uguale alla massa molecolare, ma espressa in grammi invece che in unità atomiche. A sua volta la massa molecolare è la somma dei masse atomiche degli elementi della molecola. Se abbiamo ossigeno (massa atomica 16 u) biatomico, la sua massa molecolare è pari a 32 u circa così che $MM = 32$ g.

Quindi, conoscendo numero di moli e massa molare, possiamo determinare la massa del gas. Trasformiamo innanzitutto le grandezze date in unità del S.I.

$$\begin{aligned} V &= 50\,\mathrm{L} = 0{,}05\,\mathrm{m}^3 \\ p &= 50\,\mathrm{atm} = 5066250\,\mathrm{Pa} \\ t &= 40\,^\circ\mathrm{C} \equiv 313\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{15.55}$$

Ricaviamo il numero di moli dalla legge dei gas perfetti:

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{5066250\,\mathrm{Pa} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m}^3}{8{,}314\,\mathrm{J/\,mol\,K} \cdot 313\,\mathrm{K}} = 97{,}3\,\mathrm{mol} \tag{15.56}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{m}{MM} \\ m &= nMM = 97{,}3\,\mathrm{mol} \cdot 32\,\mathrm{g} = 3114\,\mathrm{g} = 3{,}114\,\mathrm{kg} \end{aligned} \tag{15.57}$$

16 Termodinamica

16.1 Primo principio della termodinamica

Esercizio 111 *Un sistema cede* 345 J *all'ambiente circostante compiendo un lavoro di* 200 J. *Quanto vale la variazione di energia interna ?*

Applichiamo al sistema il primo principio della termodinamica:

$$\Delta U = Q - L \tag{16.1}$$

dove Q è il calore scambiato dal sistema con l'ambiente (lo consideriamo negativo se il sistema lo cede all'ambiente) e L è il lavoro che il sistema compie (positivo se è compiuto sull'ambiente).

Secondo le convenzioni date possiamo scrivere:

$$\Delta U = (-345\,\mathrm{J}) - (200\,\mathrm{J}) = -545\,\mathrm{J} \tag{16.2}$$

Esercizio 112 *Un sistema termodinamico può passare da uno stato iniziale a uno finale compiendo due diverse trasformazioni termodinamiche. Nella prima assorbe* 510 cal *ed esegue un lavoro di* 1396 J, *mentre nella seconda il calore assorbito è pari a* 1510 cal.
Determina nel S.I. il lavoro eseguito nella seconda trasformazione.

Il sistema termodinamico dato compie trasformazioni diverse tra due medesimi stati. Ogni variabile di stato deve assumere lo stesso valore a parità di stato. L'energia interna del sistema, che è una variabile di stato, subirà quindi la stessa variazione nelle due trasformazioni. Allora applichiamo il primo principio della termodinamica al sistema:

$$\Delta U = Q - L \tag{16.3}$$

Eguagliamo la variazione di energia interna per le due trasformazioni e mettiamo in evidenza il lavoro eseguito nella seconda trasformazione.

$$Q_1 - L_1 = \Delta U = Q_2 - L_2 \tag{16.4}$$

$$L_2 = Q_2 - Q_1 + L_1 = 1510\,\mathrm{cal} - 510\,\mathrm{cal} + 1396\,\mathrm{J} = 6312\,\mathrm{J} - 2132\,\mathrm{J} + 1396\,\mathrm{J} = 5526\,\mathrm{J} \tag{16.5}$$

(Una caloria equivale a circa 4,186 J).

Esercizio 113 *Un sistema termodinamico esegue in* 12 min *una trasformazione ciclica durante la quale scambia* 30 cal *e* −17 cal *rispettivamente con due sorgenti a diversa temperatura.*

Calcola nel S.I. la potenza sviluppata nel ciclo.

Se la trasformazione è ciclica si ritorna nello stesso stato iniziale e tutte le variabili di stato riassumono lo stesso valore: la loro variazione, per ogni ciclo, è nulla.

Per quanto riguarda l'energia interna possiamo scrivere:

$$\Delta U = 0\,\mathrm{J} \tag{16.6}$$

Applichiamo il primo principio della termodinamica al ciclo:

$$\Delta U = Q_{\mathrm{tot}} - L_{\mathrm{tot}} \tag{16.7}$$

$$L_{\mathrm{tot}} = Q_1 + Q_2 = 30\,\mathrm{cal} + (-17\,\mathrm{cal}) = 13\,\mathrm{cal} = 54{,}3\,\mathrm{J} \tag{16.8}$$

La potenza del ciclo è infine:

$$P = \frac{L}{t} = \frac{54{,}3\,\mathrm{J}}{12 \cdot 60\,\mathrm{s}} = 0{,}075\,\mathrm{W} \tag{16.9}$$

16.2 Trasformazioni termodinamiche e gas perfetti

Esercizio 114 *In una trasformazione termodinamica a pressione costante* 3 mol *di gas perfetto monoatomico aumentano il loro volume da* 34 L *a* 78 L*. La pressione vale* 2 atm*.*

1. *Quanto vale la temperatura iniziale e finale del gas?*
2. *Quanto vale il calore scambiato, il lavoro compiuto?*
3. *Quanto vale la variazione di energia interna?*

Abbiamo un gas perfetto per cui possiamo applicare la legge dei gas perfetti per ricavare la temperatura dalle grandezze già a noi note. La legge dei gas perfetti è:

$$pV = nRT \tag{16.10}$$

dove p è la pressione, V il volume, n il numero di moli, $R = 8{,}314\,\mathrm{J/\,mol\,K}$ la costante dei gas e T la temperatura (assoluta). Nel nostro caso l'unica grandezza incognita è la temperatura.

$$2\,\mathrm{atm} = 2 \cdot 101300\,\mathrm{Pa} = 202600\,\mathrm{Pa} \tag{16.11}$$

$$34\,\mathrm{L} = 34 \cdot 0{,}001\,\mathrm{m^3} = 0{,}034\,\mathrm{m^3} \tag{16.12}$$

$$78\,\mathrm{L} = 78 \cdot 0{,}001\,\mathrm{m^3} = 0{,}078\,\mathrm{m^3} \tag{16.13}$$

1. Ricaviamo la temperatura:

$$T_i = \frac{pV_{\mathrm{i}}}{nR} = \frac{202600\,\mathrm{Pa} \cdot 0{,}034\,\mathrm{m^3}}{3\,\mathrm{mol} \cdot 8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)}} = 276\,\mathrm{K} \tag{16.14}$$

$$T_f = \frac{pV_{\mathrm{f}}}{nR} = \frac{202600\,\mathrm{Pa} \cdot 0{,}078\,\mathrm{m^3}}{3\,\mathrm{mol} \cdot 8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)}} = 634\,\mathrm{K} \tag{16.15}$$

2. La trasformazione considerata mantiene costante la pressione ovvero è *isobara*.
   Per questa trasformazione con i gas perfetti vale la seguente relazione:

$$Q = nC_\mathrm{p}(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i}) \tag{16.16}$$

   dove C_p è il calore specifico molare per una trasformazione isobara .
   Tuttavia abbiamo una relazione per determinare direttamente il solo calore specifico per una trasformazione isocora C_v (a volume costante):

$$C_\mathrm{v} = \frac{1+2k}{2}R \tag{16.17}$$

   dove $k = 1$ per un gas monoatomico, $k = 2$ per un gas biatomico e così via.
   Ma la relazione di Mayer stabilisce un legame con il nostro C_p:

$$C_\mathrm{p} = C_\mathrm{v} + R \tag{16.18}$$

   Quindi nel nostro caso, poiché abbiamo un gas monoatomico, possiamo scrivere:

$$C_\mathrm{p} = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R \tag{16.19}$$

   Infine il *calore scambiato* è:

$$Q = 3\,\mathrm{mol} \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot 8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)}\right) \cdot (634\,\mathrm{K} - 276\,\mathrm{K}) = 22323\,\mathrm{J} \tag{16.20}$$

   Per quanto riguarda il *lavoro* vale la seguente relazione:

$$L = p(V_\mathrm{f} - V_\mathrm{i}) = 202600\,\mathrm{Pa} \cdot (0{,}078\,\mathrm{m}^3 - 0{,}034\,\mathrm{m}^3) = 8914\,\mathrm{J} \tag{16.21}$$

3. Per trovare la variazione di energia interna del sistema possiamo applicare il primo principio della termodinamica o una apposita relazione valida per i gas perfetti: procediamo in entrambi i modi verificando che il risultato è lo stesso.
   Applichiamo il primo principio della termodinamica, attribuendo al lavoro e al calore scambiati il segno precedentemente ottenuto:

$$\Delta U = (22323\,\mathrm{J}) - (8914\,\mathrm{J}) = 13409\,\mathrm{J} \tag{16.22}$$

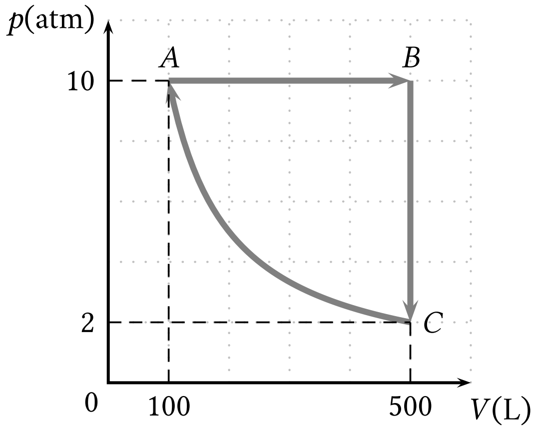
   Oppure usiamo l'opportuna relazione per una trasformazione isobara di un gas perfetto (l'uso del calore specifico molare a volume costante non è un errore):

$$\Delta U = nC_\mathrm{v}(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i}) = 3\,\mathrm{mol} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot 8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)}\right) \cdot (634\,\mathrm{K} - 276\,\mathrm{K}) = 13394\,\mathrm{J} \tag{16.23}$$

   I due valori ottenuti, se pur estremamente simili, non sono numericamente identici a causa degli arrotondamenti introdotti fin dal calcolo delle due temperature.

Esercizio 115 *Nella trasformazione termodinamica rappresenta in figura 32 moli di gas perfetto triatomico subiscono tre trasformazioni successive per compiere il ciclo ABC. La trasformazione CA è una isoterma .*

1. *Calcola la temperatura negli stati di equilibrio A, B e C.*
2. *Calcola il lavoro compiuto nelle tre trasformazioni e il lavoro totale compiuto nel ciclo.*
3. *Calcola il calore scambiato dal gas nelle tre trasformazioni e il calore totale scambiato con l'ambiente nel ciclo.*
4. *Calcola la variazione di energia interna del gas nelle tre trasformazioni e complessivamente nel ciclo, verificando che il primo principio della termodinamica sia verificato.*
5. *La trasformazione termodinamica rappresentata è quella di un motore o di una pompa di calore ? Spiega in due parole.*



1. Abbiamo un gas perfetto di cui conosciamo, nei tre stati illustrati, quasi tutte le variabili di stato, tranne la temperatura che possiamo quindi ricavare con la legge dei gas perfetti.

$$pV = nRT \tag{16.24}$$

   Esprimiamo innanzi tutto le grandezze date nel sistema internazionale.

$$\begin{aligned} p_A &= p_B = 10\,\text{atm} = 10 \cdot 101300\,\text{Pa} = 1013000\,\text{Pa} \\ p_C &= 2\,\text{atm} = 2 \cdot 101300\,\text{Pa} = 202600\,\text{Pa} \\ V_A &= 100\,\text{L} = 100 \cdot 0{,}001\,\text{m}^3 = 0{,}100\,\text{m}^3 \\ V_B &= V_C = 500\,\text{L} = 500 \cdot 0{,}001\,\text{m}^3 = 0{,}500\,\text{m}^3 \end{aligned} \tag{16.25}$$

$$T_A = (T_C) = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{1013000\,\text{Pa} \cdot 0{,}100\,\text{m}^3}{32\,\text{mol} \cdot 8{,}314\,\text{J/ mol K}} = 381\,\text{K} \tag{16.26}$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{1013000\,\text{Pa} \cdot 0{,}500\,\text{m}^3}{32\,\text{mol} \cdot 8{,}314\,\text{J/ mol K}} = 1904\,\text{K} \tag{16.27}$$

2. Le trasformazioni rappresentate nella figura sono tre: a A a B abbiamo una isobara; da B a C una isocora e da C ad A una isoterma.

   Lavoro
   Il lavoro compiuto nella trasformazione AB è:

$$L_{AB} = p(V_f - V_i) = p_A(V_B - V_A) = 1013000\,\text{Pa} \cdot (0{,}500\,\text{m}^3 - 0{,}100\,\text{m}^3) = 405200\,\text{J} \tag{16.28}$$

Nelle trasformazioni a volume costante con un gas perfetto il lavoro compiuto è nullo:

$$L_{BC} = 0\,\mathrm{J} \tag{16.29}$$

Per la trasformazione CA possiamo scrivere:

$$\begin{gathered} L_{CA} = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \\ nRT_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = 32\,\mathrm{mol} \cdot 8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \cdot 382\,\mathrm{K} \cdot \ln\left(\frac{0{,}100\,\mathrm{m}^3}{0{,}500\,\mathrm{m}^3}\right) = -163140\,\mathrm{J} \end{gathered} \tag{16.30}$$

Il lavoro compiuto nel ciclo è:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = 405200\,\mathrm{J} + 0\,\mathrm{J} + (-163140\,\mathrm{J}) = 242060\,\mathrm{J} \tag{16.31}$$

3. ***Calore***
   Il calore scambiato nella trasformazione AB è:

$$Q_{AB} = nC_p(T_f - T_i) = nC_p(T_B - T_A) \tag{16.32}$$

dove, per un gas biatomico $k = 2$ e:

$$C_p = C_v + R = \frac{1+2k}{2}R + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R \tag{16.33}$$

$$Q_{AB} = 32\,\mathrm{mol} \cdot \frac{7}{2} \cdot 8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \cdot (1904\,\mathrm{K} - 382\,\mathrm{K}) = 1418168\,\mathrm{J} \tag{16.34}$$

Analogamente nella trasformazione BC:

$$Q_{BC} = nC_v(T_f - T_i) = nC_v(T_C - T_B) \tag{16.35}$$

$$Q_{BC} = 32\,\mathrm{mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \cdot (381\,\mathrm{K} - 1904\,\mathrm{K}) = -1012978\,\mathrm{J} \tag{16.36}$$

Infine nella trasformazione CA:

$$Q_{CA} = L_{CA} = -163140\,\mathrm{J} \tag{16.37}$$

Il calore totale scambiato dal sistema nel ciclo è:

$$Q_{tot} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 1418168\,\mathrm{J} + (-1012978\,\mathrm{J}) + (-163140\,\mathrm{J}) = 242050\,\mathrm{J} \tag{16.38}$$

4. ***Energia interna***
   La variazione dell'energia interna in un ciclo è zero perché l'energia interna è una variabile di stato.
   Se applichiamo il primo principio della termodinamica:

$$\Delta U = Q - L = 242050\,\mathrm{J} - 242060\,\mathrm{J} = -10\,\mathrm{J} \tag{16.39}$$

Il valore trovato è prossimo allo zero (è circa un decimillesimo rispetto al calore scambiato o al lavoro compiuto): lo scostamento dallo zero è dovuto alle approssimazioni introdotte nei calcoli.
Possiamo considerare il primo principio verificato.

Calcoliamo la variazione di energia interna nelle singole trasformazioni.

$$\Delta U_{AB} = nC_v(T_f - T_i) =$$
$$nC_v(T_B - T_A) = 32\,\text{mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}314\,\frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (1904\,\text{K} - 381\,\text{K}) = 1012978\,\text{J} \tag{16.40}$$

La trasformazione è isobara, ma nelle relazione si usa C_v.

$$\Delta U_{BC} = nC_v(T_f - T_i) =$$
$$nC_v(T_C - T_B) = 32\,\text{mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}314\,\frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (381\,\text{K} - 1904\,\text{K}) = -1012978\,\text{J} \tag{16.41}$$

Infine (dal momento che l'energia interna in un gas perfetto varia solo con la temperatura) abbiamo:

$$\Delta U_{CA} = 0\,\text{J} \tag{16.42}$$

La variazione totale è:

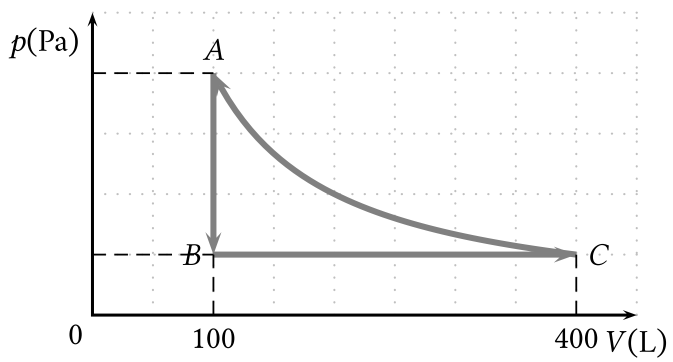
$$\Delta U_{tot} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 1012313\,\text{J} + (-1012313\,\text{J}) + (0\,\text{J}) = 0\,\text{J} \tag{16.43}$$

5. ***Motore o pompa di calore*** Il ciclo considerato complessivamente assorbe calore dall'ambiente (il calore totale è positivo) e compie lavoro sull'ambiente (il lavoro totale è positivo): quindi è il ciclo di un motore o macchina termica. Ciò poteva anche essere evidenziato dal fatto che le trasformazioni considerate compiono un percorso in senso orario nel piano *pV*.

Esercizio 116 *Nella trasformazione termodinamica rappresenta in figura* 12 *moli di gas perfetto monoatomico subiscono tre trasformazioni successive per compiere il ciclo ABC.*

La trasformazione CA è una isoterma. La temperatura nel punto A è 1200 K *e in B* 300 K*.*

1. *Calcola la pressione negli stati di equilibrio A, B e C.*
2. *Calcola il lavoro compiuto nelle tre trasformazioni e il lavoro totale compiuto nel ciclo.*
3. *Calcola il calore scambiato dal gas nelle tre trasformazioni e il calore totale scambiato con l'ambiente nel ciclo.*
4. *Calcola la variazione di energia interna del gas nelle tre trasformazioni e complessivamente nel ciclo, verificando che il primo principio della termodinamica sia verificato.*
5. *La trasformazione termodinamica rappresentata è quella di un motore o di una pompa di calore? Spiega in due parole.*



1. Abbiamo un gas perfetto di cui conosciamo, nei tre stati illustrati, quasi tutte le variabili di stato, tranne la pressione che possiamo quindi ricavare con la legge dei gas perfetti.

$$pV = nRT \tag{16.44}$$

Esprimiamo innanzi tutto le grandezze date nel sistema internazionale.

$$\begin{aligned} V_A = V_B = 100\,\mathrm{L} = 100 \cdot 0{,}001\,\mathrm{m}^3 = 0{,}100\,\mathrm{m}^3 \\ V_C = 400\,\mathrm{L} = 400 \cdot 0{,}001\,\mathrm{m}^3 = 0{,}400\,\mathrm{m}^3 \end{aligned} \tag{16.45}$$

$$p_A = \frac{nRT_A}{V_A} = \frac{12\,\mathrm{mol} \cdot 8{,}314\,\mathrm{J/\,mol\,K} \cdot 1200\,\mathrm{K}}{0{,}100\,\mathrm{m}^3} = 1197216\,\mathrm{Pa} \tag{16.46}$$

$$p_B = (p_C) = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{12\,\mathrm{mol} \cdot 8{,}314\,\mathrm{J/\,mol\,K} \cdot 300\,\mathrm{K}}{0{,}100\,\mathrm{m}^3}) = 299304\,\mathrm{Pa} \tag{16.47}$$

Le trasformazioni rappresentate nella figura sono tre: a A a B abbiamo una isocora; da B a C una isobara e da C ad A una isoterma.

2. ***Lavoro***
Nelle trasformazioni a volume costante con un gas perfetto il lavoro compiuto è nullo:

$$L_{AB} = 0\,\mathrm{J} \tag{16.48}$$

Il lavoro compiuto nella trasformazione BC è:

$$L_{BC} = p(V_f - V_i) = p_B(V_C - V_B) = 299304\,\mathrm{Pa} \cdot (0{,}400\,\mathrm{m}^3 - 0{,}100\,\mathrm{m}^3 = 89791\,\mathrm{J} \tag{16.49}$$

Per la trasformazione CA possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} L_{CA} = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \\ nRT_C \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = 12\,\mathrm{mol} \cdot 8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \cdot 1200\,\mathrm{K} \cdot \ln\left(\frac{0{,}100\,\mathrm{m}^3}{0{,}400\,\mathrm{m}^3}\right) = -165969\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{16.50}$$

Il lavoro compiuto nel ciclo è:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = 0\,\mathrm{J} + 89791\,\mathrm{J} + (-165969\,\mathrm{J}) = -76178\,\mathrm{J} \tag{16.51}$$

3. ***Calore***
Il calore scambiato nella trasformazione AB è:

$$Q_{AB} = nC_v(T_f - T_i) = nC_v(T_B - T_A) \tag{16.52}$$

dove, per un gas monoatomico $k = 1$:

$$C_v = \frac{1 + 2k}{2} R = \frac{3}{2} R \tag{16.53}$$

$$C_p = C_v + R = \frac{3}{2} R + R = \frac{5}{2} R \tag{16.54}$$

$$Q_{AB} = 12\,\mathrm{mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \cdot (300\,\mathrm{K} - 1200\,\mathrm{K}) = -134687\,\mathrm{J} \tag{16.55}$$

Analogamente nella trasformazione BC:

$$Q_{BC} = nC_p(T_f - T_i) = nC_p(T_C - T_B) \tag{16.56}$$

$$Q_{BC} = 12\,\text{mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}314\,\frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (1200\,\text{K} - 300\,\text{K}) = 224478\,\text{J} \tag{16.57}$$

Infine nella trasformazione CA:

$$Q_{CA} = L_{CA} = -165969\,\text{J} \tag{16.58}$$

Il calore totale scambiato dal sistema nel ciclo è:

$$Q_{tot} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = (-134687\,\text{J}) + 224478\,\text{J} + (-165969\,\text{J}) = -76178\,\text{J} \tag{16.59}$$

4. ***Energia interna***
La variazione dell'energia interna in un ciclo è zero perché l'energia interna è una variabile di stato.
Se applichiamo il primo principio della termodinamica:

$$\Delta U = Q - L = -76178\,\text{J} - (-76178\,\text{J}) = 0\,\text{J} \tag{16.60}$$

Il primo principio è verificato.
Calcoliamo la variazione di energia interna nelle singole trasformazioni.

$$\begin{gathered}\Delta U_{AB} = nC_v(T_f - T_i) = \\ nC_v(T_B - T_A) = 12\,\text{mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8{,}314\,\frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (300\,\text{K} - 1200\,\text{K}) = -134687\,\text{J}\end{gathered} \tag{16.61}$$

$$\begin{gathered}\Delta U_{BC} = nC_v(T_f - T_i) = \\ nC_v(T_C - T_B) = 12\,\text{mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8{,}314\,\frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (1200\,\text{K} - 300\,\text{K}) = 134687\,\text{J}\end{gathered} \tag{16.62}$$

Infine (dal momento che l'energia interna in un gas perfetto varia solo con la temperatura) abbiamo:

$$\Delta U_{CA} = 0\,\text{J} \tag{16.63}$$

La variazione totale è:

$$\Delta U_{tot} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = (-134687\,\text{J}) + 134687\,\text{J} + (0\,\text{J}) = 0\,\text{J} \tag{16.64}$$

5. ***Motore o pompa di calore***
Il ciclo considerato complessivamente cede calore all'ambiente (il calore totale è negativo) e l'ambiente compie lavoro sul sistema (il lavoro totale è negativo): quindi è il ciclo di una pompa di calore .
Ciò poteva anche essere evidenziato dal fatto che le trasformazioni considerate compiono un percorso in senso antiorario nel piano pV.

17 Onde ed oscillazioni

17.1 Moto armonico

Esercizio 117 *La legge del moto di un oscillatore armonico è* $y(t) = (35\,\text{cm}) \sin\left(\frac{4}{3\,\text{s}}t + \frac{2\pi}{3}\right)$. *Trova:*

1. *l'ampiezza massima, la pulsazione, la frequenza, il periodo;*
2. *l'ampiezza all'istante* $t = 7$ s*;*
3. *il primo istante positivo in cui abbiamo la massima oscillazione;*
4. *la velocità e l'accelerazione dell'oscillazione.*

Il moto è descritto dalla funzione seno. Sarebbe stato altrettanto possibile usare la funzione coseno: il moto sarebbe stato ancora armonico, ma con uno sfasamento iniziale di $\frac{\pi}{2}$ rispetto a quello dato.

1. L'*ampiezza massima* è data dal termine che moltiplica la funzione trigonometrica:
$$A = 35\,\text{cm} \tag{17.1}$$
La *pulsazione* o frequenza angolare ω è il coefficiente del tempo t.
$$\omega = \frac{4}{3\,\text{s}} \tag{17.2}$$
La *frequenza* f si può ricavare dalla pulsazione ω.
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \frac{4}{3\,\text{s}}\,; \qquad f = \frac{4}{2\pi \cdot 3\,\text{s}} = \frac{2}{3\pi}\text{Hz} \tag{17.3}$$
Il *periodo* T è il reciproco della frequenza f.
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{2}{3\pi}\text{Hz}} = \frac{3\pi}{2}\text{s} \tag{17.4}$$
2. L'ampiezza ad un istante dato si ricava sostituendo il tempo nella legge del moto (facciamo attenzione ad impostare la calcolatrice per i calcoli in radianti):
$$y(7\,\text{s}) = (35\,\text{cm}) \sin\left(\frac{4}{3\,\text{s}}(7\,\text{s}) + \frac{2\pi}{3}\right) = (0{,}35\,\text{m}) \sin\left(\frac{28}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \simeq -0{,}32\,\text{m} \tag{17.5}$$
3. Per rispondere alla domanda dobbiamo trovare le soluzioni rispetto al tempo della legge del moto quando l'ampiezza y è quella massima:
$$\left.\begin{aligned} y_{\text{max}} &= (35\,\text{cm}) \\ y(t) &= (35\,\text{cm}) \sin\left(\frac{4}{3\,\text{s}}t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad y_{\text{max}} = y(t) \tag{17.6}$$

$$\begin{aligned}(35\,\mathrm{cm}) &= (35\,\mathrm{cm})\sin\left(\frac{4}{3\,\mathrm{s}}t + \frac{2\pi}{3}\right)\\ 1 &= \sin\left(\frac{4}{3\,\mathrm{s}}t + \frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned} \tag{17.7}$$

Il seno vale uno quando il suo argomento vale $\frac{\pi}{2}$ a meno di multipli interi dell'angolo giro.

$$\begin{aligned}\frac{4}{3\,\mathrm{s}}t + \frac{2\pi}{3} &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi\\ \frac{4}{3\,\mathrm{s}}t &= -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\\ t &= \left(\frac{3\,\mathrm{s}}{4}\right)\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{3k\pi}{2}\right)\mathrm{s}\end{aligned} \tag{17.8}$$

La soluzione con $k = 0$ è negativa e non va bene; quella con $k = 1$ è la prima positiva e vale:

$$t = \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right)\mathrm{s} = \frac{11\pi}{8}\mathrm{s} \tag{17.9}$$

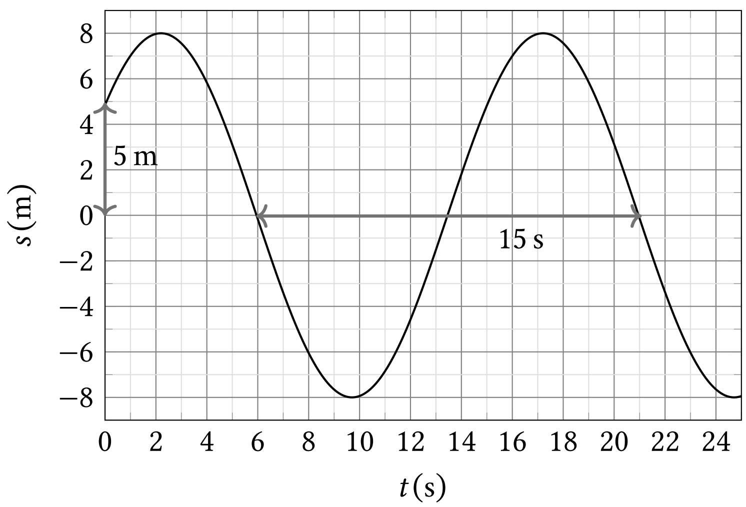
4. Se il moto armonico è descritto da una funzione del tipo $y = A\sin(\omega t + \phi)$ allora la velocità e l'accelerazione associate al moto sono date da:

$$\begin{aligned}v &= A\omega\cos(\omega t + \phi)\\ a &= -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)\end{aligned} \tag{17.10}$$

Nel nostro caso le due relazioni diventano:

$$\begin{aligned}v &= (35\,\mathrm{cm})\left(\frac{2}{3\pi}\mathrm{Hz}\right)\cos(\omega t + \phi) = (0{,}074\,\mathrm{m/s})\cos(\omega t + \phi)\\ a &= -(35\,\mathrm{cm})\left(\frac{2}{3\pi}\mathrm{Hz}\right)^2\sin(\omega t + \phi) = -(0{,}016\,\mathrm{m/s^2})\sin(\omega t + \phi)\end{aligned} \tag{17.11}$$

Esercizio 118 *Trova la legge del moto di un oscillatore armonico il cui andamento nel tempo è descritto dal seguente grafico.*



Come legge del moto armonico usiamo la relazione $y = A\sin(\omega t + \phi)$.

L'ampiezza A dell'oscillazione è il massimo valore dell'oscillazione rispetto alla posizione di equilibrio:

$$A = 8\,\text{m} \tag{17.12}$$

La pulsazione ω è legata al periodo del moto. Il periodo è il tempo minimo affinché la perturbazione si ripeta uguale a se stessa.

$$T = 15\,\text{s} \tag{17.13}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{15\,\text{s}} = \frac{2\pi}{15}\text{Hz} \tag{17.14}$$

Lo sfasamento iniziale ϕ lo troviamo osservando nel disegno l'ampiezza dell'oscillazione al tempo $t = 0\,\text{s}$.

$$\left.\begin{aligned} y(0\,\text{s}) &= 5\,\text{m} \\ y(0\,\text{s}) &= (8\,\text{m})\sin(\omega(0\,\text{s}) + \phi) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 5\,\text{m} = (8\,\text{m})\sin(\phi) \tag{17.15}$$

$$\begin{aligned} \sin(\phi) &= \frac{5\,\text{m}}{8\,\text{m}} = \frac{5}{8} \\ \phi &= \arcsin\left(\frac{5}{8}\right) \simeq 0{,}68 \end{aligned} \tag{17.16}$$

Infine:

$$y = (8\,\text{m})\sin\left(\frac{2\pi}{15\,\text{s}}t + 0{,}68\right) \tag{17.17}$$

Esercizio 119 *Un grave di massa $m = 35\,\text{g}$ è appeso ad un molla di costante elastica $k = 55\,\text{N/m}$.*
Trova la frequenza di oscillazione del grave se viene spostato dalla sua posizione di equilibrio e lasciato oscillare liberamente.

Una molla che segue la legge di Hooke può comportarsi come un oscillatore armonico.
Se scriviamo la legge e mettiamo in evidenza l'accelerazione a cui è sottoposto il grave:

$$\begin{aligned} F &= -kx \\ ma &= -kx \\ a &= -\frac{k}{m}x \end{aligned} \tag{17.18}$$

troviamo una relazione analoga a quella caratteristica degli oscillatori armonici:

$$a = -\omega^2 x \tag{17.19}$$

Eguagliamo le due relazioni e mettiamo in evidenza la frequenza associata alla pulsazione.

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ 2\pi f &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{55\,\text{N/m}}{0{,}035\,\text{kg}}} = 6{,}3\,\text{Hz} \end{aligned} \tag{17.20}$$

17.2 Pendolo semplice

Esercizio 120 *Un corpo pressoché puntiforme, di massa* $m = 120$ g*, è appeso ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lungo* $l = 1{,}34$ m*. Il corpo è posto in oscillazione facendolo partire con il filo teso e tale da formare un angolo di* 8° *rispetto alla verticale.*

1. *Trova il periodo di oscillazione del corpo.*
2. *Trova la legge del moto considerando* $t = 0$ s *come momento iniziale del moto.*
3. *Trova la velocità massima raggiunta dal corpo nel suo movimento.*
4. *Trova la tensione del filo nel punto più alto della traiettoria.*
5. *Trova la tensione del filo nel punto più basso della traiettoria.*

Il corpo descritto nel testo può essere idealizzato come un pendolo semplice. L'ampiezza massima delle oscillazioni è tale per cui il modello descrive quanto avviene con un errore massimo compatibile con l'errore massimo associabile alle misure date, ovvero circa l'un per cento.

1. Il periodo di oscillazione di un pendolo semplice è:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{17.21}$$

dove g è l'accelerazione di gravità. Per cui possiamo scrivere:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}34\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}} = 2{,}32\ \mathrm{s} \tag{17.22}$$

2. La legge oraria del pendolo semplice ha la forma del moto armonico:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t + \delta) \tag{17.23}$$

dove abbiamo l'angolo ϕ sotteso dal pendolo in funzione del tempo t; ϕ_0 è l'angolo massimo descritto dal moto, ω la frequenza angolare, δ il valore dell'argomento del seno all'istante $t = 0$ s. In questo caso:

$$\phi_0 = 8° \tag{17.24}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}34\ \mathrm{m}}} = 2{,}71\ \mathrm{s^{-1}} \tag{17.25}$$

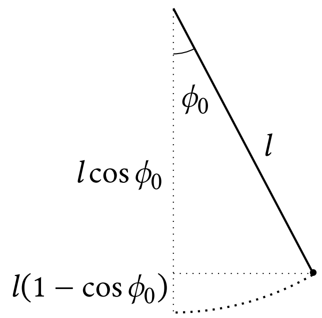
Per determinare δ consideriamo che nell'istante iniziale l'ampiezza è quella massima.

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi_0 \sin(\omega t_0 + \delta) \\ 1 &= \sin(\delta) \\ \delta &= \frac{\pi}{2}\ (+2k\pi) \end{aligned} \tag{17.26}$$

La legge del moto è quindi:

$$\phi(t) = 8° \sin\left(2{,}71\ \mathrm{s^{-1}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{17.27}$$

3. Per trovare la velocità massima dovremmo avere già la legge del moto in forma lineare e non angolare, come nel nostro caso. Se, in un eccesso di entusiasmo, facessimo la derivata della legge prima ottenuta otterremo solo la velocità angolare e non quella lineare, come invece richiesto dal testo. Procediamo allora con considerazioni energetiche.

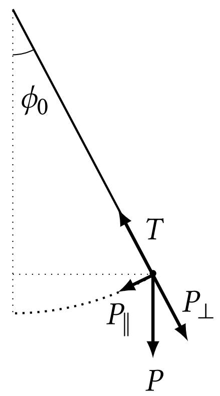


Per poter determinare la velocità nel punto più basso della traiettoria, e quindi quella massima, applichiamo la conservazione dell'energia al moto del pendolo. Dalla figura possiamo osservare che nel punto di massima altezza il corpo si trova ad una altezza uguale a $l(1-\cos\phi_0)$ rispetto al punto più in basso e l'energia è solo potenziale gravitazionale. Nel punto di minima altezza l'energia è solo cinetica. Per cui possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} U_p &= E_c \\ mgl(1-\cos\phi_0) &= \frac{1}{2}mv^2 \\ 2gl(1-\cos\phi_0) &= v^2 \\ v &= \sqrt{2gl(1-\cos\phi_0)} \end{aligned} \tag{17.28}$$

$$v_{\max} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 1{,}34\,\mathrm{m}\cdot(1-\cos 8^\circ)} = 0{,}51\,\mathrm{m/s} \tag{17.29}$$

4. Riprendiamo la figura precedente segnando le forze in gioco quando il corpo si trova nel punto più alto della traiettoria.



In quel punto il corpo si ferma, la velocità è nulla, l'equilibrio (sempre presente) delle forze ortogonali alla traiettoria ci porta ad affermare che la tensione del filo e il componente della forza peso perpendicolare sono uguali e contrari.

$$\vec{T} + \vec{P}_\perp = 0 \tag{17.30}$$

$$T = mg\cos\phi_0 = 0{,}120\,\mathrm{Kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\cos 8^\circ = 1{,}17\,\mathrm{N} \tag{17.31}$$

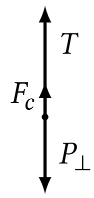
5. Quando invece il corpo si trova ad un'altezza inferiore abbiamo anche la forza centripeta che lo mantiene su una traiettoria circolare.

$$\vec{T} + \vec{P}_\perp = \vec{F}_c \tag{17.32}$$

La tensione e la forza centripeta vanno verso il punto di sospensione; il componente della forza peso verso il basso, nella stessa direzione.

$$T = mg\cos\phi + m\frac{v^2}{l} \tag{17.33}$$

Nell'espressione della forza centripeta a denominatore compare il raggio della traiettoria: in questo caso è la lunghezza l del filo.
Disegniamo le tre forze quando il corpo è nel punto più basso.



In tale configurazione il valore della tensione raggiunge il suo massimo. Infatti l'angolo diventa nullo e la forza centripeta, che dipende dal quadrato della velocità, a sua volta raggiunge il massimo.
Per cui la tensione nel punto più basso diventa:

$$T = mg + m\frac{(v_{\max})^2}{l} = 0{,}120\,\mathrm{Kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} + 0{,}120\,\mathrm{Kg}\cdot\frac{(0{,}51\,\mathrm{m/s})^2}{1{,}34\,\mathrm{m}} = 1{,}20\,\mathrm{N} \tag{17.34}$$

17.3 Equazione d'onda

Esercizio 121 *Onde meccaniche si propagano in un mezzo con frequenza* 16 Hz *e lunghezza d'onda* $\lambda = 2400\ \mathrm{cm}$. *Calcola la velocità di propagazione.*

La relazione fondamentale che riguarda tutte le onde è quella che lega la frequenza f e lunghezza d'onda λ alla velocità di propagazione dell'onda v per quella frequenza: $\lambda f = v$.

Esprimiamo tutte le grandezze nel S.I. e sostituendo nella formula otteniamo che:

$$\lambda f = 2400\ \mathrm{cm} \cdot 16\ \mathrm{Hz} = 24\ \mathrm{m} \cdot 16\ \mathrm{Hz} = 24\ \mathrm{m} \cdot 16\ \mathrm{s}^{-1} = 384\ \mathrm{m/s} \tag{17.35}$$

Esercizio 122 *Abbiamo un'onda armonica descritta dalla funzione* $y = (5\ \mathrm{m}) \sin\left(\frac{3}{\mathrm{m}} x - \frac{8}{\mathrm{s}} t\right)$.

Di quest'onda trova:

1. *l'ampiezza massima, il numero d'onda, la lunghezza d'onda, la pulsazione, la frequenza, il periodo;*
2. *la velocità di propagazione, l'ampiezza all'istante* $t = 4\ \mathrm{s}$ *nell'origine;*
3. *un instante in cui abbiamo la massima oscillazione per* $x = \pi\ \mathrm{m}$*;*

La legge data rappresenta un'onda unidimensionale armonica.

La stessa legge verrebbe presentata in molti testi nella forma $y = 5 \sin(3x - 8t)$, senza unità di misura. Questa forma, sebbene più leggibile, non è corretta. La perturbazione y deve riferirsi ad una qualche grandezza e l'argomento delle funzioni trascendenti, come in questo caso il seno, deve avere un argomento sempre adimensionale: per questo lo spazio x deve essere diviso per un metro e il tempo t per un secondo.

L'onda è descritta dalla funzione seno. Avremmo avuto un'onda armonica anche con la funzione coseno: la forma dell'onda sarebbe stata la stessa, ma con uno sfasamento iniziale di $\frac{\pi}{2}$.

1. L'*ampiezza massima* è data dal termine che moltiplica la funzione trigonometrica: 5 m.

   Il *numero d'onda* k è il coefficiente della posizione x.

   $$k = \frac{3}{\mathrm{m}} \tag{17.36}$$

   La *lunghezza d'onda* λ si può ricavare dal numero d'onda k.

   $$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{3}{\mathrm{m}}\ ; \qquad \lambda = \frac{2\pi}{3}\mathrm{m} \tag{17.37}$$

   La *pulsazione* o frequenza angolare ω è il coefficiente del tempo t.

   $$\omega = \frac{8}{\mathrm{s}} \tag{17.38}$$

   La *frequenza* f si può ricavare dalla pulsazione ω.

   $$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \frac{8}{\mathrm{s}}\ ; \qquad f = \frac{8}{2\pi \mathrm{s}} = \frac{4}{\pi}\mathrm{Hz} \tag{17.39}$$

   Il *periodo* T è il reciproco della frequenza f.

   $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{4}{\pi}\mathrm{Hz}} = \frac{\pi}{4}\mathrm{s} \tag{17.40}$$

2. La *velocità* v è legata alla frequenza e alla lunghezza d'onda:

$$v = \lambda f = \frac{2\pi}{3}\mathrm{m} \cdot \frac{4}{\pi}\mathrm{Hz} = \frac{2\pi}{3}\frac{4}{\pi}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{8}{3}\mathrm{m/s} \tag{17.41}$$

   L'*ampiezza* ad un istante e posizione dati la troviamo sostituendoli nell'equazione d'onda (facciamo attenzione ad impostare la calcolatrice per i calcoli in radianti):

$$y = (5\,\mathrm{m})\sin\left(\frac{3}{\mathrm{m}}0\,\mathrm{m} - \frac{8}{\mathrm{s}}4\,\mathrm{s}\right) = (5\,\mathrm{m})\sin(-32) \simeq -2{,}76\,\mathrm{m} \tag{17.42}$$

3. Per rispondere alla domanda dobbiamo trovare le soluzioni rispetto al tempo della seguente equazione:

$$\left.\begin{aligned} y_{\max} &= 5\,\mathrm{m} \\ y(\pi\,\mathrm{m}, t) &= (5\,\mathrm{m})\sin\left(\frac{3}{\mathrm{m}}\pi\,\mathrm{m} - \frac{8}{\mathrm{s}}t\right) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 5\,\mathrm{m} = (5\,\mathrm{m})\sin\left(3\pi - \frac{8}{\mathrm{s}}t\right) \tag{17.43}$$

   La massima oscillazione y si ha quindi quando il seno vale uno.

$$1 = \sin\left(3\pi - \frac{8}{\mathrm{s}}t\right) \tag{17.44}$$

   Il seno vale uno quando l'argomento vale $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} 3\pi - \frac{8}{\mathrm{s}}t &= \frac{\pi}{2} \\ \frac{8}{\mathrm{s}}t &= 3\pi - \frac{\pi}{2} \\ t &= \left(\frac{\mathrm{s}}{8}\right)\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{16}\mathrm{s} \end{aligned} \tag{17.45}$$

   Se avessimo voluto conoscere tutti gli infiniti istanti possibili avremmo dovuto imporre che l'argomento del seno fosse uguale a $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Esercizio 123 *Abbiamo un'onda armonica descritta dalla funzione* $y = (13\,\mathrm{m})\cos\left(\frac{7}{\mathrm{m}}x - \frac{5}{\mathrm{s}}t\right)$.

Di quest'onda trova la velocità e l'accelerazione dell'oscillazione in ogni punto al variare del tempo.

Oltre alla velocità di propagazione dell'onda abbiamo anche la velocità con cui varia l'oscillazione in ogni punto. Se conosciamo le derivate possiamo ricavarla immediatamente senza ricordarla a memoria. Facciamo quindi la derivata della funzione rispetto al tempo: una volta per ricavare la velocità e due volte per l'accelerazione. La derivata è parziale perché la funzione dipende sia dal tempo che dallo spazio. Un segno negativo è della derivata del coseno e l'altro è della derivata dell'argomento.

$$v(t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -(13\,\mathrm{m})\left(-\frac{5}{\mathrm{s}}\right)\sin\left(\frac{7}{\mathrm{m}}x - \frac{5}{\mathrm{s}}t\right) = (65\,\mathrm{m/s})\sin\left(\frac{7}{\mathrm{m}}x - \frac{5}{\mathrm{s}}t\right) \tag{17.46}$$

$$a(t) = \frac{\partial v}{\partial t} = (65\,\mathrm{m/s})\left(-\frac{5}{\mathrm{s}}\right)\cos\left(\frac{7}{\mathrm{m}}x - \frac{5}{\mathrm{s}}t\right) = (-325\,\mathrm{m/s^2})\cos\left(\frac{7}{\mathrm{m}}x - \frac{5}{\mathrm{s}}t\right) \tag{17.47}$$

Esercizio 124 *Scrivi l'equazione di un'onda armonica progressiva con periodo* 3 s *e ampiezza* 1,5 cm *che viaggia alla velocità di* 34 cm/s. *L'ampiezza all'istante* $t = 2$ s *nel punto iniziale è quella massima.*

Un'onda armonica progressiva è un'onda con profilo sinusoidale i cui fronti d'onda si propagano nel verso positivo dell'asse x all'aumentare del tempo.

Possiamo rappresentare questo tipo di onde in due forme:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\sin(kx \pm \omega t + \phi) \\ y(x,t) &= A\cos(kx \pm \omega t + \phi) \end{aligned} \tag{17.48}$$

A è l'ampiezza massima; k il numero d'onda; ω la pulsazione; ϕ la fase all'instante $t = 0$ s, diversa tra l'una e l'altra funzione. Il più o meno è legato al fatto che l'onda sia progressiva (meno) o regressiva (più). Misuriamo gli angoli in radianti.

La funzione seno è dispari (se cambiamo il segno dell'argomento cambia il segno del seno); la funzione coseno è pari (se cambiamo il segno dell'argomento non cambia il segno del coseno). Una sinusoide è sostanzialmente identica ad una cosinusoide: differiscono per uno sfasamento di un angolo retto.

Cominciamo col ricavare la lunghezza d'onda:

$$\begin{aligned} &v = \frac{\lambda}{T} \\ &\lambda = vT = 0{,}034\,\mathrm{m/s}\cdot 3\,\mathrm{s} = 0{,}102\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{17.49}$$

Da cui:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}102\,\mathrm{m}} = 61{,}6\,\mathrm{m}^{-1} \tag{17.50}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3\,\mathrm{s}} = \frac{2\pi}{3}\mathrm{s}^{-1} \tag{17.51}$$

L'equazione d'onda è ora:

$$y(x,t) = (1{,}5\times 10^{-2}\,\mathrm{m})\sin\left(61{,}6\,\mathrm{m}^{-1}x - \frac{2\pi}{3}\mathrm{s}^{-1}t + \phi\right) \tag{17.52}$$

Per trovare ϕ teniamo conto che il valore della funzione all'istante $t = 2$ s nel punto iniziale è quello massimo.

$$\left.\begin{aligned} &y(0\,\mathrm{m}, 2\,\mathrm{s}) = A\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\mathrm{s}^{-1}\cdot 2\,\mathrm{s} + \phi\right) \\ &y(0\,\mathrm{m}, 2\,\mathrm{s}) = A \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad A = A\sin\left(-\frac{4\pi}{3} + \phi\right) \tag{17.53}$$

$$\begin{aligned} A &= A\sin\left(-\frac{4\pi}{3} + \phi\right) \\ 1 &= \sin\left(-\frac{4\pi}{3} + \phi\right) \\ \arcsin 1 &= \frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{3} + \phi + 2h\pi \quad (h \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{17.54}$$

Scegliamo come valore per h lo zero, trovando la più semplice delle infinite soluzioni dell'equazione.

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \tag{17.55}$$

Concludendo:

$$y(x,t) = (1{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}) \sin\left(61{,}6\,\mathrm{m}^{-1} x - \frac{2\pi}{3}\mathrm{s}^{-1} t + \frac{11\pi}{6}\right) \tag{17.56}$$

Osserviamo che nell'equazione d'onda potevamo scrivere l'argomento della funzione anche come $\omega t \pm kx$: avremo ottenuto ancora un'onda progressiva o regressiva con la stessa regola del segno data prima, ma con una inversione di fase rispetto alla precedente a causa della disparità della funzione seno. Invece usando la funzione coseno avremo ottenuto lo stesso profilo a causa della parità del coseno.

17.4 Onde stazionarie in una corda

Esercizio 125 *Una corda fissata ad entrambe le estremità è lunga* 7,5 m *ed ha una massa di* 0,185 kg*. Essa è sottoposta ad una tensione di* 150 N *e viene fatta oscillare.*

1. *Qual è la velocità delle onde nella corda ?*
2. *Qual è la massima lunghezza d'onda per un un'onda stazionaria?*
3. *Determinare la frequenza di quest'onda.*

La *velocità di propagazione* di un'onda in una corda può essere espressa come $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ dove F è la tensione a cui è sottoposta la corda e $\mu = \frac{m}{l}$ è la massa lineare della corda, definita come il rapporto tra la massa della corda e la sua lunghezza. Quindi:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{150\,\mathrm{N} \cdot 7{,}5\,\mathrm{m}}{0{,}185\,\mathrm{kg}}} = 78\,\mathrm{m/s} \tag{17.57}$$

La *lunghezza di un'onda stazionaria* è tale per cui la corda è lunga un numero intero di mezze lunghezze d'onda: $l = n\frac{\lambda}{2}$ ovvero $\lambda = \frac{2l}{n}$.

La massima lunghezza d'onda si ha quindi per $n = 1$.

$$\lambda = 2 \cdot \frac{7{,}40\,\mathrm{m}}{1} = 15\,\mathrm{m} \tag{17.58}$$

In generale per un'onda abbiamo che velocità, lunghezza d'onda e frequenza sono legate dalla relazione $v = \lambda f$. Quindi:

$$f = \frac{\lambda}{v} = \frac{15\,\mathrm{m}}{78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}18\,\mathrm{Hz} \tag{17.59}$$

17.5 Effetto Doppler

Esercizio 126 *Un treno in avvicinamento a velocità costante ad un passaggio a livello emette un fischio a* 500 Hz*, che viene udito dal casellante a* 600 Hz*.*

1. *Qual è la velocità del treno?*
2. *Quale sarà la frequenza del fischio quando il treno si allontanerà dal passaggio a livello?*

Il fenomeno che caratterizza gli eventi descritti è l'effetto Doppler, in particolare il caso di una sorgente sonora in movimento e un ascoltatore fermo. Se f è la frequenza del suono emesso dall'oggetto in movimento, f' la frequenza udita dall'ascoltatore, u la velocità dell'oggetto in movimento e v la velocità di propagazione del suono nell'aria, allora vale la seguente relazione:

$$f' = \left(\frac{v}{v \pm u}\right) f \tag{17.60}$$

dove il segno da usare è il meno se l'oggetto si avvicina all'ascoltatore, il più altrimenti.

Mettiamo quindi in evidenza, in questa relazione, la velocità u.

$$f' = \left(\frac{v}{v - u}\right) f \tag{17.61}$$

$$\frac{v-u}{v} = \frac{f}{f'}\,; \qquad \frac{v}{v} - \frac{u}{v} = \frac{f}{f'}\,; \qquad 1 - \frac{f}{f'} = \frac{u}{v} \tag{17.62}$$

$$u = v\left(1 - \frac{f}{f'}\right) = 343\,\mathrm{m/s}\left(1 - \frac{600\,\mathrm{Hz}}{600\,\mathrm{Hz}}\right) = 57{,}2\,\mathrm{m/s} \tag{17.63}$$

La frequenza del suono udito deve essere maggiore di quella emessa perché il treno si sta avvicinando.

Invece quando il treno si allontana possiamo scrivere che la frequenza udita è:

$$f' = \left(\frac{v}{v + u}\right) f = \left(\frac{343\,\mathrm{m/s}}{57{,}2\,\mathrm{m/s} + 343\,\mathrm{m/s}}\right) 500\,\mathrm{Hz} = 429\,\mathrm{Hz} \tag{17.64}$$

17.6 Interferenza

Esercizio 127 *Due altoparlanti, posti uno difronte all'altro alla distanza di* 2,7 m*, emettono un'onda sinusoidale con la stessa ampiezza con una frequenza di* 780 Hz*.*

1. *Trova a quale distanza minima dal primo altoparlante potresti non udire nulla se gli altoparlanti emettono perfettamente in fase.*
2. *Trova a quale distanza minima dal primo altoparlante potresti udire un massimo di intensità del suono se gli altoparlanti emettono perfettamente in fase.*

Premessa. Svilupperemo questo problema con una supposizione piuttosto forzata: che l'ampiezza delle onde provenienti dai due altoparlanti e quindi la loro intensità non vari con la distanza. Tutto ciò è irrealistico a meno che le onde non si propaghino solo in una direzione. L'attenuazione delle onde non costituirebbe un problema se ci ponessimo alla stessa distanza dalle due sorgenti, ma non è questo il caso di questo esercizio.

Ricaviamo per prima cosa la lunghezza d'onda del segnale emesso dagli altoparlanti, dal momento che ci servirà nei calcoli successivi. Dalla relazione che lega velocità, frequenza e lunghezza d'onda ($v = \lambda f$) ricaviamo quest'ultima:

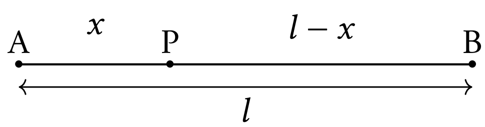
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\ \mathrm{m/s}}{780\ \mathrm{Hz}} = 0{,}436\ \mathrm{m} \tag{17.65}$$

1. In un punto P dello spazio, considerando che le sorgenti emettono in fase, avremo interferenza distruttiva (e quindi un minimo di intensità) se la differenza tra le distanze tra il punto e le due sorgenti A e B vale:

$$\overline{PB} - \overline{PA} = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \tag{17.66}$$

dove n é un numero intero e λ è la lunghezza d'onda. In questa scrittura supponiamo la differenza positiva e quindi $\overline{\mathrm{PB}} > \overline{\mathrm{PA}}$.

Rappresentiamo quanto descritto nel testo con una linea in cui x è la distanza dal punto A e $l - x$ la distanza dal punto B.



La precedente relazione (17.66) diventa:

$$(l - x) - x = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \tag{17.67}$$

Mettiamo in evidenza la x:

$$\begin{aligned} l - 2x &= (2n+1)\frac{\lambda}{2} \\ -2x &= -l + (2n+1)\frac{\lambda}{2} \\ x &= \frac{l - (2n+1)\frac{\lambda}{2}}{2} \end{aligned} \tag{17.68}$$

Al crescere di n il valore di x diminuisce sempre più. A noi interessa il valore più piccolo che è quello per cui il numeratore si approssima a zero. In questo caso semplice possiamo procedere per tentativi, usando valori sempre più grandi di n finché la x non cambia di segno.
Si trova che il minimo si ha per $n = 5$; allora $x = 0{,}15$ m.

2. In un punto P dello spazio, considerando che le sorgenti emettono in controfase, avremo interferenza costruttiva (e quindi un massimo di intensità) se la differenza tra le distanze tra il punto e le due sorgenti A e B vale:

$$\overline{\mathrm{PB}} - \overline{\mathrm{PA}} = n\frac{\lambda}{2} \tag{17.69}$$

dove n é un numero intero e λ è la lunghezza d'onda. In questa scrittura supponiamo la differenza positiva e quindi $\overline{\mathrm{PB}} > \overline{\mathrm{PA}}$.
La rappresentazione è la stessa del punto precedente; quello che cambia ne è l'applicazione. La precedente (17.66) diventa:

$$(l - x) - x = n\frac{\lambda}{2} \tag{17.70}$$

Mettiamo in evidenza la x:

$$\begin{aligned} l - 2x &= n\frac{\lambda}{2} \\ -2x &= -l + n\frac{\lambda}{2} \\ x &= \frac{l - n\frac{\lambda}{2}}{2} \end{aligned} \tag{17.71}$$

Al crescere di n il valore di x diminuisce sempre più. A noi interessa il valore più piccolo che è quello per cui il numeratore si approssima a zero. In questo caso semplice possiamo procedere per tentativi, usando valori sempre più grandi di n finché la x non cambia di segno.
Si trova che il minimo si ha per $n = 12$; allora $x = 0{,}042$ m.

17.7 Acustica

Esercizio 128 *Vogliamo misurare la profondità di un pozzo lasciando cadere un sasso sul suo fondo, ascoltando dopo quanto tempo sentiamo il tonfo del sasso. Sentiamo il tonfo dopo* 2,1 s.

Trascurando l'attrito dell'aria determina qual è la profondità del pozzo, dapprima trascurando la velocità di propagazione del suono e poi considerando anche questa.

Se trascuriamo la propagazione del suono commettiamo un errore significativo?

Primo modello

Il moto di un sasso che cade in un pozzo può essere visto come un moto uniformemente accelerato, con velocità e posizione iniziale nulle. Consideriamo un sistema di riferimento orientato verso il basso, con l'origine nella posizione iniziale. Allora possiamo scrivere che la distanza x percorsa è:

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \tag{17.72}$$

Dove g è l'accelerazione di gravità e t il tempo impiegato. Sostituendo i dati otteniamo:

$$x = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (2{,}1\ \mathrm{s})^2 = 21{,}6\ \mathrm{m} \tag{17.73}$$

Secondo modello

Se consideriamo anche il tempo di propagazione del suono t_s, da quando il sasso colpisce il fondo del pozzo a quando il suono arriva alle nostre orecchie, allora abbiamo che:

$$t_\mathrm{tot} = t_\mathrm{c} + t_\mathrm{s} \tag{17.74}$$

dove abbiamo indicato con t_tot il tempo misurato e con t_c il tempo impiegato dal sasso a cadere.

Dobbiamo trovare una nuova relazione che leghi il tempo misurato con lo spazio percorso. Una prima relazione è la legge del moto uniformemente accelerato che abbiamo già scritto. Ora però il tempo è solo t_c. Mettiamo in evidenza t_c e scriviamo che:

$$x = \frac{1}{2}gt_\mathrm{c}^2\,; \qquad t_c = \sqrt{\frac{2x}{g}} \tag{17.75}$$

Il suono si propaga di moto rettilineo uniforme con velocità $v = 343\ \mathrm{m/s}$ in condizioni standard.

$$v = \frac{x}{t_\mathrm{s}}\,; \qquad t_\mathrm{s} = \frac{x}{v} \tag{17.76}$$

Infine abbiamo:

$$t_\mathrm{tot} = t_\mathrm{c} + t_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} \tag{17.77}$$

Questa è un'equazione irrazionale in x. Isoliamo la radice:

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = t_\mathrm{tot} - \frac{x}{v} \tag{17.78}$$

Facciamo il quadrato di entrambi i membri:

$$\frac{2x}{g} = t_\mathrm{tot}^2 - \frac{2t_\mathrm{tot}}{v}x + \frac{x^2}{v^2} \tag{17.79}$$

Portiamo tutto a primo membro e otteniamo un'equazione di secondo grado in x:

$$\frac{x^2}{v^2} - 2\left(\frac{t_{\text{tot}}}{v} + \frac{1}{g}\right)x + t_{\text{tot}}^2 = 0 \tag{17.80}$$

Dove:

$$\frac{1}{v^2} = 8{,}50 \times 10^{-6}\,\text{s}^2\text{m}^{-2}\,; \qquad 2\left(\frac{t_{\text{tot}}}{v} + \frac{1}{g}\right) = 0{,}216\,\text{s}^2\text{m}\,; \qquad t_{\text{tot}}^2 = 4{,}41\,\text{s}^2 \tag{17.81}$$

Se risolviamo l'equazione otteniamo due radici: $x_1 = 20{,}4$ m e $x_2 = 25405$ m. Solo la prima ha significato fisico per il nostro problema.

A questo punto possiamo osservare che, poiché il tempo misurato ha solamente due cifre significative, allora anche le distanze trovate avrebbero dovuto essere indicate con due cifre significative.

I risultati ottenuti dai due modelli dovrebbero essere così indicati:

$$x_\text{a} = 22 \pm 1\ \text{m}; \qquad x_\text{b} = 20 \pm 1\ \text{m} \tag{17.82}$$

I due risultati, nel limite dell'incertezza, si sovrappongono (21 m è una misura compatibile con entrambe le misure). Il modello non ha fornito miglioramenti significativi nei risultati finali.

Osserviamo infine che una persona con un cronometro in mano, che volesse misurare il tempo intercorso tra le caduta del sasso e il suono del tonfo, avrebbe non poca difficoltà ad ottenere un tempo preciso al decimo di secondo, come indicato nei dati iniziali del problema.

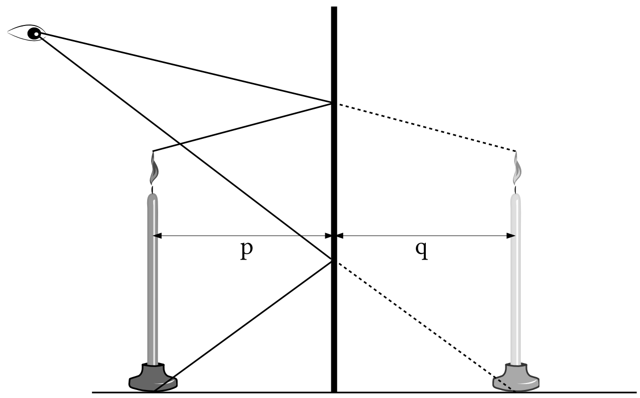
18 Ottica

18.1 Specchio piano

Esercizio 129 *Un oggetto alto* 35 cm *è posto davanti ad uno specchio piano verticale alla distanza di* 20 cm*.*

1. *A che distanza apparirà l'immagine dell'oggetto?*
2. *Qual è l'altezza dell'immagine?*
3. *Qual è l'ingrandimento lineare risultante?*

L'immagine di uno specchio piano è sempre virtuale e la sua distanza q dalla specchio è uguale alla distanza p dell'oggetto reale dalla specchio stesso. Queste distanze non sono legate alla distanza di osservazione dallo specchio, come mostrato nella figura seguente.



$$q = p = 20\,\text{cm} = 0{,}20\,\text{m} \tag{18.1}$$

Anche l'altezza dell'immagine h_i è uguale a quella quell'oggetto h_0.

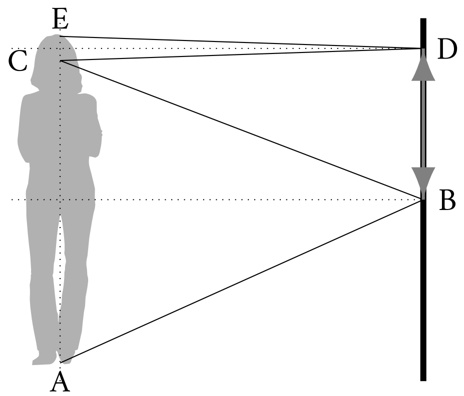
$$h_\text{i} = h_0 = 35\,\text{cm} = 0{,}35\,\text{m} \tag{18.2}$$

Di conseguenza l'immagine non appare ingrandita e l'ingrandimento lineare è unitario.

$$M = \frac{h_\text{i}}{h_0} = \frac{0{,}35\,\text{m}}{0{,}35\,\text{m}} = 1 \tag{18.3}$$

Esercizio 130 *Una signora deve comprare uno specchio tale da potersi osservare per intero, dalla testa ai piedi. La signora è alta* 165 cm *e gli occhi stanno* 7 cm *più in basso della cima del capo.*

1. *A che altezza massima B_s deve essere posto lo specchio?*
2. *Fino a che altezza h_s deve arrivare lo specchio?*



Lo specchio è uno specchio piano. Rappresentiamo graficamente la situazione illustrata. Vediamo che i raggi provenienti dagli occhi si riflettono sullo specchio $\overline{BD}$ formando i triangoli $\widehat{CBA}$ e $\widehat{CDE}$. Per le proprietà di uno specchi piano i raggi incidenti e quelli riflessi formano, con la normale al piano nel punto di incidenza, lo stesso angolo. Di conseguenza i due triangoli sono isosceli.

L'altezza della signora è:

$$h = \overline{AE} = 165\ \text{cm} \tag{18.4}$$

La distanza degli occhi dalla cima del capo è:

$$\overline{CE} = 8\ \text{cm} \tag{18.5}$$

Da cui:

$$\overline{CA} = \overline{AE} - \overline{CE} = 165\ \text{cm} - 8\ \text{cm} = 157\ \text{cm} \tag{18.6}$$

Il punto B (base dello specchio) si trova a metà del segmento $\overline{CA}$:

$$B_s = \frac{\overline{CA}}{2} = \frac{157\ \text{cm}}{2} = 78{,}5\ \text{cm} \tag{18.7}$$

Analogamente il punto D (altezza dello specchio) si trova a metà del segmento $\overline{CE}$ quindi:

$$h_s = \overline{CA} + \frac{\overline{CE}}{2} = 157\ \text{cm} + \frac{8\ \text{cm}}{2} = 161\ \text{cm} \tag{18.8}$$

In tutta questa trattazione bisogna notare che la distanza tra la persona e lo specchio non interviene mai. Se lo specchio è troppo piccolo non miglioreremo alcunché allontanandoci o avvicinandoci allo stesso.

18.2 Specchio sferico

Esercizio 131 *Una candela alta* 10 cm *è posta a* 40 cm *di distanza da uno specchio sferico concavo il cui raggio di curvatura è* 60 cm*.*

1. *Trova la distanza focale dello specchio, la posizione e l'altezza dell'immagine e il suo ingrandimento lineare.*
2. *Rappresenta con un disegno quanto trovato.*

Per uno specchio sferico la distanza focale è la metà del raggio di curvatura.

$$f = \frac{R}{2} = \frac{60\ \text{cm}}{2} = 30\ \text{cm} \tag{18.9}$$

Per trovare la posizione p' dell'immagine possiamo usare la legge dei punti coniugati, dove p è la distanza dell'oggetto dal vertice dello specchio:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \tag{18.10}$$

Ora possiamo mettere in evidenza p':

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \tag{18.11}$$

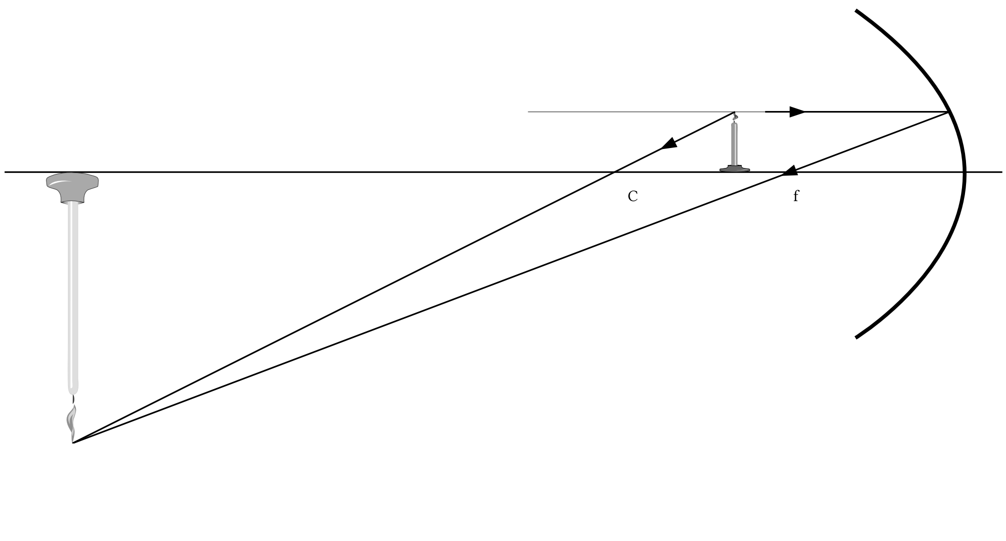
$$p' = \frac{fp}{p-f} = \frac{30\ \text{cm} \cdot 40\ \text{cm}}{40\ \text{cm} - 30\ \text{cm}} = 120\ \text{cm} \tag{18.12}$$

L'ingrandimento lineare G è dato dal rapporto tra l'altezza h' dell'immagine e l'altezza h dell'oggetto, o, per uno specchio sferico concavo, dal rapporto tra p' e p.

$$G = \frac{h'}{h} = \frac{p'}{p} = \frac{120\ \text{cm}}{30\ \text{cm}} = 4 \tag{18.13}$$

Da questa relazione possiamo ricavare h':

$$h' = Gh = 3 \cdot 10\ \text{cm} = 30\ \text{cm} \tag{18.14}$$



18.3 Lente sottile

Esercizio 132 *Se si guarda attraverso una lente di ingrandimento di* 15 *diottrie un oggetto distante* 4 cm *dalla lente, a quale distanza dalla lente appare l'immagine?*

Per una lente sottile le diottrie sono l'inverso della distanza focale:

$$D = \frac{1}{f} \tag{18.15}$$

Per cui la distanza focale della lente è (in metri):

$$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{15\ \mathrm{m}^{-1}} = 6{,}6\ \mathrm{cm} \tag{18.16}$$

Per una lente sottile vale la legge dei punti coniugati ; conosciamo la distanza p dell'oggetto dal centro della lente, la distanza focale f e quindi possiamo ricavare la distanza p' dell'immagine.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \tag{18.17}$$

$$p' = \frac{fp}{p-f} = \frac{6\ \mathrm{cm} \cdot 4\ \mathrm{cm}}{4\ \mathrm{cm} - 6\ \mathrm{cm}} = -12\ \mathrm{cm} \tag{18.18}$$

L'immagine è virtuale (lo capiamo dal segno negativo).

Esercizio 133 *Guardando attraverso una lente convergente sottile un oggetto posto a distanza* 60 cm *dalla lente se ne osserva un'immagine ingrandita del* 134% *.*
A quanti metri dalla lente si è formata l'immagine?

L'ingrandimento per una lente sottile è definito come:

$$G = \frac{q}{p} = \left|\frac{f}{p-f}\right| = \left|\frac{q-f}{f}\right| \tag{18.19}$$

dove p è la distanza dell'oggetto dalla lente, q la distanza dell'immagine e f la distanza focale della lente. Ricaviamo q conoscendo G e p:

$$q = Gp = 134\% \cdot 60\ \mathrm{cm} = 1{,}34 \cdot 0{,}60\ \mathrm{m} = 0{,}80\ \mathrm{m} \tag{18.20}$$

Esercizio 134 *Un oggetto viene osservato attraverso una lente di ingrandimento da* 5 *diottrie posta a* 15 cm *dall'oggetto stesso. Qual è l'ingrandimento dell'immagine?*

Come nell'esercizio precedente l'ingrandimento della lente è:

$$G = \frac{q}{p} = \left|\frac{f}{p-f}\right| = \left|\frac{q-f}{f}\right| \tag{18.21}$$

Conosciamo la distanza p dell'oggetto dalla lente. Dobbiamo conoscere o la distanza q o la distanza focale f.

La diottria di una lente è il reciproco della distanza focale. Ricaviamo quindi la distanza focale:

$$f = \frac{1}{d} = \frac{1}{5\ \mathrm{m}^{-1}} = 0{,}20\ \mathrm{m} \tag{18.22}$$

$$G = \left|\frac{f}{p-f}\right| = \left|\frac{0{,}20\ \mathrm{m}}{0{,}15\ \mathrm{m} - 0{,}20\ \mathrm{m}}\right| = 4 = 400\% \tag{18.23}$$

18.4 Rifrazione di un mezzo

Esercizio 135 *Un raggio di luce viene parzialmente riflesso dalla superficie di separazione aria/vetro sotto un angolo di 49° parzialmente rifratto sotto un angolo di 31°.*

Determina l'indice di rifrazione del vetro.

Abbiamo due mezzi, rispettivamente di indice di rifrazione n_1 e n_2, attraversati da un raggio di luce. Il raggio preveniente dal primo mezzo incide sulla superficie di separazione col secondo mezzo e poi attraversa quest'ultimo. La legge di Snell stabilisce un legame tra l'angolo di incidenza α del raggio che attraversa il primo mezzo e l'angolo di rifrazione β che attraversa il secondo:

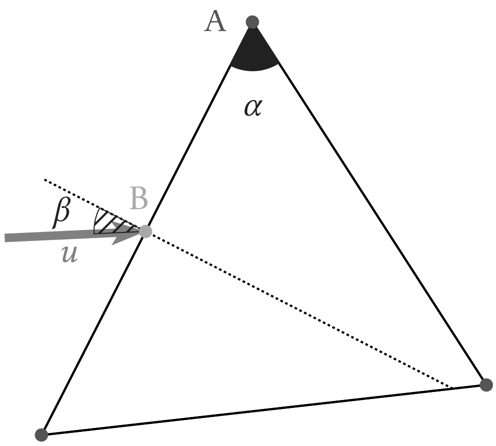
$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta) \tag{18.24}$$

L'indice di rifrazione dell'aria vale circa uno. Quindi possiamo determinare l'indice di rifrazione del vetro:

$$n_2 = n_1 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = 1 \cdot \frac{\sin(49°)}{\sin(31°)} = \frac{0{,}754}{0{,}515} = 1{,}46 \tag{18.25}$$

Esercizio 136 *Un prisma di vetro, a facce piane, che formano un angolo di 60°, è investito da un raggio di luce monocromatico. Il raggio forma un angolo di 30° rispetto alla normale alla faccia incidente, come evidenziato in figura.*

Trova se il raggio riesce ad attraversare il prisma e che angolo forma con la normale all'altra faccia.



Il raggio incidente la prima faccia del prisma passa da un mezzo con indice di rifrazione $n_a = 1$ (l'aria) ad un mezzo con indice di rifrazione maggiore $n_v = 1{,}45$ (il vetro). Per conoscere l'angolo del raggio rifratto applichiamo la legge di Snell. Ci dovremmo aspettare che il raggio rifratto formi rispetto alla normale un angolo inferiore a quello del raggio incidente.

$$n_a \sin(\beta) = n_v \sin(\gamma) \tag{18.26}$$

Da cui:

$$\sin(\gamma) = \frac{n_a}{n_v} \sin(\beta) \tag{18.27}$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{n_\mathrm{a}}{n_\mathrm{v}}\sin(\beta)\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}45}\cdot\sin(30°)\right) \simeq 20{,}2° \tag{18.28}$$

Tracciamo di conseguenza il raggio v fino ad incontrare il seconda faccia del prisma nel punto che chiamiamo C (vedi figura seguente). In quel punto tracciamo la perpendicolare alla faccia. Questa retta incontra la precedente perpendicolare nel punto che chiamiamo D.

Il quadrilatero ABCD, in quanto tale, ha la somma degli angoli interni che vale 360°. In particolare, per costruzione, sappiamo che $\widehat{\mathrm{ABD}} = \widehat{\mathrm{DCA}} = 90°$ e che $\alpha = 60°$.

Per cui:

$$\widehat{\mathrm{BDC}} = 360° - \widehat{\mathrm{ABD}} - \widehat{\mathrm{DCA}} - \alpha = 120° \tag{18.29}$$

Se guardiamo al triangolo BDC possiamo trovare la misura dell'angolo δ:

$$\delta = 180° - \gamma - \widehat{\mathrm{BDC}} = 180° - 20{,}17° - 120° = 39{,}8° \tag{18.30}$$

A questo punto il raggio v potrebbe sia rifrangersi sulla seconda faccia del prisma o riflettersi totalmente, qualora l'angolo formato con la normale superasse l'angolo limite per il vetro rispetto all'aria. Infatti il nostro raggio v si sta portando da un mezzo più rifrangente (il vetro) ad un mezzo meno rifrangente (l'aria). Troviamo questo angolo limite.

$$\theta_\mathrm{l} = \arcsin(\frac{1}{n_\mathrm{v}}) = \arcsin(\frac{1}{1{,}45}) = 43{,}6° \tag{18.31}$$

Poiché $d < 43{,}6°$ siamo ora sicuri che il raggio verrà rifratto e uscirà dalla secondo faccia del prisma.

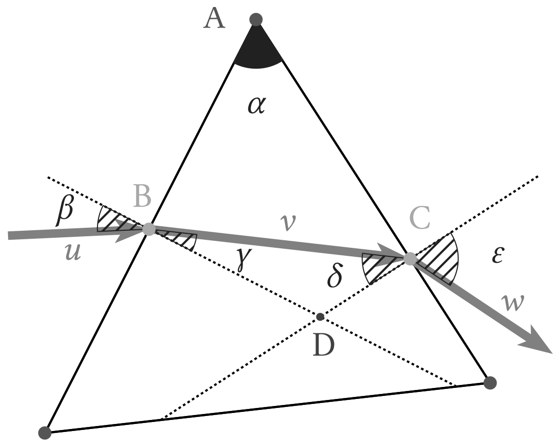
Applichiamo la legge di Snell anche a questa situazione per determinare l'angolo di uscita del raggio rifratto. Questa volta ci aspettiamo che il raggio rifratto si allontani dalla normale, dal momento che il raggio sta passando da un mezzo con un indice di rifrazione maggiore ad uno con indice di rifrazione minore.

$$n_\mathrm{v}\sin(\delta) = n_\mathrm{a}\sin(\varepsilon) \tag{18.32}$$

Da cui:

$$\sin(\varepsilon) = \frac{n_\mathrm{v}}{n_\mathrm{a}}\sin(\delta) \tag{18.33}$$

$$\varepsilon = \arcsin\left(\frac{n_\mathrm{v}}{n_\mathrm{a}}\sin(\delta)\right) = \arcsin\left(\frac{1,45}{1}\cdot\sin(39{,}8°)\right) \simeq 68{,}1° \tag{18.34}$$



18.5 Due fenditure

Esercizio 137 *Due fenditure piane e parallele, distanti* 0,05 mm*, sono investite dalla luce di una lampada ai vapori di sodio. Questa lampada emette soprattutto luce di due lunghezze d'onda ravvicinate* ($\lambda_1 = 589{,}0\,\text{nm}$ *e* $\lambda_2 = 589{,}6\,\text{nm}$)*. La luce diffratta viene osservata su uno schermo piano posto a* $l = 2\,\text{m}$ *dalle fenditure.*

1. *Determina la distanza tra la prima frangia chiara e la prima frangia scura sullo schermo di osservazione sia per la prima riga spettrale del sodio che per la seconda.*
2. *Le due figure di interferenza si disturberanno a vicenda o risulteranno quasi sovrapposte?*

Se della luce monocromatiche investe due sottili fenditure molto vicine tra loro è facilmente possibile osservare l'interferenza tra i raggi che escono dalle due fenditure. Se θ è l'angolo formato dalla direzione di osservazione sullo schermo piano rispetto al piano delle fenditure allora la condizione per la formazione di frange chiare, ovvero dei massimi di interferenza è:

$$d \sin\theta_c = n\lambda \tag{18.35}$$

Dove d è la distanza tra le fenditure e n è un numero intero che stabilisce l'ordine della frangia. Mentre la condizione per le frange scure è:

$$d \sin\theta_s = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \tag{18.36}$$

Scegliamo $n = 0$. Di conseguenza la prima frangia chiara si troverà per $\sin\theta_c = 0$ quindi per $\theta_c = 0°$. Invece per la prima frangia scura possiamo scrivere:

$$d \sin\theta_s = \frac{1}{2}\lambda \tag{18.37}$$

$$\sin\theta_s = \frac{\lambda_1}{2d} \tag{18.38}$$

$$\theta_s = \arcsin\left(\frac{\lambda_1}{2d}\right) = \arcsin\left(\frac{589{,}0 \times 10^{-9}\,\text{m}}{2 \cdot 0{,}05 \times 10^{-3}\,\text{m}}\right) = 0{,}337° \tag{18.39}$$

La distanza lineare sullo schermo di osservazione tra la frangia centrale per $\theta_c = 0°$ e la prima scura $\theta_s = 0{,}337°$ è data da:

$$L = l \tan(\theta_s) = 2\,\text{m} \cdot \tan(0{,}337°) = 0{,}0117\,\text{m} = 11{,}7\,\text{mm} \tag{18.40}$$

Ripetiamo i calcoli con la seconda riga spettrale. Otteniamo:

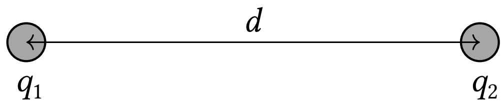
$$\theta_s = 0{,}338°; \quad L = 0{,}0118\,\text{m} = 11{,}8\,\text{mm} \tag{18.41}$$

Di conseguenza le due righe spettrali daranno le prime frange del tutto sovrapposte.

19 Elettrostatica

19.1 Forza di Coulomb tra due corpi puntiformi carichi

Esercizio 138 *Due corpi puntiformi dotati rispettivamente di carica* $q_1 = -47\ \mu\mathrm{C}$ *e* $q_2 = 62\ \mu\mathrm{C}$ *sono posti nel vuoto alla distanza* $d = 33\ \mathrm{cm}$. *Calcola l'intensità della forza elettrostatica tra i due corpi e indica nella figura seguente direzione e verso della forza che agisce su ognuno.*



La legge di Coulomb stabilisce quale debba essere la forza che intercorre tra due oggetti carichi puntiformi, di carica q_1 e q_2, posti nel vuoto a distanza d l'uno dall'altro. Nella nostra figura i portatori di carica sono stati disegnati come dei cerchi, per renderli meglio visibili.

Per cui l'intensità della forza elettrostatica tra i due corpi è:

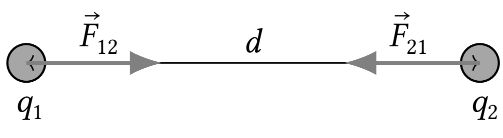
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2} = 9{,}0 \times 10^9\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{(47 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(62 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(0{,}33\ \mathrm{m})^2} \tag{19.1}$$

$$= \frac{9 \cdot 47 \cdot 62}{0,1089} \cdot 10^{(9-6-6)}\frac{\mathrm{N\,m^2\,C^2}}{\mathrm{C^2\,m^2}} = 241\ \mathrm{N}$$

Le cariche sono state prese entrambe senza segno perché non serve per determinare l'intensità della forza. Il segno relativo delle cariche ci dice però se la forza è attrattiva (cariche di segno opposto, come in questo caso), o repulsiva (cariche dello stesso segno). ε_0 è la costante dielettrica del vuoto.

La forza $\vec{F}_{12}$ che agisce sulla corpo di carica q_1 posta in presenza del corpo di carica q_2 è uguale e contraria alla forza $\vec{F}_{21}$ che agisce sul corpo di carica q_2 posta in presenza del corpo di carica q_1. La direzione delle due forze è lungo l'asse che congiunge i due corpi.

Possiamo completare la figura in questo modo:

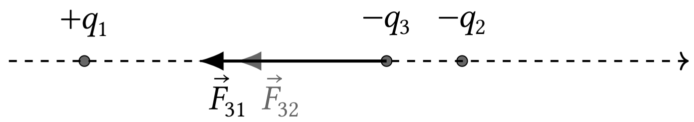


Nel linguaggio normalmente usato anche in quest'opera qui di seguito, per semplicità si usa parlare non di corpi dotati di carica, ma semplicemente di cariche. Deve essere sempre chiaro che la carica da sola non può esistere senza un corpo che ne sei dotato.

Esercizio 139 *Tre corpi puntiformi, dotati rispettivamente di carica* $q_1 = 3{,}0\,\mathrm{mC}$, $q_2 = -6\,\mathrm{mC}$ *e* $q_3 = -4\,\mathrm{mC}$, *sono posti nel vuoto. Le cariche si trovano tutte sullo stesso asse: la prima si trova nella posizione* $x_1 = 2\,\mathrm{cm}$ *e la seconda in* $x_2 = 6\,\mathrm{cm}$ *e la terza* $x_3 = 5\,\mathrm{cm}$.

1. *Trova la forza, in modulo, direzione e verso, che agisce sul corpo 3.*
2. *Trova in che che punto la forza che agisce sul corpo 3 sarebbe nulla.*

1. Rappresentiamo graficamente, almeno qualitativamente, quanto indicato dal testo.



La forza $\vec{F}_{31}$ che il corpo 1 esercita sul corpo 3 è una forza attrattiva perché le cariche hanno segno opposto: per cui la forza va verso sinistra.
La forza $\vec{F}_{32}$ che il corpo 2 esercita sul corpo 3 è una forza repulsiva perché le cariche hanno lo stesso segno: per cui la forza va ancora verso sinistra.
La forza totale che agisce sul corpo 1 è la somma delle due forze precedenti: il modulo della somma è la somma dei moduli delle due forze.

$$r_{31} = x_3 - x_1 = 5\,\mathrm{cm} - 2\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{cm} \tag{19.2}$$

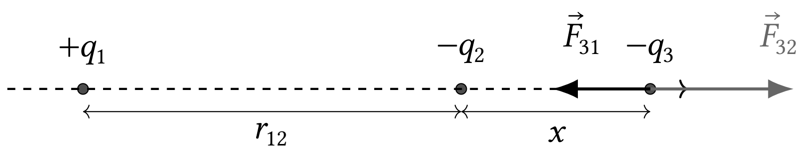
$$r_{32} = x_2 - x_3 = 6\,\mathrm{cm} - 5\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{cm} \tag{19.3}$$

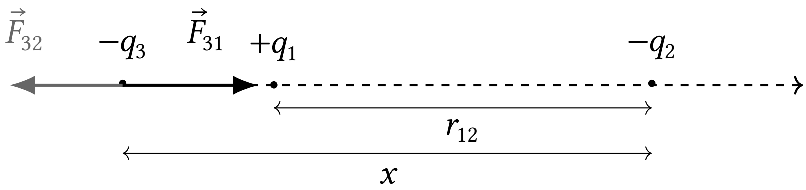
$$\begin{aligned} F_{31} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{(r_{31})^2} &= 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{(4 \times 10^{-3}\,\mathrm{C})(3 \times 10^{-3}\,\mathrm{C})}{(0{,}03\,\mathrm{m})^2} \\ &= \frac{9 \cdot 4 \cdot 3}{0,0009} \cdot 10^{(9-3-3)}\frac{\mathrm{N\,m^2\,C^2}}{\mathrm{C^2\,m^2}} = 1{,}2 \times 10^8\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{19.4}$$

$$\begin{aligned} F_{32} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{(r_{32})^2} &= 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{(4 \times 10^{-3}\,\mathrm{C})(6 \times 10^{-3}\,\mathrm{C})}{(0{,}01\,\mathrm{m})^2} \\ &= \frac{9 \cdot 4 \cdot 6}{0,0001} \cdot 10^{(9-3-3)}\frac{\mathrm{N\,m^2\,C^2}}{\mathrm{C^2\,m^2}} = 2{,}16 \times 10^9\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{19.5}$$

$$F_{\mathrm{tot}} = F_{31} + F_{32} = 2{,}28 \times 10^9\,\mathrm{N} \tag{19.6}$$

2. In problemi di questo tipo, a causa della natura vettoriale della forza, è certamente opportuno fare una rappresentazione di quanto sta avvenendo. Inoltre è quanto mai importante chiarire bene quale sistema di riferimento si sta adottando, anche per ben interpretare i risultati ottenuti. In primo luogo il punto cercato non può stare tra i corpi 1 e 2 perché, come già visto, in quella condizione la forza non si annulla mai. Il punto sarà quindi o a destra del corpo 2 o a sinistra del corpo 1. Rappresentiamo le due configurazioni e soffermiamoci, per scelta puramente arbitraria, sulla prima.





Nelle due figure abbiamo chiamato r_{12} la distanza tra i corpi 1 e 2, e x la distanza tra 2 e 3, che dobbiamo trovare. Questa distanza va considerata con segno: se positiva indica una posizione a destra di 2; se negativa alla sinistra. Con questa indicazione possiamo indicare i due casi possibili.
Per cui troviamo il punto tale per cui:

$$F_{31} = F_{32} \tag{19.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}} \frac{\cancel{q_3} q_1}{(r_{31})^2} &= \frac{1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}} \frac{\cancel{q_3} q_2}{(r_{32})^2} \\
\frac{q_1}{(r_{12}+x)^2} &= \frac{q_2}{x^2} \\
q_1 x^2 &= q_2 (r_{12}+x)^2 \\
3 \times 10^{-3}\,\mathrm{C} \cdot x^2 &= 6 \times 10^{-3}\,\mathrm{C} \cdot (r_{12}+x)^2 \\
3x^2 &= 6(r_{12}^2 + 2r_{12}x + x^2) \\
3x^2 &= 6r_{12}^2 + 12r_{12}x + 6x^2 \\
0 &= 3x^2 + 12r_{12}x + 6r_{12}^2
\end{aligned} \tag{19.8}$$

Sostituiamo i valori di r_{12} in metri, senza l'unità di misura per semplificare il calcolo successivo.

$$r_{12} = x_2 - x_1 = 6\,\mathrm{cm} - 2\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m} \tag{19.9}$$

$$\begin{aligned}
3x^2 + 12 \cdot 0{,}04x + 6 \cdot (0{,}04)^2 &= 0 \\
3x^2 + 0{,}48x + 0{,}0096 &= 0 \\
x_{1,2} = \frac{-0{,}48 \pm \sqrt{(0{,}48)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0{,}0096}}{6} &= \frac{-0{,}48 \pm 0{,}34}{6} \\
x_1 = -0{,}023 \quad ; \quad x_2 &= -0{,}137
\end{aligned} \tag{19.10}$$

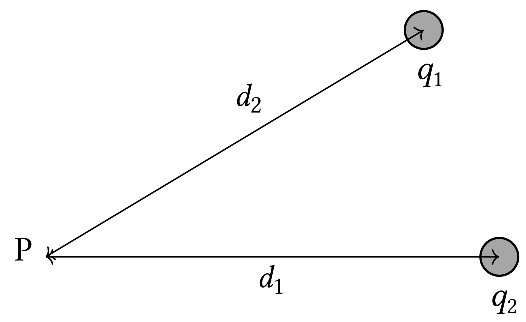
La prima misura non è accettabile perché il punto è tra il corpo 2 e 1, dove la forza non si può annullare. La seconda è accettabile perché totalmente a sinistra del corpo 1.
Per cui il punto cercato è:

$$x = -0{,}14\,\mathrm{m} \tag{19.11}$$

19.2 Campo elettrico di cariche puntiformi nel vuoto

Esercizio 140 *Due cariche* $q_1 = -2{,}3\ \mu\text{C}$ *e* $q_2 = -7{,}5\ \mu\text{C}$ *sono poste nel vuoto come indicato nella figura seguente. Le distanze indicate sono* $d_1 = 39\ \text{cm}$ *e* $d_2 = 59\ \text{cm}$*. Determina:*

1. *qual è l'intensità del campo elettrico generato da ciascuna carica nel punto* P*;*
2. *direzione e verso del campo elettrico di ciascuna carica;*
3. *direzione e verso del campo elettrico totale nel punto* P *aggiungendolo alla figura.*



Il campo elettrico è una grandezza vettoriale per la quale vale il principio di sovrapposizione, cioè il campo di due sorgenti in un punto dello spazio è dato dalla somma vettoriale del campo generato dalle due sorgenti prese singolarmente. Il campo totale delle due cariche nel punto P è:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \tag{19.12}$$

Il campo di un carica puntiforme, in punto P a distanza *d* dalla carica stessa, nel vuoto vale:

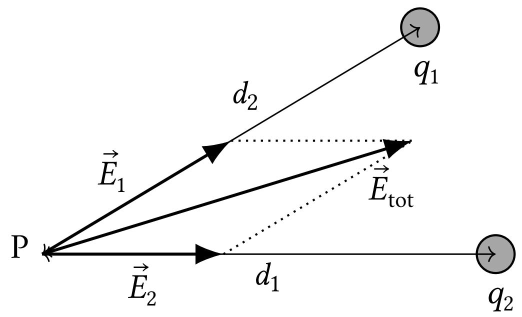
$$E(\text{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2} \tag{19.13}$$

1. Per l'intensità del campo delle due cariche possiamo scrivere:

$$E_1(\text{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d_1^2} = 9{,}0 \times 10^9\ \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\frac{2{,}3 \times 10^{-6}\ \text{C}}{(0{,}39\ \text{m})^2} = 1{,}36 \times 10^5\ \text{N/C} \tag{19.14}$$

$$E_2(\text{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{d_2^2} = 9{,}0 \times 10^9\ \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\frac{7{,}5 \times 10^{-6}\ \text{C}}{(0{,}59\ \text{m})^2} = 1{,}94 \times 10^5\ \text{N/C} \tag{19.15}$$

2. La carica q_1 è negativa per cui il suo campo nel punto P è un vettore applicato in quel punto, la cui *direzione* è data dalla congiungente tra la carica e il punto, ed è *orientato verso la carica* stessa.
   Anche la carica q_2 è negativa per cui il suo campo nel punto P è un vettore applicato in quel punto, la cui *direzione* è data dalla congiungente tra la carica e il punto, ed è *orientato verso la carica* stessa.
3. Il campo totale è la somma vettoriale dei due campi: possiamo trovarlo per via grafica con la regola del parallelogramma. Tutto ciò è rappresentato nella figura seguente in via qualitativa.



> **Esercizio 141** *Tre cariche puntiformi* ($q_1 = -4{,}8\,\mu\text{C}; q_2 = 3{,}3\,\mu\text{C}; q_3 = 8{,}1\,\mu\text{C}$) *sono poste nel piano alle seguenti coordinate:* $\text{P}_1(3\text{ cm}; 1\text{ cm})$, $\text{P}_2(-2\text{ cm}; 1\text{ cm})$, $\text{P}_3(1\text{ cm}; -2\text{ cm})$.
>
> *Determina:*
> 1. *qual è l'intensità del campo elettrico generato da ciascuna carica nel punto* $P(0\text{ cm}; 2\text{ cm})$*;*
> 2. *il modulo del campo elettrico totale nel punto* P*;*
> 3. *l'angolo che il campo elettrico forma con l'asse x.*

Il campo di una carica puntiforme in un punto a distanza r dalla carica stessa vale:

$$E(\text{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2} \tag{19.16}$$

Inoltre il campo di più cariche puntiformi è la somma vettoriale del campo di ogni singola carica secondo il principio di sovrapposizione.

1. Per calcolare il campo di ciascuna carica procediamo così:
   (a) Calcoliamo le distanze tra il punto P e i punti dati usando la formula della distanza tra due punti nel piano.

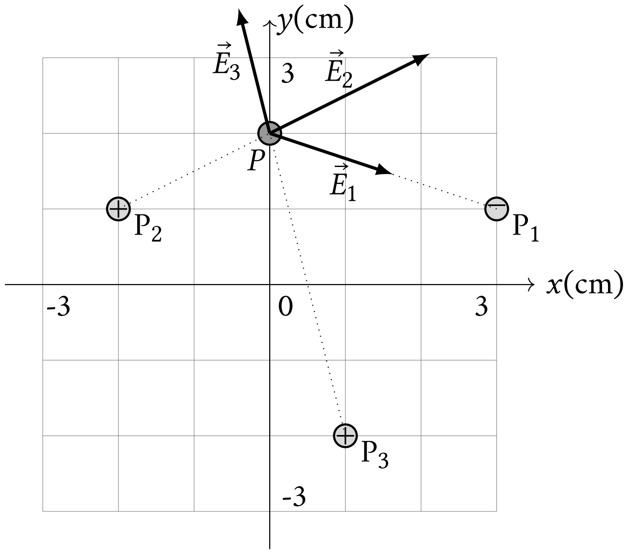
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(3\text{ cm} - 0\text{ cm})^2 + (1\text{ cm} - 2\text{ cm})^2} = \sqrt{(3\text{ cm})^2 + (1\text{ cm})^2} = \sqrt{10}\text{ cm} \\ d_2 &= \sqrt{(-2\text{ cm} - 0\text{ cm})^2 + (1\text{ cm} - 2\text{ cm})^2} = \sqrt{(2\text{ cm})^2 + (1\text{ cm})^2} = \sqrt{5}\text{ cm} \\ d_3 &= \sqrt{(1\text{ cm} - 0\text{ cm})^2 + (-2\text{ cm} - 2\text{ cm})^2} = \sqrt{(1\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2} = \sqrt{17}\text{ cm} \end{aligned} \tag{19.17}$$

   (b) Calcoliamo il modulo del campo di ogni singola carica.

$$\begin{aligned} E_1(\text{P}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d_1^2} = 8{,}99 \times 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\frac{4{,}8 \times 10^{-6}\text{ C}}{(0{,}1\text{ m}^2)} = 4{,}32 \times 10^5\text{ N/C} \\ E_2(\text{P}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{d_2^2} = 8{,}99 \times 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\frac{3{,}3 \times 10^{-6}\text{ C}}{(0{,}05\text{ m}^2)} = 5{,}93 \times 10^5\text{ N/C} \\ E_3(\text{P}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{d_2^2} = 8{,}99 \times 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\frac{8{,}1 \times 10^{-6}\text{ C}}{(0{,}17\text{ m}^2)} = 4{,}28 \times 10^5\text{ N/C} \end{aligned} \tag{19.18}$$

   Rappresentiamo quanto conosciamo fino ad ora. I vettori del campo giacciono sulle rette passanti per le coppie di punti dati: se la carica è positiva il vettore si allontana dalla carica; se la carica è negativa è verso la carica stessa.



2. Per calcolare il campo totale dobbiamo fare la somma vettoriale dei campi delle singole cariche. Per fare la somma vettoriale dobbiamo conoscere le componenti dei singoli vettori. Per conoscere le componenti dei singoli vettori possiamo fare il seguente ragionamento.
   Le componenti sono date dal modulo del vettore per il coseno o seno dell'angolo che il vettore forma con gli assi del sistema. Per ricavare l'angolo possiamo ragionare geometricamente osservando la figura. Non sempre questo è possibile o consigliabile, in particolare quando i vettori sono nello spazio, ma in questi esercizi non si supera quasi mai la complessità nei calcoli di questo esercizio.
   Ricaviamo l'angolo che i singoli vettori di campo elettrico formano con uno degli assi coordinati *osservando la figura alla pagina successiva.*
   Il vettore $\vec{E}_1$ forma un angolo α con l'asse x. L'angolo α è congruente con l'angolo α' del triangolo rettangolo PBP_1. Possiamo ricavare questo angolo sapendo che in un triangolo rettangolo un cateto ($\overline{PB}$) è uguale all'altro cateto ($\overline{BP_1}$) per la tangente dell'angolo (α') opposto al primo.

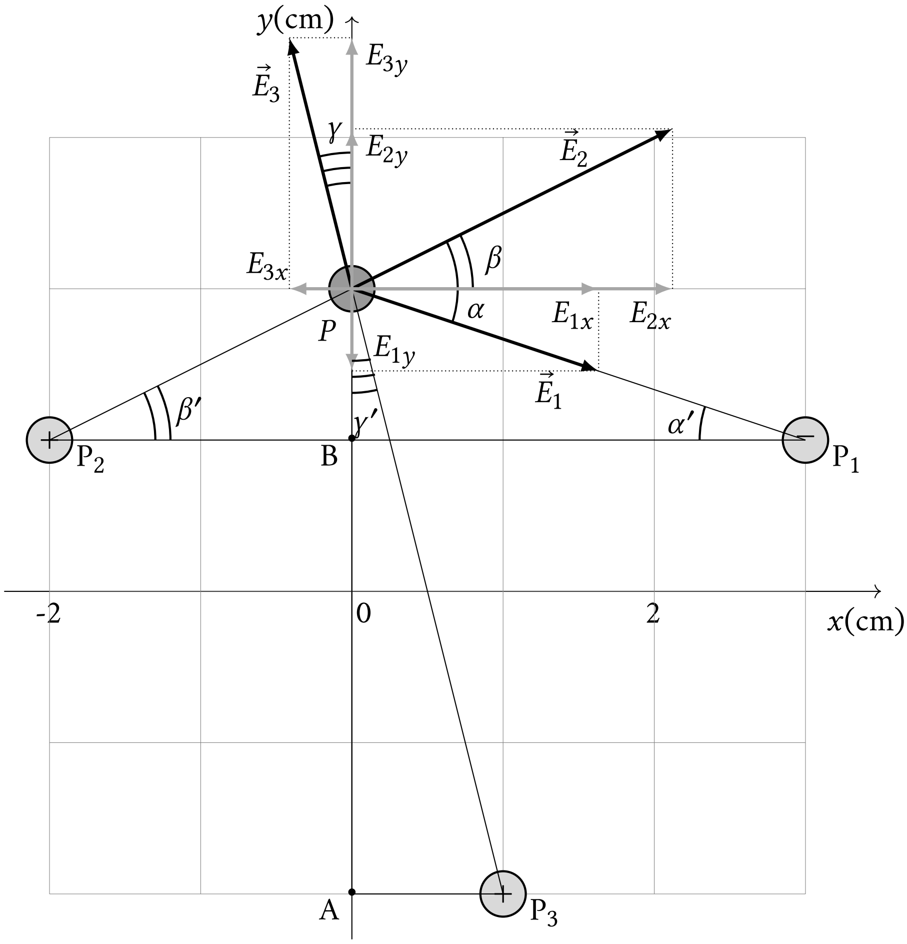
$$\begin{aligned} \overline{PB} &= \overline{BP_1}\tan(\alpha') \\ 1 &= 3\tan\alpha' \\ \alpha = \alpha' &= \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 18{,}4^\circ \end{aligned} \tag{19.19}$$

   Il vettore $\vec{E}_2$ forma un angolo β con l'asse x. L'angolo β è congruente con l'angolo β' del triangolo rettangolo PBP_2. Possiamo ricavare questo angolo sapendo che il cateto ($\overline{PB}$) è uguale all'altro cateto ($\overline{BP_2}$) per la tangente dell'angolo (β') opposto al primo.

$$\begin{aligned} \overline{PB} &= \overline{BP_2}\tan(\beta') \\ 1 &= 2\tan\beta' \\ \beta = \beta' &= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}5^\circ \end{aligned} \tag{19.20}$$

   Infine il vettore $\vec{E}_3$ forma un angolo γ con l'asse y. L'angolo γ è congruente con l'angolo γ' del triangolo rettangolo PAP_3. Possiamo ricavare questo angolo sapendo che il cateto ($\overline{AP_3}$) è uguale all'altro cateto ($\overline{\mathrm{PA}}$) per la tangente dell'angolo (γ') opposto al primo.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}_3} &= \overline{\mathrm{PA}}\tan(\gamma') \\ 1 &= 4\tan\gamma' \\ \gamma = \gamma' &= \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = 14{,}0°\end{aligned} \tag{19.21}$$



A questo punto possiamo calcolare le componenti dei tre vettori rispetto agli assi cartesiani.

$$\begin{aligned}E_{1x} &= E_1\cos\alpha = 4{,}09\times10^5\ \mathrm{N/C} \\ E_{1y} &= E_1\sin\alpha = -1{,}36\times10^5\ \mathrm{N/C}\end{aligned} \tag{19.22}$$

$$\begin{aligned}E_{2x} &= E_2\cos\beta = 5{,}31\times10^5\ \mathrm{N/C} \\ E_{2y} &= E_2\sin\beta = 2{,}65\times10^5\ \mathrm{N/C}\end{aligned} \tag{19.23}$$

$$\begin{aligned}E_{3x} &= E_3\sin\gamma = -1{,}04\times10^5\ \mathrm{N/C} \\ E_{3y} &= E_3\cos\gamma = 4{,}16\times10^5\ \mathrm{N/C}\end{aligned} \tag{19.24}$$

Le componenti del campo totale sono la somma algebrica delle componenti dei tre vettori:

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{tot\,x}} &= E_{1x}+E_{2x}+E_{3x} = \\ &4{,}09\times10^5\ \mathrm{N/C}+5{,}31\times10^5\ \mathrm{N/C}+(-1{,}04\times10^5\ \mathrm{N/C}) = 8{,}36\times10^5\ \mathrm{N/C} \\ E_{\mathrm{tot\,y}} &= E_{1y}+E_{2y}+E_{3y} = \\ &(-1{,}36\times10^5\ \mathrm{N/C})+2{,}65\times10^5\ \mathrm{N/C}+4{,}16\times10^5\ \mathrm{N/C} = 5{,}45\times10^5\ \mathrm{N/C}\end{aligned} \tag{19.25}$$

Calcoliamo infine il modulo del campo elettrico totale:

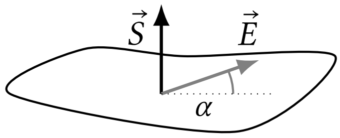
$$E_{\mathrm{tot}} = \sqrt{E_{\mathrm{tot\,x}}^2 + E_{\mathrm{tot\,y}}^2} = \sqrt{(8{,}36 \times 10^5\ \mathrm{N/C})^2 + (5{,}45 \times 10^5\ \mathrm{N/C})^2} = 9{,}98 \times 10^5\ \mathrm{N/C} \quad (19.26)$$

3. L'angolo che il campo forma con l'asse x è dato da questa relazione:

$$\eta = \arctan\left(\frac{E_{\mathrm{tot\,y}}}{E_{\mathrm{tot\,x}}}\right) = \arctan(0{,}652) = 33{,}1^\circ \quad (19.27)$$

19.3 Teorema di Gauss

Esercizio 142 *Trova il flusso del campo elettrostatico $\vec{E}$ attraverso la superficie piana indicata in figura, sapendo che l'intensità del campo è $E = 15\,\mathrm{N/C}$, l'angolo formato con il piano è $\alpha = 25°$ e la superficie ha un'area $A = 23\,\mathrm{cm}^2$.*



Una superficie piana orientata è rappresentata con un vettore $\vec{S}$ di intensità pari all'area della superficie e di direzione perpendicolare alla superficie stessa. Il verso del vettore può essere da una parte o dall'altra della superficie: nel nostro caso è indicato nella figura. Se non fosse indicato nella figura dovremmo darne noi uno a nostro arbitrio: tuttavia i risultati successivi sarebbero diversi a secondo della scelta fatta. La freccia del vettore può essere disegnata in qualsiasi punto della superficie dato che la rappresenta integralmente.

Il campo elettrico dato deve essere uniforme su tutta la superficie altrimenti andrebbe indicato esplicitamente. Se il campo è uniforme indichiamo il vettore preferibilmente nello stesso punto in cui disegniamo quello della superficie orientata. Ricordiamoci però che in ogni punto della superficie c'è il campo e quindi un vettore.

Con queste premesse il flusso del campo elettrico attraverso la superficie è il prodotto scalare del vettore $\vec{E}$ e del vettore $\vec{S}$.

$$\Phi_s(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S} = |\vec{E}||\vec{S}| \cos(\theta) \tag{19.28}$$

L'angolo θ è l'angolo più piccolo tra i due vettori. L'angolo α è invece complementare a quell'angolo.

$$\theta = 90° - \alpha = 65° \tag{19.29}$$

Infine scriviamo:

$$\Phi_s(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S} = 15\,\mathrm{N/C} \cdot 23\,\mathrm{m}^{-4} \cos(65) = 1{,}5\,\mathrm{N\,m^2/C} \tag{19.30}$$

Esercizio 143 *Una carica puntiforme $q = 10\,\mathrm{mC}$ è posta all'interno di una sfera di raggio $18\,\mathrm{cm}$. Determina il flusso del campo elettrico attraverso la sfera.*

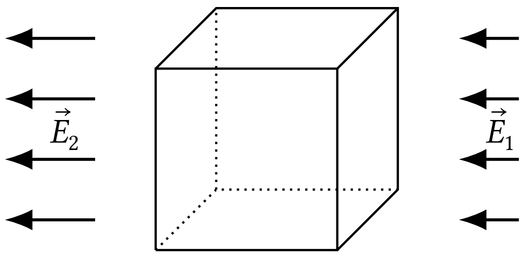
Il teorema di Gauss per l'elettrostatica in forma globale lega il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa con la somma algebrica delle cariche elettriche presenti all'interno della superficie secondo questa relazione:

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0} \tag{19.31}$$

Per cui:

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{10 \times 10^{-3}\,\mathrm{C}}{8{,}854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\,m^2}} = 1{,}13 \times 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2/C} \tag{19.32}$$

Esercizio 144 *Una scatola cubica posta nel vuoto, il cui spigolo misura* 47 cm*, è investita da un campo elettrico perpendicolare alla faccia di destra e sinistra, come indicato nella figura. Il campo sulla faccia destra misura* 13 N/C *e sulla faccia sinistra* 38 N/C*.*



Quanto vale la carica netta presente all'interno del cubo?

Per trovare la carica totale eventualmente posta dentro la superficie delimitata dal cubo possiamo utilizzare il teorema di Gauss per l'elettrostatica in forma globale per legare il flusso del campo elettrico attraverso quella superficie chiusa con la somma algebrica delle cariche elettriche presenti all'interno della superficie stessa.

$$\Phi_{\text{tot}}(\vec{E}) = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0} \tag{19.33}$$

Determiniamo il flusso del campo elettrico attraverso il cubo.

Il flusso del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso una superficie piana orientata $\vec{S}$ vale:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S} = |\vec{E}||\vec{S}| \cos(\theta) \tag{19.34}$$

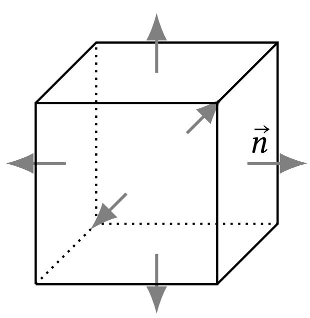
dove abbiamo preso il prodotto scalare tra i vettori $\vec{E}$ e $\vec{S}$, e θ è l'angolo tra i due vettori.

In particolare, relativamente al vettore $\vec{S}$, possiamo distinguere tra il suo modulo S, cioè l'area della superficie, e un versore $\vec{n}$ con la direzione e verso del vettore stesso.

$$\vec{S} = S\vec{n} \tag{19.35}$$

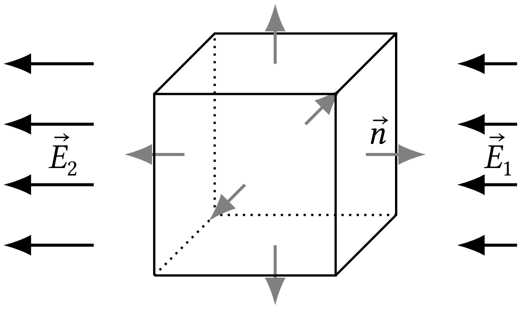
Se la superficie è estesa, ma formata da elementi piani, come sulle facce del cubo, e il campo vettoriale è uniforme sulla superficie, si può ancora usare la formula precedente, estendendola a tutta la superficie: il flusso totale attraverso tutta la superficie (il cubo) sarà la somma algebrica dei flussi attraverso tutti i suoi elementi piani (le facce del cubo).

Dobbiamo poi dare una orientazione alla superficie data. Il teorema di Gauss impone che la scelta non sia arbitraria: *il verso positivo è sempre quello uscente dalla superficie*. Rappresentiamo quanto detto riportando in figura i soli versori $\vec{n}$ associati ad ogni elemento piano di superficie.



L'area di una faccia del cubo è:

$$S = l^2 = (47\ \mathrm{cm})^2 = (0{,}47\ \mathrm{m})^2 = 0{,}221\ \mathrm{m}^2 \tag{19.36}$$



Consideriamo la faccia destra. Vediamo dalla figura che il campo è verso sinistra e il versore della superficie verso destra: l'angolo tra i due vettori è 180°. Per cui:

$$\Phi_{\text{destra}}(\vec{E}) = E_1 S \cos(180°) = 13\ \mathrm{N/C} \cdot 0{,}221\ \mathrm{m}^2 \cdot (-1) = -2{,}87\ \mathrm{N\,m^2/C} \tag{19.37}$$

Consideriamo la faccia sinistra. Vediamo dalla figura che il campo e il versore della superficie sono verso sinistra: l'angolo tra i due vettori è 0°. Per cui:

$$\Phi_{\text{sinistra}}(\vec{E}) = E_2 S \cos(0°) = 38\ \mathrm{N/C} \cdot 0{,}221\ \mathrm{m}^2 \cdot (1) = 8{,}39\ \mathrm{N\,m^2/C} \tag{19.38}$$

Il flusso sulle altre facce è nullo perché da esse non esce o entra alcun campo, per cui il flusso totale del campo elettrico attraverso il cubo vale:

$$\Phi_{\text{tot}}(\vec{E}) = \Phi_{\text{destra}}(\vec{E}) + \Phi_{\text{sinistra}}(\vec{E}) = -2{,}87\ \mathrm{N\,m^2/C} + 8{,}39\ \mathrm{N\,m^2/C} = 5{,}52\ \mathrm{N\,m^2/C} \tag{19.39}$$

Infine la carica netta presente dentro il cubo vale:

$$\Sigma q_i = \Phi_{\text{tot}}(\vec{E})\,\varepsilon_0 = 5{,}52\ \mathrm{N\,m^2/C} \cdot 8{,}854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\,m^2} = 4{,}89 \times 10^{-11}\ \mathrm{C} \tag{19.40}$$

19.4 Campo elettrico di altre distribuzioni di carica

Esercizio 145 *Una carica* $q = -2{,}3\,\mu\mathrm{C}$ *è distribuita uniformemente su un filo rettilineo lungo* 26 dm*. Trova, in modulo direzione e verso, il campo da essa prodotto in punto* P *posto a distanza* $r = 2{,}3$ cm *da esso, lontano dai suoi bordi.*

Il campo elettrico di un filo uniformemente carico e di lunghezza finita è assimilabile ad una distribuzione lineare ed infinita se ci troviamo relativamente vicini al filo e lontani dai suoi estremi, come indicato in questo esercizio. Per cui il modulo del campo, con sufficiente approssimazione, vale:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{19.41}$$

dove λ è la densità di carica lineare del filo e r è la distanza dal filo.

$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{2{,}3\,\mu\mathrm{C}}{26\,\mathrm{dm}} = \frac{2{,}3 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}}{2{,}6\,\mathrm{m}} = 8{,}85 \times 10^{-7}\,\mathrm{C/m} \tag{19.42}$$

$$E = \frac{8{,}85 \times 10^{-7}\,\mathrm{C/m}}{2 \cdot 3,1415 \cdot 8{,}854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}} \cdot 0{,}023\,\mathrm{m}} = 6{,}92 \times 10^{5}\,\mathrm{N/C} \tag{19.43}$$

Il campo ha direzione perpendicolare alla direzione del filo ed è diretto verso di esso, perché la carica in esso distribuita è negativa.

Esercizio 146 *Una carica* $q_1 = 8{,}3\,\mathrm{mC}$ *è distribuita uniformemente su una superficie rettangolare, larga* 66 dm *e alta* 45 dm*. Una carica* $q_2 = -5{,}3\,\mathrm{mC}$ *è distribuita uniformemente su una superficie rettangolare uguale a quella precedente e ad essa parallela, posta a distanza ravvicinata alla precedete, alla sua destra.*

Trova, in modulo direzione e verso, il campo da esse prodotto in punto $\mathrm{P_1}$ *posto a distanza* $r = 2{,}3$ cm *sulla destra della superficie carica negativamente, lontano dai bordi e in un punto* $\mathrm{P_2}$ *posto tra le due superfici, sempre lontano dai loro bordi.*

Il campo elettrico di una superficie piana uniformemente carica e di estensione finita è assimilabile ad una distribuzione piana e infinita se ci troviamo relativamente vicini alla superficie e lontani dai suoi bordi, come indicato in questo esercizio. Per cui il modulo del campo prodotto da una sola superficie, con sufficiente approssimazione, vale:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{19.44}$$

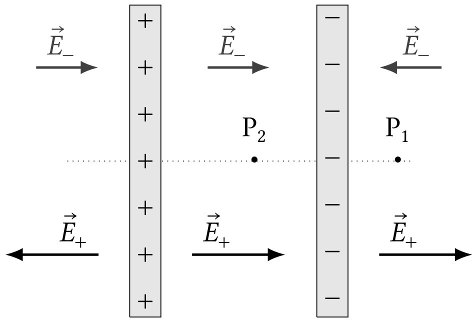
dove σ è la densità di carica superficiale.

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S} = \frac{q_1}{bh} = \frac{8{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{C}}{6{,}6\,\mathrm{m} \cdot 4{,}5\,\mathrm{m}} = \frac{8{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{C}}{29{,}7\,\mathrm{m^2}} = 2{,}79 \times 10^{-4}\,\mathrm{C/m^2} \tag{19.45}$$

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{S} = \frac{q_2}{bh} = \frac{-5{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{C}}{6{,}6\,\mathrm{m} \cdot 4{,}5\,\mathrm{m}} = \frac{-5{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{C}}{29{,}7\,\mathrm{m^2}} = -1{,}78 \times 10^{-4}\,\mathrm{C/m^2} \tag{19.46}$$

Il campo intorno ad una superficie piana uniformemente carica è perpendicolare alla superficie, ha lo stesso valore in ogni punto e si allontana da essa se è positivo o si avvicina ad essa se è negativo. Per cui sapere quale sia l'esatta posizione del punto $\mathrm{P_1}$ tra le superfici non ha importanza, e la posizione del punto P_2 serve solo a sapere che siamo in prossimità della distribuzione e quindi il modello che usiamo è valido.

Rappresentiamo di seguito (non in scala) quanto scritto, in riferimento alle due superfici del problema e per le tre regioni di spazio che si creano. Il punto in cui disegniamo il campo (per ognuna delle tre regioni) non ha importanza ed è rappresentativo di tutti i punti di quella regione.



Calcoliamo il modulo del campo delle due distribuzioni.

$$E_+ = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{2{,}79 \times 10^{-4}\ \mathrm{C/m}}{2 \cdot 8{,}854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}} = 1{,}58 \times 10^{7}\ \mathrm{N/C} \tag{19.47}$$

$$E_- = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{1{,}78 \times 10^{-4}\ \mathrm{C/m}}{2 \cdot 8{,}854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}} = 1{,}00 \times 10^{7}\ \mathrm{N/C} \tag{19.48}$$

Nella regione tra le distribuzioni, come si vede nella figura, i due campi hanno lo stesso verso e direzione e si sommano.

$$E(\mathrm{P}_2) = E_+ + E_- = 1{,}58 \times 10^{7}\ \mathrm{N/C} + 1{,}00 \times 10^{7}\ \mathrm{N/C} = 2{,}58 \times 10^{7}\ \mathrm{N/C} \tag{19.49}$$

Nella regione in cui è posto il punto P_1 i due campi hanno verso opposto e stessa direzione, quindi si sottraggono. Il campo risultante ha il verso del campo E_+.

$$E(\mathrm{P}_1) = E_+ - E_- = 1{,}58 \times 10^{7}\ \mathrm{N/C} - 1{,}00 \times 10^{7}\ \mathrm{N/C} = 0{,}58 \times 10^{7}\ \mathrm{N/C} \tag{19.50}$$

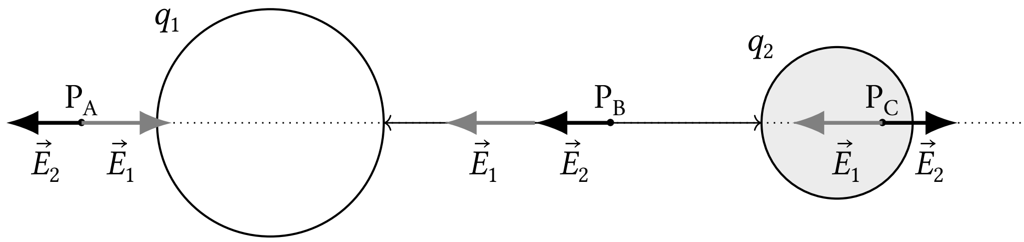
Esercizio 147 *Una carica* $q_1 = -7{,}8$ mC *è distribuita uniformemente su un guscio sferico, largo* 12 cm*. Un'altra carica* $q_2 = 8{,}3$ mC *è distribuita uniformemente su una sfera larga* 8,0 cm *e posta alla destra della prima. La distanza tra i centri delle due distribuzioni è* 20 cm*.*

Trova, in modulo direzione e verso, il campo da esse prodotto lungo l'asse passante per i loro centri, in un punto:

1. P_A *posto a distanza* $d_A = 2{,}3$ cm *sulla sinistra della prima distribuzione.*
2. P_B *posto a distanza* $d_B = 6{,}3$ cm *sulla sinistra della seconda distribuzione.*
3. P_C *posto a distanza* $d_C = 3{,}0$ cm *sulla destra della seconda distribuzione a partire dal centro della sfera.*

Il campo di una distribuzione uniforme su un guscio sferico è uguale a quello di una carica equivalente posta al centro del guscio, se siamo all'esterno del guscio stesso; altrimenti vale zero. Il campo di una distribuzione uniforme su una sfera è uguale a quello di una carica equivalente posta al centro della sfera, se siamo all'esterno della sfera stessa; è invece proporzionale alla distanza dal centro se siamo dentro la sfera. Inoltre il campo di una carica positiva si allontana dalla carica; il campo di una carica negativa è orientato verso la carica.

Di conseguenza possiamo rappresentare (qualitativamente) i punti indicati dal problema e il verso e direzione dei due campi in quei punti.



I raggi delle due sfere sono:

$$R_1 = \frac{12\,\mathrm{cm}}{2} = 6\,\mathrm{cm} \quad ; \quad R_2 = \frac{8\,\mathrm{cm}}{2} = 4\,\mathrm{cm} \tag{19.51}$$

Procediamo con il calcolo delle distanze dei tre punti dai centri delle sfere.

$$\begin{aligned}
d_{A1} &= d_A + R_1 = 2{,}3\,\mathrm{cm} + 6\,\mathrm{cm} = 8{,}3\,\mathrm{cm} \\
d_{A2} &= d_A + 2R_1 + d + R_2 = 2{,}3\,\mathrm{cm} + 2\cdot 6\,\mathrm{cm} + 20\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm} = 38{,}3\,\mathrm{cm} \\
\\
d_{B1} &= (d - d_B) + R_1 = 20\,\mathrm{cm} - 6{,}3\,\mathrm{cm} + 6\,\mathrm{cm} = 19{,}7\,\mathrm{cm} \\
d_{B2} &= d_B + R_2 = 6{,}3\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm} = 10{,}3\,\mathrm{cm} \\
\\
d_{C1} &= d_C + R_2 + d + R_1 = 3{,}0\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm} + 20\,\mathrm{cm} + 6\,\mathrm{cm} = 33\,\mathrm{cm} \\
d_{C2} &= d_C = 3{,}0\,\mathrm{cm}
\end{aligned} \tag{19.52}$$

Calcoliamo il modulo dei due campi nei tre punti.

$$\begin{aligned}
E_1(P_A) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d_{A1}^2} = 9{,}0\times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{7{,}8\times 10^{-3}\,\mathrm{C}}{(0{,}083\,\mathrm{m})^2} = 1{,}02\times 10^{10}\,\mathrm{N/C} \\
E_2(P_A) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{d_{A2}^2} = 9{,}0\times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{8{,}3\times 10^{-3}\,\mathrm{C}}{(0{,}383\,\mathrm{m})^2} = 5{,}09\times 10^{8}\,\mathrm{N/C}
\end{aligned} \tag{19.53}$$

$$\begin{aligned}
E_1(P_B) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d_{B1}^2} = 9{,}0\times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{7{,}8\times 10^{-3}\,\mathrm{C}}{(0{,}197\,\mathrm{m})^2} = 1{,}81\times 10^{9}\,\mathrm{N/C} \\
E_2(P_B) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{d_{B2}^2} = 9{,}0\times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{8{,}3\times 10^{-3}\,\mathrm{C}}{(0{,}103\,\mathrm{m})^2} = 7{,}04\times 10^{9}\,\mathrm{N/C}
\end{aligned} \tag{19.54}$$

$$\begin{aligned}
E_1(P_C) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d_{C1}^2} = 9{,}0\times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{7{,}8\times 10^{-3}\,\mathrm{C}}{(0{,}33\,\mathrm{m})^2} = 6{,}45\times 10^{8}\,\mathrm{N/C} \\
E_2(P_C) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2\cdot d_{C2}}{R_2^3} = 9{,}0\times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{8{,}3\times 10^{-3}\,\mathrm{C}\cdot 0{,}03\,\mathrm{m}}{(0{,}04\,\mathrm{m})^3} = 3{,}50\times 10^{10}\,\mathrm{N/C}
\end{aligned} \tag{19.55}$$

Infine sommiamo algebricamente le componenti dei due campi nei tre punti.

$$\begin{aligned}
E_{tot}(P_A) &= 1{,}02\times 10^{10}\,\mathrm{N/C} - 5{,}09\times 10^{8}\,\mathrm{N/C} = 9{,}7\times 10^{9}\,\mathrm{N/C} \\
E_{tot}(P_B) &= 1{,}81\times 10^{9}\,\mathrm{N/C} + 7{,}04\times 10^{9}\,\mathrm{N/C} = 8{,}9\times 10^{9}\,\mathrm{N/C} \\
E_{tot}(P_C) &= 6{,}45\times 10^{8}\,\mathrm{N/C} - 3{,}50\times 10^{10}\,\mathrm{N/C} = 3{,}4\times 10^{10}\,\mathrm{N/C}
\end{aligned} \tag{19.56}$$

19.5 Lavoro ed energia potenziale

Esercizio 148 *Si consideri una carica puntiforme $Q = 10\,\mathrm{C}$ ferma all'origine degli assi. Determina il lavoro fatto per spostare un'altra carica $Q = 5{,}0\,\mathrm{C}$ dall'infinito al punto* P(0,0 m; 1,0 m; 0,0 m), *assumendo che alla partenza e all'arrivo la velocità della particella sia trascurabile.*

Abbiamo almeno due possibilità per determinare questo lavoro: considerando la variazione di energia potenziale del sistema o determinando il lavoro direttamente dalla definizione di lavoro di una forza.

I metodo

La forza di Coulomb è una forza conservativa. Ad essa è associata una energia potenziale. Il lavoro della forza è la differenza tra l'energia potenziale nella configurazione iniziale e quella finale.

$$L_{ab} = U_a - U_b \tag{19.57}$$

La distanza iniziale tra le particelle è infinita ($a = \infty$). La distanza finale invece può essere trovata con la usuale distanza euclidea tra due punti (la posizione finale della prima e seconda carica).

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,\mathrm{m} = \\ &= \sqrt{(0-0)^2 + (0-1)^2 + (0-0)^2}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{19.58}$$

L'energia potenziale di due cariche puntiformi è:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{19.59}$$

dove r_{12} è la distanza tra le due cariche. Quindi:

$$\begin{aligned} L_{ab} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{a} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{b} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1\,\mathrm{m}}\right) = \\ &= 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot 10\,\mathrm{C} \cdot 5{,}0\,\mathrm{C}\left(\frac{0}{\mathrm{m}} - \frac{1}{1\,\mathrm{m}}\right) = -4{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{19.60}$$

L'indicazione dataci sul fatto che la seconda particella non abbia acquistato velocità stava ad indicare che tutto il lavoro svolto doveva contribuire all'aumento di energia potenziale e non di energia cinetica.

II metodo

Il lavoro compiuto da una forza F per spostare il suo punto di applicazione da un punto a ad un punto b è:

$$L = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{19.61}$$

dove $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ è il prodotto scalare della forza in un punto per lo spostamento infinitesimo $\mathrm{d}\vec{r}$.

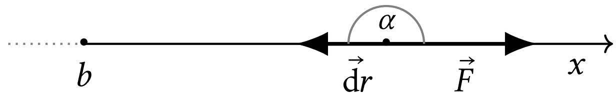
Siamo in questo caso costretti ad usare la più complicata formula integrale per il lavoro dal momento che la forza non rimane costante durante lo spostamento della particella carica.

Il lavoro è quello fatto dalla forza di Coulomb che agisce sulla seconda carica a causa della presenza della prima. La forza di Coulomb è:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{n} \tag{19.62}$$

Il vettore $\vec{n}$ è un vettore unitario diretto come la forza.

La seconda carica viene da una posizione non meglio precisata posta all'infinito: possiamo immaginare che durante tutto lo spostamento la forza e lo spostamento elementare abbiamo la stessa direzione, in modo da semplificare la formulazione matematica senza alterare la fisica. Inoltre, dal momento che entrambe le cariche sono positive, la forza è repulsiva e quindi il suo verso è opposto a quello dello spostamento elementare $\vec{\mathrm{d}r}$. Di conseguenza l'angolo α è 180° e il coseno vale −1. Tuttavia lo spostamento infinitesimo dr è nel verso negativo dell'asse x ed è quindi negativo, annullando il segno del coseno.



Il prodotto scalare $\vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}r}$ é:

$$\vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}r} = |\vec{F}||\vec{\mathrm{d}r}| \cos(\alpha)(-1) = |\vec{F}||\vec{\mathrm{d}r}| = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \tag{19.63}$$

Per cui l'integrale diventa:

$$L = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}r} = \int_a^b \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{\mathrm{a}}^b \tag{19.64}$$

Quindi il lavoro è:

$$L = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{1\,\mathrm{m}} + \frac{1}{\infty}\right] = 9{,}0 \times 10^9 \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} 10\,\mathrm{C} \cdot 5{,}0\,\mathrm{C} \frac{-1}{1\,\mathrm{m}} = -4{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{J} \tag{19.65}$$

Osserviamo infine che il primo metodo è evidentemente più complicato rispetto al secondo: non conviene quasi mai usare questa seconda strategia per risolvere questo tipo di problemi.

Nota matematica

Nel calcolo dell'energia potenziale con le cariche infinitamente distanti abbiamo scritto l'espressione $\frac{1}{\infty}$: propriamente l'infinito non andrebbe usato come una quantità algebrica qualsiasi. Avremmo dovuto calcolare il lavoro per andare da un punto generico c prossimo all'infinito al punto b, per poi fare un passaggio al limite nell'espressione finale.

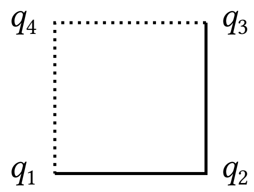
$$L_{cb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{c} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{b} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{1\,\mathrm{m}}\right) \tag{19.66}$$

$$L_{ab} = \lim_{c \to \infty} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{1\,\mathrm{m}}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-1}{1\,\mathrm{m}} \tag{19.67}$$

Analogamente per l'integrale: si tratta infatti di un integrale improprio perché uno degli estremi di integrazione si trova all'infinito.

Esercizio 149 *Ai vertici di tre lati consecutivi di un quadrato di lato* 39 cm *sono poste rispettivamente le tre cariche puntiformi* $q_1 = 10\,\mathrm{mC}$, $q_2 = -46\,\mathrm{mC}$ *e* $q_3 = 72\,\mathrm{mC}$, *come indicato in figura.*

1. *Trova l'energia potenziale del sistema.*
2. *Trova l'energia potenziale del sistema se aggiungiamo una carica* $q_4 = 22\,\mathrm{mC}$ *nel vertice rimasto libero.*



L'energia potenziale di un insieme di cariche puntiformi è uguale (a meno di una costante) alla somma dell'energia potenziale di ogni singola coppia di cariche presente nel sistema, come calcolato nell'esercizio precedente. Si suole considerare come nulla l'energia potenziale delle cariche se queste sono poste a distanza infinita l'una dall'altra.

Il nostro sistema è costituito inizialmente da tre cariche. Le coppie possibili sono tre. Possiamo quindi scrivere che l'energia potenziale totale del sistema è:

$$U_{123} = U_{12} + U_{23} + U_{31} \tag{19.68}$$

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\,\frac{(10\times 10^{-3}\,\mathrm{C})(-46\times 10^{-3}\,\mathrm{C})}{0{,}39\,\mathrm{m}} = -1{,}06\times 10^{7}\,\mathrm{J} \tag{19.69}$$

$$U_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\,\frac{(-46\times 10^{-3}\,\mathrm{C})(72\times 10^{-3}\,\mathrm{C})}{0{,}39\,\mathrm{m}} = -7{,}64\times 10^{7}\,\mathrm{J} \tag{19.70}$$

La distanza tra la carica 3 ed 1 è la diagonale del quadrato:

$$r_{31} = \sqrt{2}l = \sqrt{2}\cdot 0{,}39\,\mathrm{m} = 0{,}55\,\mathrm{m} \tag{19.71}$$

$$U_{31} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{r_{31}} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\,\frac{(72\times 10^{-3}\,\mathrm{C})(10\times 10^{-3}\,\mathrm{C})}{0{,}55\,\mathrm{m}} = 1{,}18\times 10^{7}\,\mathrm{J} \tag{19.72}$$

Quindi l'energia potenziale del sistema è:

$$U_{123} = -1{,}06\times 10^{7}\,\mathrm{J} - 7{,}64\times 10^{7}\,\mathrm{J} + 1{,}18\times 10^{7}\,\mathrm{J} = -7{,}52\times 10^{7}\,\mathrm{J} \tag{19.73}$$

Se adesso aggiungiamo al sistema una quarta carica l'energia potenziale del nuovo sistema è uguale alla somma delle sei coppie di cariche ora presenti, oppure all'energia potenziale del vecchio sistema più l'energia potenziale delle coppie tra la carica nuova ed ognuna delle precedenti.

$$U_{1234} = U_{123} + U_{41} + U_{42} + U_{43} \tag{19.74}$$

$$U_{41} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4 q_1}{r_{41}} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\,\frac{(22\times 10^{-3}\,\mathrm{C})(10\times 10^{-3}\,\mathrm{C})}{0{,}39\,\mathrm{m}} = 5{,}08\times 10^{6}\,\mathrm{J} \tag{19.75}$$

$$U_{42} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4 q_2}{r_{42}} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\,\frac{(22\times 10^{-3}\,\mathrm{C})(-46\times 10^{-3}\,\mathrm{C})}{0{,}55\,\mathrm{m}} = -1{,}66\times 10^{7}\,\mathrm{J} \tag{19.76}$$

$$U_{43} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4 q_3}{r_{43}} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\,\frac{(22\times 10^{-3}\,\mathrm{C})(72\times 10^{-3}\,\mathrm{C})}{0{,}39\,\mathrm{m}} = 3{,}66\times 10^{7}\,\mathrm{J} \tag{19.77}$$

Quindi l'energia potenziale del sistema è:

$$U_{1234} = -7{,}52\times 10^{7}\,\mathrm{J} + 5{,}08\times 10^{6}\,\mathrm{J} - 1{,}66\times 10^{7}\,\mathrm{J} + 3{,}66\times 10^{7}\,\mathrm{J} = -5{,}01\times 10^{7}\,\mathrm{J} \tag{19.78}$$

Esercizio 150 *Tre cariche puntiformi sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato* $l =$ 18 cm.

Le cariche sono: $q_1 = -3$ mC, $q_2 = 11$ mC, $q_3 = -7$ mC.

1. *Trova il lavoro fatto dalle forze del campo se il triangolo dimezza il suo lato.*
2. *Trova il lavoro che noi (una forza esterna) dovremmo compiere per ottenere lo stesso avvicinamento delle cariche.*

Le cariche sono ferme sia all'inizio che alla fine del processo.

Per definizione di energia potenziale il lavoro della forza è la differenza tra l'energia potenziale nella configurazione iniziale e quella finale.

$$L_{ab} = U_a - U_b \tag{19.79}$$

Avere le cariche ferme all'inizio e alla fine del processo ci assicura che il lavoro non sia speso per variare l'energia cinetica dei corpi.

1. L'energia potenziale della configurazione con tre cariche puntiformi è la somma algebrica dell'energia potenziale di ogni coppia. La distanza tra le coppie è la stessa per tutte le cariche, per cui possiamo scrivere:

$$U_a = U_{12} + U_{23} + U_{31} \tag{19.80}$$

$$\begin{aligned} U_a &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(q_1q_2 + q_2q_3 + q_1q_3)}{l} \\ & 9{,}0 \times 10^9 \, \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \frac{(-3\,\mathrm{mC} \cdot 11\,\mathrm{mC} + 11\,\mathrm{mC} \cdot -7\,\mathrm{mC} + -3\,\mathrm{mC} \cdot -7\,\mathrm{mC})}{0{,}18\,\mathrm{m}} \\ & 9{,}0 \times 10^9 \, \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \frac{(-3 \cdot 11 + 11 \cdot -7 + -3 \cdot -7) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C^2}}{0{,}18\,\mathrm{m}} \\ &= -4{,}45 \times 10^6\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{19.81}$$

Nella posizione finale cambia solo la distanza. Se la distanza si dimezza l'energia potenziale raddoppia.

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(q_1q_2 + q_2q_3 + q_1q_3)}{l/2} \\ & 9{,}0 \times 10^9 \, \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \frac{(-3\,\mathrm{mC} \cdot 11\,\mathrm{mC} + 11\,\mathrm{mC} \cdot -7\,\mathrm{mC} + -3\,\mathrm{mC} \cdot -7\,\mathrm{mC})}{0{,}09\,\mathrm{m}} \\ & 9{,}0 \times 10^9 \, \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \frac{(-3 \cdot 11 + 11 \cdot -7 + -3 \cdot -7) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C^2}}{0{,}09\,\mathrm{m}} \\ &= -8{,}90 \times 10^6\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{19.82}$$

Infine il lavoro compiuto dalle forze del campo vale:

$$L_{ab} = U_a - U_b = -4{,}45 \times 10^6\,\mathrm{J} - (-8{,}90 \times 10^6\,\mathrm{J}) = 4{,}45 \times 10^6\,\mathrm{J} \tag{19.83}$$

2. Il lavoro che dovremmo compiere noi è esattamente lo stesso compiuto dalle forze del campo, ma cambiato di segno.

$$L_{F_{est}} = -L_{ab} = -4{,}45 \times 10^6\,\mathrm{J} \tag{19.84}$$

Correttamente questo lavoro è resistente. Infatti il sistema ha un'energia potenziale negativa e quindi le cariche sono legate. Le cariche si attraggono e per avvicinarle dobbiamo "trattenerle" e quindi compire un lavoro negativo.

Esercizio 151 *Trova a che distanza riescono ad arrivare due particelle puntiformi di carica* $q = 14\,\mathrm{mC}$ *e massa* $m = 2{,}45\,\mathrm{nKg}$ *poste nel vuoto, con una energia potenziale di* $1{,}0 \times 10^6\,\mathrm{J}$*, se una delle due procede verso l'altra con una velocità* $v = 23000\,\mathrm{km/s}$.

Si supponga che la prima particella rimanga ferma.

Tra due oggetti puntiformi di ugual carica agisce una forza repulsiva che tende a respingerli. La forza coulombiana tra i corpi è una forza conservativa, l'unica forza che agisce nel sistema. Possiamo quindi applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica (intesa come somma dell'energia potenziale e cinetica del sistema) e ricavare questa energia nelle condizioni iniziali.

Quando invece le particelle, procedendo una verso l'altra, raggiungono la minima distanza di avvicinamento, l'energia cinetica si annulla, dal momento che le particelle si fermano entrambe (la loro velocità reciproca si annulla). Allora l'energia meccanica sarà la stessa iniziale, ma sarà costituita solo da energia potenziale che dipende dalla distanza tra le particelle. L'unica grandezza incognita sarà questa distanza che è la grandezza che stiamo cercando.

Calcoliamo l'energia cinetica e meccanica iniziale.

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{c\,i}} &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\, 2{,}45\,\mathrm{nKg}\,(23000\,\mathrm{km/s})^2 = \\ &= \frac{1}{2}\, 2{,}45 \times 10^{-9}\,\mathrm{Kg}\,(23000 \times 10^3\,\mathrm{m/s})^2 = 6{,}48 \times 10^5\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{19.85}$$

$$E_{\mathrm{m\,i}} = U_{\mathrm{i}} + E_{\mathrm{c\,i}} = 1{,}0 \times 10^6\,\mathrm{J} + 6{,}48 \times 10^5\,\mathrm{J} = 1{,}65 \times 10^6\,\mathrm{J} \tag{19.86}$$

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{m\,f}} &= E_{\mathrm{m\,i}} \\ U_{\mathrm{f}} &= E_{\mathrm{m\,f}} \end{aligned} \tag{19.87}$$

L'energia potenziale di un sistema di due cariche puntiformi è data dalla seguente relazione:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{19.88}$$

Mettiamo in evidenza la distanza r_{12} fra le due cariche:

$$r_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{U_{\mathrm{f}}} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \frac{(14 \times 10^{-3}\,\mathrm{C})(14 \times 10^{-3}\,\mathrm{C})}{1{,}65 \times 10^6\,\mathrm{J}} = 1{,}07\,\mathrm{m} \tag{19.89}$$

19.6 Potenziale elettrostatico

> **Esercizio 152** *Una carica puntiforme* $q = 4{,}0\,\mathrm{mC}$ *è ferma nel punto* $\mathrm{P}_1 \equiv (0{,}0\,\mathrm{m}; -5{,}0\,\mathrm{m}; 4{,}0\,\mathrm{m})$*.*
> *Determina il potenziale elettrostatico generato dalla carica nel punto* $\mathrm{P}_2 \equiv (3{,}0\,\mathrm{m}; 1{,}0\,\mathrm{m}; 2{,}0\,\mathrm{m})$*.*

Il potenziale elettrostatico di un carica puntiforme q in un punto P dello spazio (o del piano, come in questo esercizio) a distanza r dalla carica stessa vale:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{19.90}$$

Nell'usare questa espressione si suppone implicitamente che sia noto il potenziale in un punto a distanza infinita e che lì sia nullo. In questo caso la distanza r vale:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,\mathrm{m} = \\ &= \sqrt{(3-0)^2+(1+5)^2+(2-4)^2}\,\mathrm{m} = \\ &= \sqrt{9+36+4}\,\mathrm{m} = 7{,}0\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{19.91}$$

Infine:

$$V = 9{,}0\times10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\,\frac{4{,}0\,\mathrm{mC}}{7{,}0\,\mathrm{m}} = 5{,}14\times10^6\,\mathrm{V} \tag{19.92}$$

> **Esercizio 153** *Si considerino tre cariche puntiformi:* $q_1 = 5{,}0\,\mathrm{mC}$ *nel punto* $\mathrm{P}_1 \equiv (0{,}0\,\mathrm{m}; -5{,}0\,\mathrm{m})$*;* $q_2 = 12\,\mathrm{mC}$ *nel punto* $\mathrm{P}_2 \equiv (-5{,}0\,\mathrm{m}; 4{,}0\,\mathrm{m})$*;* $q_3 = -4{,}0\,\mathrm{mC}$ *nel punto* $\mathrm{P}_3 \equiv (2{,}0\,\mathrm{m}; 8{,}0\,\mathrm{m})$*.*
> *Determina il potenziale elettrostatico generato dalle cariche nel punto* $\mathrm{P} \equiv (1{,}0\,\mathrm{m}; 2{,}0\,\mathrm{m})$*.*

Come abbiamo visto nel precedente esercizio il potenziale elettrostatico di un carica puntiforme q in un punto dello spazio a distanza r dalla carica stessa vale:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{19.93}$$

Per il potenziale elettrostatico vale il principio di sovrapposizione, quindi il potenziale di un distribuzione di cariche in un punto è semplicemente la somma algebrica del potenziale in quel punto delle singole cariche.

Calcoliamo le tre distanze e i tre potenziali.

$$r_1 = \sqrt{(x_\mathrm{p}-x_1)^2+(y_\mathrm{p}-y_1)^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{(1-0)^2+(2+5)^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{1+49}\,\mathrm{m} = \sqrt{50}\,\mathrm{m} \tag{19.94}$$

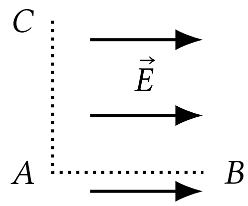
$$r_2 = \sqrt{(x_\mathrm{p}-x_2)^2+(y_\mathrm{p}-y_2)^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{(1+5)^2+(2-4)^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{36+4}\,\mathrm{m} = \sqrt{40}\,\mathrm{m} \tag{19.95}$$

$$r_3 = \sqrt{(x_\mathrm{p}-x_3)^2+(y_\mathrm{p}-y_3)^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{(1-2)^2+(2-8)^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{1+36}\,\mathrm{m} = \sqrt{37}\,\mathrm{m} \tag{19.96}$$

Infine:

$$\begin{aligned} V = V_1+V_2+V_3 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}+\frac{q_3}{r_3}\right) = \\ &= 9{,}0\times10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\left(\frac{0{,}005\,\mathrm{C}}{\sqrt{50}\,\mathrm{m}}+\frac{0{,}012\,\mathrm{C}}{\sqrt{40}\,\mathrm{m}}+\frac{-0{,}004\,\mathrm{C}}{\sqrt{37}\,\mathrm{m}}\right) = \\ &= 9{,}0\times10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}(0{,}707\times10^{-4}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}+18{,}97\times10^{-4}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}-0{,}658\times10^{-4}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}) = 1{,}75\times10^{10}\,\mathrm{V} \end{aligned} \tag{19.97}$$

Esercizio 154 *Calcola il lavoro necessario per spostare una carica* $q = -2{,}45\,\mathrm{mC}$ *in un campo elettrico uniforme da un punto* A *a un punto* B*, e dal punto* A *al punto* C *(come rappresentato in figura), sapendo che l'intensità del campo è* $1500\,\mathrm{N/C}$ *e che la distanza tra i due punti è* $25\,\mathrm{mm}$*, in entrambe i casi.*



Un modo per determinare il lavoro compiuto dalle forze elettriche nello spostamento di una carica q attraverso il campo elettrico è quello di misurare la differenza di potenziale tra i due punti. Infatti:

$$V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B} = \frac{L_\mathrm{AB}}{q} \tag{19.98}$$

Inoltre esiste un legame tra campo elettrico e variazione di potenziale lungo una certa direzione.

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{19.99}$$

Più semplicemente, se siamo in una dimensione e il campo elettrico è costante:

$$V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B} = \vec{E} \cdot \vec{\Delta l} \tag{19.100}$$

dove $\vec{\Delta l}$ è il vettore spostamento tra il punto A e il punto B.

Nel nostro caso nella direzione AB il campo e lo spostamento hanno la stessa direzione e verso quindi il lavoro che le forze del campo devono fare per spostare la carica q dal punto A al punto B vale:

$$\begin{aligned} L_\mathrm{AB} &= (V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B})\, q = E(\Delta l)\, q \cos(0°) = \\ &1500\,\mathrm{N/C} \cdot 0{,}025\,\mathrm{m} \cdot (-2{,}45 \times 10^{-3}\,\mathrm{C}) = -9{,}19 \times 10^{-2}\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{19.101}$$

Invece nella direzione AC il campo e lo spostamento sono perpendicolari quindi il lavoro è nullo.

$$L_\mathrm{AC} = (V_\mathrm{A} - V_\mathrm{C})\, q = E(\Delta l)\, q \cos(90°) = 0\,\mathrm{J} \tag{19.102}$$

Esercizio 155 *Una sfera di materiale conduttore di raggio* $r_\mathrm{s} = 73\,\mathrm{mm}$ *è caricata con una carica* $q = 13\,\mu\mathrm{C}$*. Determina:*

1. *il potenziale in un punto a distanza* $r_1 = 40\,\mathrm{mm}$ *dal centro della sfera;*
2. *il potenziale in un punto a distanza* $r_2 = 80\,\mathrm{mm}$ *dal centro della sfera.*

In un guscio sferico conduttore la carica si distribuisce uniformemente. All'esterno del guscio, a partire dalla sua superficie, il potenziale ed il campo elettrico in ogni punto dello spazio è lo stesso che si avrebbe se la carica fosse posta in un solo punto al centro della sfera. Se invece siamo dentro la sfera il potenziale è uniforme e ha lo stesso valore assunto sulla superficie; il campo elettrico invece è nullo.

Come negli esercizi precedenti possiamo ancora scrivere in generale:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \tag{19.103}$$

1. Se il raggio del guscio è $r_\mathrm{s} = 73$ mm, alla distanza $r_1 = 40$ mm dal centro siamo dentro la sfera. Di conseguenza il potenziale vale:

$$V(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_\mathrm{s}} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{13\,\mu\mathrm{C}}{73\,\mathrm{mm}} = 1{,}60 \times 10^6\,\mathrm{V} \tag{19.104}$$

2. Invece alla distanza $r_2 = 80$ mm siamo fuori dal guscio; di conseguenza possiamo scrivere:

$$V(r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{13\,\mu\mathrm{C}}{80\,\mathrm{mm}} = 1{,}46 \times 10^6\,\mathrm{V} \tag{19.105}$$

Esercizio 156 *Due sfere concentriche, di materiale conduttore, di raggio* $r_1 = 14$ cm *e* $r_2 = 23$ cm*, sono caricate rispettivamente con una carica* $q_1 = 43\,\mu$C *e* $q_2 = 78\,\mu$C*. Determina:*

1. *il potenziale in un punto a distanza* $r_\mathrm{a} = 7$ cm *dal centro delle sfere;*
2. *il potenziale in un punto a distanza* $r_\mathrm{b} = 19$ cm *dal centro delle sfere.*

Per trovare risposta ai due quesiti abbiamo bisogno di conoscere quale sia il potenziale in un punto dello spazio in presenza di un guscio sferico conduttore carico e il principio di sovrapposizione. Il primo aspetto è stato discusso negli esercizi precedenti. Il principio di sovrapposizione ci dice inoltre che il potenziale in un punto dello spazio dove sono presenti due distribuzioni di carica, ognuna delle quali singolarmente determinerebbe in quel punto rispettivamente un potenziale V_1 e V_2, è la somma algebrica dei due potenziali.

1. Il primo punto si trova dentro entrambe le sfere.
   Il potenziale dovuto alla prima sfera vale:

$$V_1(r_\mathrm{a}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{43\,\mu\mathrm{C}}{14\,\mathrm{cm}} = 2{,}76 \times 10^6\,\mathrm{V} \tag{19.106}$$

   Il potenziale dovuto alla seconda sfera vale:

$$V_2(r_\mathrm{a}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{78\,\mu\mathrm{C}}{23\,\mathrm{cm}} = 3{,}05 \times 10^6\,\mathrm{V} \tag{19.107}$$

   Il potenziale totale:

$$V_{tot\,a} = V_1(r_\mathrm{a}) + V_2(r_\mathrm{a}) = 2{,}76 \times 10^6\,\mathrm{V} + 3{,}05 \times 10^6\,\mathrm{V} = 5{,}81 \times 10^6\,\mathrm{V} \tag{19.108}$$

2. Il secondo punto si trova fuori dalla prima sfera, ma dentro la seconda.
   Il potenziale dovuto alla prima sfera vale:

$$V_1(r_\mathrm{b}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{43\,\mu\mathrm{C}}{19\,\mathrm{cm}} = 2{,}04 \times 10^6\,\mathrm{V} \tag{19.109}$$

   Il potenziale dovuto alla seconda sfera vale ancora:

$$V_2(r_\mathrm{b}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{78\,\mu\mathrm{C}}{23\,\mathrm{cm}} = 3{,}05 \times 10^6\,\mathrm{V} \tag{19.110}$$

   Il potenziale totale:

$$V_{tot\,b} = V_1(r_\mathrm{b}) + V_2(r_\mathrm{b}) = 2{,}04 \times 10^6\,\mathrm{V} + 3{,}05 \times 10^6\,\mathrm{V} = 5{,}09 \times 10^6\,\mathrm{V} \tag{19.111}$$

Esercizio 157 *Due sfere di materiale conduttore, rispettivamente di raggio* $r_1 = 73\,\text{mm}$ *e* $r_2 = 58\,\text{mm}$*, sono caricate rispettivamente con una carica* $q_1 = 4{,}5\,\mu\text{C}$ *e* $q_2 = 7{,}2\,\mu\text{C}$.

Le due sfere vengono poste in contatto e allontanate. Determina:

1. *il potenziale a cui si trovavano le sfere prima del contatto e dopo;*
2. *la carica presente su ogni sfera dopo il contatto.*

Il potenziale elettrico di una sfera carica dalla sua superficie e oltre vale:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{19.112}$$

dove q è la carica distribuita sulla sfera e r la distanza dal centro della sfera.

Per cui possiamo determinare il potenziale di ogni sfera:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\frac{4{,}5 \times 10^{-6}\,\text{C}}{7{,}3 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 5{,}55 \times 10^6\,\text{V} \tag{19.113}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\frac{7{,}2 \times 10^{-6}\,\text{C}}{5{,}8 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 11{,}2 \times 10^6\,\text{V} \tag{19.114}$$

Una volta che le due sfere sono poste in contatto si ha una ridistribuzione di carica in modo da stabilire lo *stesso potenziale* su entrambe le sfere. Inoltre, per la *conservazione della carica*, la somma algebrica delle cariche sulle due sfere, prima e dopo il contatto, deve essere la stessa.

$$V_{1\text{f}} = V_{2\text{f}} \tag{19.115}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_{1\text{f}}}{r_1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_{2\text{f}}}{r_2} \\ q_{1\text{i}} + q_{2\text{i}} = q_{1\text{f}} + q_{2\text{f}} = q_{\text{tot}} \end{cases} \tag{19.116}$$

Le due condizioni precedenti ci danno un sistema di due equazioni in due incognite (le nuove cariche sulle sfere). Eliminiamo il fattore comune nella prima equazione e mettiamo in evidenza $q_{2\text{f}}$ nella seconda.

$$\begin{cases} \dfrac{q_{1\text{f}}}{r_1} = \dfrac{q_{2\text{f}}}{r_2} \\ q_{2\text{f}} = q_{\text{tot}} - q_{1\text{f}} \end{cases} \tag{19.117}$$

$$\begin{gathered} \frac{q_{1\text{f}}}{r_1} = \frac{q_{\text{tot}} - q_{1\text{f}}}{r_2} \\ q_{1\text{f}}\,r_2 = (q_{\text{tot}} - q_{1\text{f}})r_1 \\ q_{1\text{f}}\,r_2 + q_{1\text{f}}\,r_1 = q_{\text{tot}}r_1 \end{gathered} \tag{19.118}$$

$$q_{1\text{f}} = \frac{q_{\text{tot}}r_1}{r_1 + r_2} = \frac{(4{,}5 \times 10^{-6}\,\text{C} + 7{,}2 \times 10^{-6}\,\text{C}) \cdot 7{,}3 \times 10^{-3}\,\text{m}}{7{,}3 \times 10^{-3}\,\text{m} + 5{,}8 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 6{,}52 \times 10^{-6}\,\text{C} \tag{19.119}$$

$$q_{2\text{f}} = q_{\text{tot}} - q_{1\text{f}} = (4{,}5 \times 10^{-6}\,\text{C} + 7{,}2 \times 10^{-6}\,\text{C}) - 6{,}5 \times 10^{-6}\,\text{C} = 5{,}18 \times 10^{-6}\,\text{C} \tag{19.120}$$

Possiamo infine calcolare il potenziale su una sfera. Come controllo verifichiamo di ottenere lo stesso potenziale su entrambe le sfere.

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = 9{,}0 \times 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\frac{6{,}52 \times 10^{-6}\,\text{C}}{7{,}3 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 8{,}04 \times 10^6\,\text{V} \tag{19.121}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = 9{,}0 \times 10^9\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{5{,}18 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{5{,}8 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 8{,}04 \times 10^6\ \mathrm{V} \tag{19.122}$$

A seconda degli arrotondamenti nei calcoli intermedi si potrebbero ottenere due risultati leggermente diversi.

19.7 Condensatori

Esercizio 158 *Tra le armature di un condensatore piano, poste a* 1,5 mm *tra loro, è stabilita una d.d.p. di* 70 V. *Quanto vale il campo elettrico tra le armature?*

Tra le armature di un condensatore piano il campo è idealmente uniforme, diretto dall'armatura con carica positiva a quella negativa, e di intensità:

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l} \tag{19.123}$$

Dove dV è la d.d.p. tra le armature e dl la distanza tra le stesse.

$$|E| = \frac{70\,\mathrm{V}}{1{,}5\,\mathrm{mm}} = \frac{70\,\mathrm{V}}{0{,}0015\,\mathrm{m}} = 4{,}6 \times 10^4\,\mathrm{V/m} \tag{19.124}$$

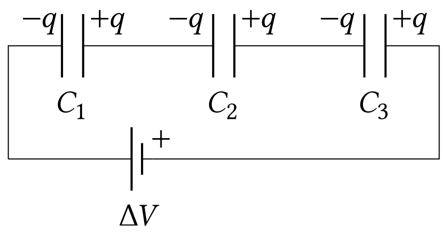
Esercizio 159 *Abbiamo tre condensatori collegati in serie a cui è applicata una differenza di potenziale* $\Delta V = 9{,}0\,\mathrm{V}$. *I condensatori hanno le seguenti capacità:* $C_1 = 37\,\mathrm{nF}$ *;* $C_2 = 13\,\mathrm{nF}$ *;* $C_3 = 48\,\mathrm{nF}$. *Trova:*

1. *la capacità equivalente dei tre condensatori;*
2. *la carica accumulata ai capi di ogni condensatore;*
3. *la tensione ai capi del secondo condensatore.*

1. Se i condensatori sono in serie la capacità equivalente è legata alla somma dei reciproci della capacità dei singoli condensatori:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{C_{\mathrm{tot}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{37 \times 10^{-9}\,\mathrm{F}} + \frac{1}{13 \times 10^{-9}\,\mathrm{F}} + \frac{1}{48 \times 10^{-9}\,\mathrm{F}} = 1{,}248 \times 10^8\,\mathrm{F}^{-1} \\ &C_{\mathrm{tot}} = 8{,}01 \times 10^{-9}\,\mathrm{F} \end{aligned} \tag{19.125}$$

2. Sulle armature dei condensatori posti in serie si accumula la stessa carica.



Determiniamo il valore comune di questa carica applicando la definizione di capacità al condensatore di capacità equivalente ai tre in serie:

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{tot}} &= \frac{q}{\Delta V} \\ q = C_{\mathrm{tot}} \cdot \Delta V &= 8{,}01 \times 10^{-9}\,\mathrm{F} \cdot 9{,}0\,\mathrm{V} = 7{,}21 \times 10^{-8}\,\mathrm{C} \end{aligned} \tag{19.126}$$

3. Per determinare la differenza di potenziale ai capi del secondo condensatore applichiamo anche ad esso la definizione di capacità:

$$C_2 = \frac{q}{\Delta V_2}$$
$$\Delta V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{7{,}21 \times 10^{-8}\,\mathrm{C}}{13 \times 10^{-9}\,\mathrm{F}} = 5{,}55\,\mathrm{V} \tag{19.127}$$

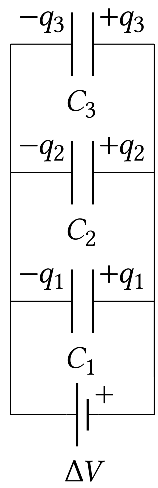
Esercizio 160 *Abbiamo tre condensatori collegati in parallelo a cui è applicata una differenza di potenziale* $\Delta V = 9{,}0\,\mathrm{V}$. *I condensatori hanno le seguenti capacità:* $C_1 = 37\,\mathrm{nF}$ *;* $C_2 = 13\,\mathrm{nF}$ *;* $C_3 = 48\,\mathrm{nF}$. *Trova:*

1. *la capacità equivalente dei tre condensatori;*
2. *la carica accumulata ai capi di ogni condensatore;*
3. *la tensione ai capi del secondo condensatore.*

1. Se i condensatori sono in parallelo la capacità equivalente è uguale alla somma delle capacità dei singoli condensatori:

$$C_{\mathrm{tot}} = C_1 + C_2 + C_3 = 37 \times 10^{-9}\,\mathrm{F} + 13 \times 10^{-9}\,\mathrm{F} + 48 \times 10^{-9}\,\mathrm{F} = 9{,}8 \times 10^{-8}\,\mathrm{F} \tag{19.128}$$

2. Sulle armature dei condensatori posti in parallelo la carica si distribuisce proporzionalmente alla capacità. Determiniamo il valore di questa carica applicando la definizione di capacità ad ogni condensatore:



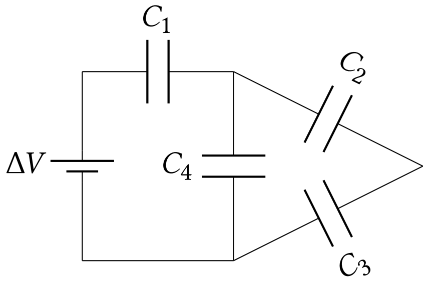
$$C = \frac{q}{\Delta V}$$
$$q_1 = C_1 \cdot \Delta V = 37 \times 10^{-9}\,\mathrm{F} \cdot 9{,}0\,\mathrm{V} = 3{,}33 \times 10^{-8}\,\mathrm{C}$$
$$q_2 = C_2 \cdot \Delta V = 13 \times 10^{-9}\,\mathrm{F} \cdot 9{,}0\,\mathrm{V} = 1{,}17 \times 10^{-8}\,\mathrm{C} \tag{19.129}$$
$$q_3 = C_3 \cdot \Delta V = 48 \times 10^{-9}\,\mathrm{F} \cdot 9{,}0\,\mathrm{V} = 4{,}32 \times 10^{-8}\,\mathrm{C}$$

3. Per la configurazione in parallelo la differenza di potenziale ai capi di ogni condensatore è la stessa, quella applicata al sistema:

$$\Delta V_2 = \Delta V = 9{,}0\,\mathrm{V} \tag{19.130}$$

Esercizio 161 *Abbiamo quattro condensatori collegati ad un generatore come indicato nella figura seguente. Il generatore fornisce una tensione* $\Delta V = 9{,}0\,\mathrm{V}$. *I condensatori hanno le seguenti capacità:* $C_1 = 10\,\mathrm{nF}$ *;* $C_2 = 20\,\mathrm{nF}$ *;* $C_3 = 30\,\mathrm{nF}$ *;* $C_4 = 40\,\mathrm{nF}$. *Trova:*

1. *la capacità equivalente dei quattro condensatori;*
2. *la carica accumulata ai capi di ogni condensatore;*
3. *la tensione ai capi di ogni condensatore.*



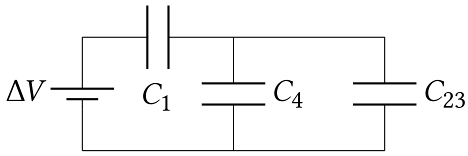
1. Per trovare la capacità equivalente dei quattro condensatori semplifichiamo il circuito, identificando via via quali condensatori sono in serie e quali in parallelo (se possibile).
   Nella nostra figura abbiamo i condensatori 2 e 3 che sono in serie. Disegniamo un nuovo circuito in cui rappresentiamo il condensatore C_{23} di capacità equivalente ai due.

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{20\,\mathrm{nF}} + \frac{1}{30\,\mathrm{nF}} = \frac{3+2}{60\,\mathrm{nF}} = \frac{5}{60\,\mathrm{nF}} \tag{19.131}$$

$$C_{23} = \frac{60\,\mathrm{nF}}{5} = 12\,\mathrm{nF} \tag{19.132}$$

   Ora vediamo che C_{23} e C_4 sono in parallelo.

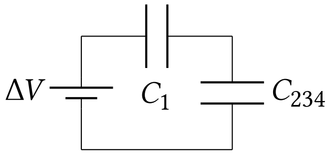
$$C_{234} = C_{23} + C_4 = 12\,\mathrm{nF} + 40\,\mathrm{nF} = 52\,\mathrm{nF} \tag{19.133}$$



   Ora abbiamo C_{234} in serie con C_1.

$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{234}} = \frac{1}{10\,\mathrm{nF}} + \frac{1}{50\,\mathrm{nF}} = \frac{26+5}{260\,\mathrm{nF}} = \frac{31}{260\,\mathrm{nF}}$$

$$C_{tot} = \frac{260\,\mathrm{nF}}{31} = 8{,}4\,\mathrm{nF} \tag{19.134}$$



2. Per determinare la carica accumulata ai capi di ogni condensatore applichiamo la definizione di capacità a tutti i condensatori, partendo dalla configurazione finale precedente e poi procedendo a ritroso. Applicando la definizione di capacità al sistema con un solo condensatore possiamo scrivere:

$$C_{tot} = \frac{q_{tot}}{\Delta V} \quad ; \quad q_{tot} = C_{tot}\Delta V = 8{,}4\,\mathrm{nF} \cdot 9{,}0\,\mathrm{V} = 75{,}6\,\mathrm{nC} \tag{19.135}$$

   La differenza di potenziale applicata è evidentemente quella del generatore. Se poi torniamo indietro alla configurazione con C_{234} e C_1 in serie possiamo dire che la carica che si accumula sulle loro armature è la stessa, ed è la stessa del condensatore equivalente a tutto il circuito.

$$q_1 = q_{234} = q_{tot} \tag{19.136}$$

   Guardiamo alla configurazione precedente: i condensatori C_{23} e C_4 sono in parallelo, quindi hanno in comune la diffenza di potenziale: questa informazione ci consentirà di trovare la carica alle loro armature. Prima determiniamo la differenza di potenziale del condensatore equivalente C_{234}.

$$C_{234} = \frac{q_{234}}{\Delta V_{234}} \quad ; \quad \Delta V_{234} = \frac{q_{234}}{C_{234}} = \frac{75{,}6\,\mathrm{nC}}{52\,\mathrm{nF}} = 1{,}45\,\mathrm{V} \tag{19.137}$$

$$\Delta V_4 = \Delta V_{23} = \Delta V_{234} \tag{19.138}$$

Ora possiamo scrivere:

$$C_4 = \frac{q_4}{\Delta V_4} \quad ; \quad q_4 = C_4 \cdot \Delta V_4 = 40\,\mathrm{nF} \cdot 1{,}45\,\mathrm{V} = 58\,\mathrm{nC} \tag{19.139}$$

$$C_{23} = \frac{q_{23}}{\Delta V_{23}} \quad ; \quad q_{23} = C_{23} \cdot \Delta V_{23} = 12\,\mathrm{nF} \cdot 1{,}45\,\mathrm{V} = 17{,}4\,\mathrm{nC} \tag{19.140}$$

Infine, siccome C_2 e C_3 sono in serie, la carica che si deposita alle loro armature è la stessa che si deposita nel condensatore ad essi equivalente.

$$q_2 = q_3 = q_{23} \tag{19.141}$$

3. Per quanto riguarda la differenza di potenziale ai capi di ciascun condensatore abbiamo già determinato ΔV_4. Conosciamo già tutte le cariche e capacità e quindi, applicando ancora la definizione di capacità scriviamo.

$$C_1 = \frac{q_1}{\Delta V_1} \quad ; \quad \Delta V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{75{,}6\,\mathrm{nC}}{10\,\mathrm{nF}} = 7{,}56\,\mathrm{V} \tag{19.142}$$

$$C_2 = \frac{q_2}{\Delta V_2} \quad ; \quad \Delta V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{17{,}4\,\mathrm{nC}}{20\,\mathrm{nF}} = 0{,}87\,\mathrm{V} \tag{19.143}$$

$$C_3 = \frac{q_3}{\Delta V_3} \quad ; \quad \Delta V_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{17{,}4\,\mathrm{nC}}{30\,\mathrm{nF}} = 0{,}58\,\mathrm{V} \tag{19.144}$$

Esercizio 162 *Un condensatore di capacità $C_1 = 25\,\mu\mathrm{F}$ è sottoposto ad un differenza di potenziale $\Delta V = 12{,}0\,\mathrm{V}$. Una volta carico è collegato in parallelo con un condensatore di capacità $C_2 = 35\,\mu\mathrm{F}$ inizialmente scarico. Trova:*

1. *l'energia inizialmente accumulata nel primo condensatore;*
2. *la tensione ai capi dei due condensatori dopo il collegamento;*
3. *la carica che si accumula nel secondo condensatore dopo il collegamento;*
4. *l'energia accumulata nei due condensatori dopo il collegamento: è verificata la conservazione dell'energia?*

1. L'energia inizialmente accumulata nel primo condensatore vale:

$$E_1 = \frac{1}{2} C_1 (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} 25\,\mu\mathrm{F}\,(12{,}0\,\mathrm{V})^2 = 1{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{J} \tag{19.145}$$

2. Dopo il collegamento la carica si ridistribuisce tra i due condensatori: deve valere il principio di conservazione della carica.
   La carica Q inizialmente accumulata sulle armature del primo condensatore vale:

$$Q = C_1 \Delta V = 25\,\mu\mathrm{F} \cdot 12{,}0\,\mathrm{V} = 3{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{C} \tag{19.146}$$

   Dopo il collegamento, all'equilibrio elettrostatico, i terminali dei due condensatori si troveranno allo stesso potenziale. Di conseguenza la nuova differenza di potenziale ΔV_f a cui si trovano i due condensatori è la stessa. Quindi:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= Q \\ C_1 \Delta V_\mathrm{f} + C_2 \Delta V_\mathrm{f} &= Q \\ (C_1 + C_2)\, \Delta V_\mathrm{f} &= Q \\ \Delta V_\mathrm{f} &= \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{3{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{C}}{25\,\mu\mathrm{F} + 35\,\mu\mathrm{F}} = 5{,}0\,\mathrm{V} \end{aligned} \tag{19.147}$$

3. La carica che si accumula nel secondo condensatore dopo il collegamento vale:

$$q_2 = C_2 \Delta V_\mathrm{f} = 35\,\mu\mathrm{F} \cdot 5{,}0\,\mathrm{V} = 1{,}75 \times 10^{-4}\,\mathrm{C} \tag{19.148}$$

4. L'energia accumulata nei due condensatori dopo il collegamento è la somma dell'energia accumulata in ogni singolo condensatore:

$$\begin{gathered} E_\mathrm{f} = E_1 + E_2 = \\ \frac{1}{2}C_1(\Delta V_\mathrm{f})^2 + \frac{1}{2}C_2(\Delta V_\mathrm{f})^2 = \frac{1}{2}25\,\mu\mathrm{F}\,(5{,}0\,\mathrm{V})^2 + \frac{1}{2}25\,\mu\mathrm{F}\,(5{,}0\,\mathrm{V})^2 = 0{,}75 \times 10^{-3}\,\mathrm{J} \end{gathered} \tag{19.149}$$

   La conservazione dell'energia non è apparentemente verificata perché il processo di ridistribuzione della carica è legato anche ad altri processi in cui confluisce l'energia che qui non compare più.

20 Circuiti elettrici in corrente continua

20.1 Intensità di corrente

Esercizio 163 *La sezione di un conduttore è attraversata da una carica* $q_1 = 0{,}67\,\mathrm{C}$ *ogni* 17 *minuti.*
Qual è l'intensità di corrente?

L'intensità di corrente che attraversa una data sezione di un conduttore è il rapporto tra la carica Q che l'attraversa e l'intervallo di tempo Δt che ha impiegato ad attraversarlo.

$$I = \frac{Q}{\Delta t} \tag{20.1}$$

Nel S.I. l'intensità di corrente si misura in ampere (A), la carica in coulomb (C) e il tempo in secondi. In questo caso dobbiamo trasformare l'intervallo di tempo in secondi.

$$\Delta t = 17\,\mathrm{min} = 17 \cdot 60\,\mathrm{s} = 1020\,\mathrm{s} \tag{20.2}$$

Quindi:

$$I = \frac{0{,}67\,\mathrm{C}}{1020\,\mathrm{s}} = 6{,}56 \times 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{20.3}$$

Esercizio 164 *Un conduttore è attraversato da una corrente d'intensità* $I = 12\,\mathrm{A}$*. Sapendo che la carica di un elettrone vale* $q_e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ *quanti elettroni attraversano ogni secondo il conduttore dato?*

Una intensità di corrente di 12 A significa che ogni secondo una sezione del conduttore è attraversata da una carica di 12 C. Quindi in questo caso la carica Q che passa ogni secondo è data dalla carica di un elettrone q_e per il numero di elettroni N_e che sono passati: $Q = q_e N_e$. Quindi:

$$N_e = \frac{Q}{q_e} = \frac{12\,\mathrm{C}}{1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 7{,}5 \times 10^{19} \tag{20.4}$$

20.2 I e II legge di Ohm

Esercizio 165 *Le estremità di un conduttore, attraversato da una corrente la cui intensità vale* $I = 12\,\mathrm{A}$*, sono sottoposte ad una differenza di potenziale* $V = 125\,\mathrm{V}$.
Quanto vale la resistenza del conduttore?

La I legge di Ohm stabilisce che in un conduttore elettrico, entro opportune conduzioni, il rapporto tra l'intensità della corrente che lo attraversa e la differenza di potenziale o tensione applicata ai suoi estremi è costante: chiamiamo la costante resistenza elettrica del conduttore. Se la corrente è misurata in ampere e la tensione in volt allora la resistenza è misurata in Ohm.

$$R = \frac{\Delta V}{I} \tag{20.5}$$

In questo caso:

$$R = \frac{125\,\mathrm{V}}{12\,\mathrm{A}} = 10{,}6\,\Omega \tag{20.6}$$

Esercizio 166 *Un conduttore di forma cilindrica ha il diametro di* $3\,\mathrm{mm}$*, un lunghezza di* $12\,\mathrm{m}$ *ed è fatto di rame.*

1. *Quanto vale la sua resistenza?*
2. *Qual è l'intensità di corrente da cui è attraversato se applichiamo alle sue estremità una differenza di potenziale* $V = 15\,\mathrm{V}$ *?*

La seconda legge di Ohm ci dice quanto vale la resistenza di un conduttore di forma cilindrica di cui conosciamo sezione S, lunghezza l e resistività ρ ovvero un parametro caratteristico della sostanza di cui è fatto il conduttore. Allora la sua resistenza R è uguale a:

$$R = \rho\frac{l}{S} \tag{20.7}$$

La sezione del conduttore è circolare. Il raggio del conduttore vale:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{3\,\mathrm{mm}}{2} = \frac{0{,}003\,\mathrm{m}}{2} = 0{,}0015\,\mathrm{m} \tag{20.8}$$

La sezione è:

$$S = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot (0{,}0015\,\mathrm{m})^2 = 7{,}07 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \tag{20.9}$$

Dalle tabelle possiamo leggere che la resistività del rame vale $0{,}0178 \times 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}$ e quindi:

$$R = \rho\frac{l}{S} = 0{,}0178 \times 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m} \cdot \frac{12\,\mathrm{m}}{7{,}07 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = \frac{0{,}0178 \cdot 12}{7{,}07}\frac{\Omega\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^2} = 3{,}02 \times 10^{-2}\,\Omega \tag{20.10}$$

Per trovare la corrente che attraversa il conduttore applichiamo la prima legge di Ohm $R = \frac{\Delta V}{I}$, mettendo in evidenza la nostra grandezza incognita, la corrente.

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{15\,\mathrm{V}}{3{,}02 \times 10^{-2}\,\Omega} = 496\,\mathrm{A} \tag{20.11}$$

20.3 Legge di Joule

Esercizio 167 *Una stufa elettrica da* 1500 W *è sottoposta ad una tensione* $V = 225\,\mathrm{V}$. *Qual è la resistenza della stufa?*

Le stufe elettriche sfruttano l'effetto Joule per produrre calore. La potenza della stufa P è legata alla resistenza R della stessa e alla corrente I che l'attraversa o alla tensione V alla quale è sottoposta.
La legge che definisce questo legame è la legge di Joule:

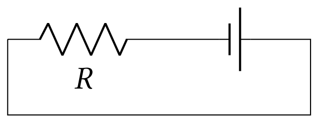
$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \tag{20.12}$$

Possiamo ricavare dall'ultima espressione un legame tra la resistenza incognita e la potenza con la tensione.

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(225\,\mathrm{V})^2}{1500\,\mathrm{W}} = 33{,}75\,\Omega \tag{20.13}$$

20.4 Circuiti di resistenze

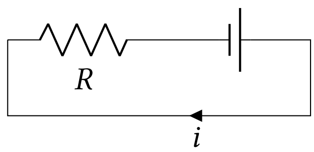
Esercizio 168 *Un circuito è costituito da un resistenza* $R = 150\,\Omega$ *e un generatore di tensione (ideale) da* $V = 12\,\mathrm{V}$. *Trova la corrente erogata dal generatore e il verso della corrente che vi circola*



Il nostro circuito è estremamente elementare. L'unica resistenza e il generatore hanno i capi in comune. Quindi la differenza di potenziale applicata ai capi della resistenza è proprio quella fornita dal nostro generatore. Possiamo applicare alla resistenza la prima legge di Ohm ($R = \frac{\Delta V}{I}$) e ricavare la corrente che la attraversa.

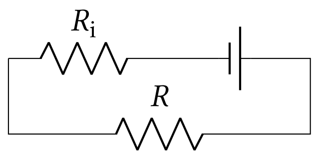
$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{15\,\Omega} = 0{,}8\,\mathrm{A} \tag{20.14}$$

Per trovare il verso della corrente consideriamo che le cariche positive si muovono dal polo positivo (la linea più lunga) al polo negativo (la linea più corta) del generatore. Per cui possiamo disegnare:



Esercizio 169 *Un circuito è costituito da una resistenza $R = 15\,\Omega$ e da un generatore di tensione (reale) da $V = 12\,\mathrm{V}$ la cui resistenza interna vale $R_\mathrm{i} = 5\,\Omega$.*

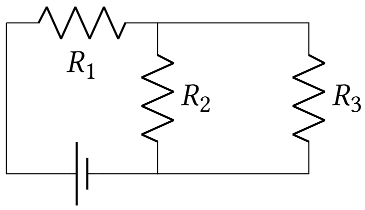
1. *Semplifica le resistenze date ad una sola, spiegando come sono interconnesse.*
2. *Trova la corrente erogata dal generatore.*
3. *Trova la differenza di potenziale ai capi della resistenza R.*



1. Rispetto all'esercizio precedente qui il generatore è reale e quindi ha una sua propria resistenza interna. Il generatore di questo tipo viene rappresentato con una resistenza in serie con un generatore ideale.
   Le due resistenze del circuito sono in serie perché si trovano una di seguito all'altra sullo stesso ramo o filo. Geometricamente appaiono in parallelo, ma la geometria del circuito non ha quasi nessuna importanza: quello che importa è la sua topologia, cioè come gli elementi sono tra loro interconnessi.
   Le due resistenze sono equivalenti ad un'unica resistenza il cui valore è:
   $$R_\mathrm{e} = R + R_\mathrm{i} = 15\,\Omega + 5\,\Omega = 20\,\Omega \tag{20.15}$$
2. Il circuito adesso è ridotto ad un'unica resistenza ed un generatore ideale. Possiamo ricavare la corrente che attraversa il circuito con la prima legge di Ohm.
   $$I = \frac{\Delta V}{R_e} = \frac{12\,\mathrm{V}}{20\,\Omega} = 0{,}6\,\mathrm{A} \tag{20.16}$$
   Rispetto all'esercizio precedente, pur a parità di carico (cioè di resistenza) applicata al generatore, la corrente erogata è diminuita sensibilmente.
3. In questo caso la d.d.p ai capi della resistenza R non è il valore nominale della d.d.p. ai capi del generatore ($V = 12\,\mathrm{V}$), perché quel valore vale solo quando non applichiamo nessun carico. Invece doppiamo tenere conto che la d.d.p. ai capi del generatore ideale è uguale alla somma della caduta di potenziale ΔV_{R_i} ai capi della resistenza interna, più la caduta di potenziale ΔV_R ai capi della resistenza R.
   Quest'ultima d.d.p. può essere ottenuta applicando la prima legge di Ohm alla resistenza R:
   $$R = \frac{\Delta V_R}{I} \tag{20.17}$$
   $$\Delta V_R = RI = 15\,\Omega \cdot 0{,}6\,\mathrm{A} = 9\,\mathrm{V} \tag{20.18}$$
   La tensione effettivamente disponibile ai capi della nostra resistenza è sensibilmente inferiore a quella nominale del generatore. Questo fenomeno sarebbe stato tanto più sensibile quando più piccolo fosse stato il valore della resistenza collegata.

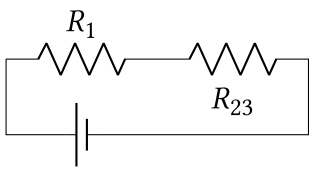
Esercizio 170 *Un circuito è costituito dalle resistenze* $R_1 = 25\,\Omega$*,* $R_2 = 35\,\Omega$ *ed* $R_3 = 80\,\Omega$ *e da un generatore di tensione (ideale) da* $V = 7\,\text{V}$*.*

1. *Semplifica le resistenze date ad una sola, spiegando come sono interconnesse.*
2. *Trova la corrente erogata dal generatore.*
3. *Trova la differenza di potenziale ai capi della resistenza* R_3*.*
4. *Trova la corrente che attraversa la resistenza* R_2*.*

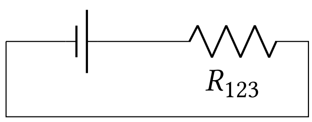


Quando abbiamo più elementi circuitali tra loro interconnessi spesso non dobbiamo guardare a come sono disposti, ma a come sono collegati, a prescindere da quella che è l'orientazione che viene data loro. Quello che è fondamentale è la *topologia* del circuito e non semplicemente la *geometria*.

1. Nel nostro circuito le resistenze R_2 e R_3 sono poste "in parallelo" perché hanno i capi in comune. É vero inoltre che siano disposte parallelamente tra di loro. Tuttavia questo era vero anche nell'esercizio precedente dove ciò nonostante le resistenze erano in serie. La disposizione geometrica da sola non è in grado di fornire indicazioni attendibili.
   Le due resistenze sono quindi equivalenti ad un'unica resistenza che chiamiamo R_{23} e che possiamo trovare sommando gli inversi delle resistenze date:
   $$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{35\,\Omega} + \frac{1}{80\,\Omega} = \frac{23}{560\,\Omega} \tag{20.19}$$
   $$R_{23} = \frac{560}{23}\Omega \simeq 24\,\Omega \tag{20.20}$$
   Il nostro circuito ora è diventato così:

   Le resistenze R_1 e R_{23} sono poste in serie perché si trovano una di seguito all'altra sullo stesso ramo o filo. Esse sono equivalenti ad un'unica resistenza il cui valore è:
   $$R_{123} = R_{23} + R_1 = 24\,\Omega + 25\,\Omega = 49\,\Omega \tag{20.21}$$
   Il circuito si è ulteriormente ridotto:

2. Infine l'unica resistenza rimasta e il generatore hanno i capi in comune. Quindi la differenza di potenziale applicata ai capi della resistenza è proprio quella fornita dal nostro generatore.

Possiamo applicare alla resistenza la prima legge di Ohm ($R = \frac{\Delta V}{i}$) e ricavare la corrente che la attraversa.

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{7\,\mathrm{V}}{49\,\Omega} = 0{,}14\,\mathrm{A} \tag{20.22}$$

3. Per trovare la differenza di potenziale ai capi della resistenza R_3 osserviamo che R_3, R_2 e la loro resistenza equivalente R_{23} hanno i capi in comune: quindi si trovano alla stessa tensione. Allora osserviamo il primo circuito semplificato che abbiamo disegnato, quello con R_{23}. In quella resistenza circola la corrente *i* che abbiamo trovato alla fine. Se applichiamo a questa resistenza la prima legge di Ohm possiamo scrivere:

$$\Delta V_{23} = R_{23} i = 24\,\Omega \cdot 0{,}14\,\mathrm{A} = 3{,}4\,\mathrm{V} \tag{20.23}$$

   Questa è anche la differenza di potenziale ai capi delle resistenze R_2 e R_3.

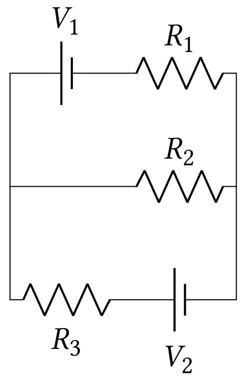
$$\Delta V_{23} = \Delta V_2 = \Delta V_3 \tag{20.24}$$

4. Ora che conosciamo la differenza di potenziale ai capi della resistenza R_2 possiamo ancora applicare la prima legge di Ohm per ricavare la corrente che circola in quel ramo:

$$i_2 = \frac{\Delta V_2}{R} = \frac{3{,}4\,\mathrm{V}}{24\,\Omega} = 0{,}14\,\mathrm{A} \tag{20.25}$$

20.5 Leggi di Kirchhoff

Esercizio 171 *Un circuito è costituito dalle resistenze* $R_1 = 35\,\Omega$, $R_2 = 55\,\Omega$ *ed* $R_3 = 70\,\Omega$ *e da due generatori di tensione (ideali) da* $V_1 = 15\,\mathrm{V}$ *e* $V_2 = 45\,\mathrm{V}$.
Trova la corrente che circola in ogni ramo del circuito, in modulo e verso.



Quando nel circuito abbiamo più generatori possiamo risolvere il circuito, ovvero trovare la corrente che circola in ogni ramo, risolvendo il circuito come se ci fosse un generatore alla volta. Infine la corrente in ogni ramo sarà la somma algebrica della corrente trovata in quel ramo con ogni singolo generatore.

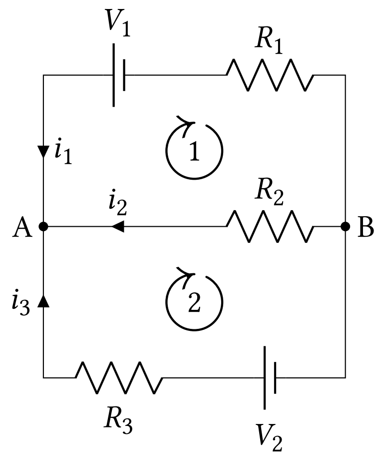
Un metodo più semplice ed efficace è però quello detto di Kirchhoff o delle maglie, che consiste nell'applicare le leggi di Kirchhoff ad un numero opportuno di nodi e maglie, in modo da avere un sistema lineare le cui incognite sono le correnti dei singoli rami del circuito.

La **prima legge di Kirchhoff** stabilisce che la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è uguale a zero. La **seconda legge** stabilisce che la somma algebrica delle cadute di tensione negli elementi di una maglia è uguale a zero.

Se in un circuito ci sono N nodi ed R rami allora i nodi indipendenti (cioè tali che in essi converga una corrente che non converge in tutti gli altri) sono $N - 1$, e le maglie indipendenti sono $R - (N - 1)$.

Nel nostro circuito ci sono due nodi, che chiamiamo A e B: solo uno di questi due è indipendente. Ci sono inoltre tre possibili maglie, ovvero tre possibili circuiti chiusi, ma solo due su tre sono indipendenti. Due delle maglie sono date dai due circuiti che nella figura appaiono come due rettangoli sovrapposti; la terza maglia è quella che si ottiene percorrendo tutto il rettangolo più esterno del circuito di partenza.

Il metodo comincia assegnando un verso arbitrario e un nome a tutte le correnti che circolano nel circuito; si assegna poi un verso arbitrario di percorrenza alle maglie scelte. Ricaviamo quindi la seguente figura.



Adesso applichiamo la prima legge di Kirchhoff al nodo A e la seconda legge alle due maglie. Osserviamo che nel nodo A abbiamo tre correnti entranti (quindi con lo stesso segno) e nessuna corrente uscente. Inoltre il generatore di tensione è preso con il segno più (a primo membro) se il verso di percorrenza della maglia lo attraversa dal polo positivo al negativo. Infine le cadute di tensione nelle resistenze sono prese positive se il verso di percorrenza della maglia è concorde con la corrente del ramo; negative altrimenti.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0\,\mathrm{A} \\ R_2 i_2 - R_1 i_1 + V_1 = 0 \\ R_3 i_3 - R_2 i_2 - V_2 = 0 \end{cases} \tag{20.26}$$

ovvero:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0\,\mathrm{A} \\ 55\,\Omega i_2 - 35\,\Omega i_1 + 15\,\mathrm{V} = 0 \\ 70\,\Omega i_3 - 55\,\Omega i_2 - 45\,\mathrm{V} = 0 \end{cases} \tag{20.27}$$

Possiamo risolvere il sistema lineare con in metodo di sostituzione o di Kramer ad esempio. Usiamo il metodo di sostituzione. Mettiamo in evidenza la corrente i_3 nella prima equazione e sostituiamola nelle altre due.

$$\begin{cases} i_3 = -i_1 - i_2 \\ 55\,\Omega i_2 - 35\,\Omega i_1 + 15\,\mathrm{V} = 0 \\ -70\,\Omega i_1 - 70\,\Omega i_2 - 55\,\Omega i_2 - 45\,\mathrm{V} = 0 \end{cases} \tag{20.28}$$

$$\begin{cases} 55\,\Omega i_2 - 35\,\Omega i_1 + 15\,\mathrm{V} = 0 \\ -70\,\Omega i_1 - 125\,\Omega i_2 - 45\,\mathrm{V} = 0 \end{cases} \tag{20.29}$$

Mettiamo in evidenza i_1 nella prima e seconda equazione:

$$i_1 = \frac{-15\,\mathrm{V} - 55\,\Omega i_2}{-35\,\Omega} = \frac{45\,\mathrm{V} + 125\,\Omega i_2}{-70\,\Omega} \tag{20.30}$$

Ora abbiamo un equazione di primo grado in i_2:

$$\begin{aligned} \frac{3}{7}\text{A} + \frac{11}{7}i_2 &= -\frac{9}{14}\text{A} - \frac{25}{14}i_2 \\ \left(\frac{9}{14} + \frac{3}{7}\right)\text{A} &= \left(-\frac{25}{14} - \frac{11}{7}\right)i_2 \\ \left(\frac{15}{14}\right)\text{A} &= \left(-\frac{47}{14}\right)i_2 \\ i_2 &= -\frac{15}{47} = -0{,}32\,\text{A} \end{aligned} \tag{20.31}$$

Sostituendo questo valore in una delle equazioni (20.30) otteniamo il valore di i_1. Dalla prima equazione del sistema (20.28) otteniamo anche il valore di i_3.

$$i_1 = -0{,}073\,\text{A} \quad ; \quad i_3 = 0{,}39\,\text{A} \tag{20.32}$$

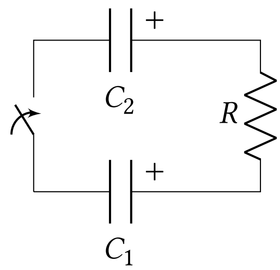
Il verso delle corrente è quello precedentemente disegnato se il segno trovato per la corrente è positivo, come per i_3. Il verso effettivo delle altre due correnti è l'opposto di quanto disegnato, perché per esse abbiamo ottenuto un segno negativo. Non è uno sbaglio aver dato quei versi, ma è la potenza del metodo: disegnare un verso a caso, senza necessità di ragionamenti, per poi trovare il verso effettivo alla fine dei calcoli.

Osservazioni. Nelle precedenti versioni di questo file avevo applicato la seconda legge di kirchhoff nella maniera con cui l'avevo studiata all'università, con le tensioni dei generatori a secondo membro dell'equazione. Mi è sembrato più coerente con la formulazione del principio scrivere tutti i termini a primo membro. In ogni caso c'era il segno sbagliato per tutte e due le tensioni.

Nel caso in cui in un ramo ci siano più resistenze la corrente che le attraversa è la stessa. Se nelle soluzioni di qualche testo compaiono più correnti che rami è solo per specificare la corrente delle singole resistenze.

20.6 Circuiti di resistenze e condensatori

Esercizio 172 *Un circuito è costituito dalla resistenza* $R = 15\,\Omega$ *e da due condensatori di capacità* $C_1 = 13\,\mathrm{nF}$ *e* $C_2 = 24\,\mathrm{nF}$.
Il circuito (mostrato in figura) è inizialmente aperto; nei condensatori è contenuta una carica iniziale rispettivamente $Q_1 = 45\,\mathrm{nC}$ *e* $Q_2 = 83\,\mathrm{nC}$.
Trova la corrente che circola nell'istante in cui il circuito viene chiuso.



Il nostro circuito è formato da un'unica maglia con resistenze e condensatori. Per trovare la corrente erogata nell'istante in cui il circuito è chiuso possiamo applicare alla maglia la seconda legge di Kirchhoff. Nel circuito la resistenza è un elemento passivo; invece i due condensatori (carichi) sono del tutto assimilabili a generatori di tensione. Il segno da attribuire ai vari elementi è determinato dopo aver scelto (arbitrariamente) un verso di percorrenza alla maglia: scegliamo il verso orario.

La somma delle cadute di tensione lungo gli elementi della maglia è uguale alla somma algebrica delle forze elettromotrici applicate. Per convenzione il generatore genera una tensione positiva se è attraversato dal polo positivo a quello negativo. Guardando la figura il condensatore uno è da prendersi col segno positivo; il condensatore due con il segno negativo. Di conseguenza:

$$Ri = \frac{|Q_1|}{C_1} - \frac{|Q_2|}{C_2} \tag{20.33}$$

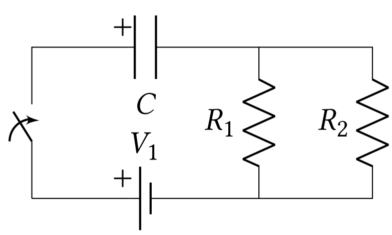
dove Ri è la caduta di tensione ai capi della resistenza e $|Q|/C$ è la differenza di potenziale ai capi di ogni condensatore. Questa condizione vale esattamente solo quando il circuito è stato appena chiuso e le cariche dei condensatori sono ancora quelle indicate.

Ricaviamo quindi la corrente dalla precedente espressione.

$$i = \frac{1}{R}\left(\frac{|Q_1|}{C_1} - \frac{|Q_2|}{C_2}\right) = \frac{1}{15\,\Omega}\left(\frac{45\,\mathrm{nC}}{13\,\mathrm{nF}} - \frac{83\,\mathrm{nC}}{24\,\mathrm{nF}}\right) = 2{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{20.34}$$

Esercizio 173 *Il circuito qui di seguito indicato è formato da due resistenze e un condensatore. All'istante iniziale il circuito è aperto e il condensatore scarico.*
$R_1 = 40\,\Omega$*;* $R_2 = 230\,\Omega$*;* $C = 12\,\mathrm{mC}$*;* $V = 25\,\mathrm{V}$.

1. *Trova la corrente erogata dal generatore al momento della chiusura del circuito.*
2. *Trova la corrente erogata dopo* 1,35 *secondi.*
3. *Trova quanto dobbiamo aspettare affinché la corrente erogata si riduca a tre millesimi di quella iniziale.*



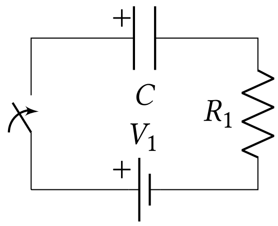
Il circuito rappresentato in figura è un circuito RC. La resistenza è però costituita da due resistenze in parallelo. Per studiare la corrente erogata dal generatore dobbiamo trasformare le resistenze in un'unica resistenza equivalente in modo da avere un usuale circuito RC elementare.

Le due resistenze sono quindi equivalenti ad un'unica resistenza che chiamiamo R_e e che possiamo trovare sommando gli inversi delle resistenze date:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{40\,\Omega} + \frac{1}{230\,\Omega} = \frac{27}{920\,\Omega} \tag{20.35}$$

$$R_e = \frac{920}{27}\Omega \approx 34{,}1\,\Omega \tag{20.36}$$

Il nostro circuito ora è diventato così:



1. In un circuito RC la corrente erogata all'istante iniziale, se il condensatore è inizialmente scarico, è la stessa che si avrebbe se il condensatore non ci fosse. Applicando la prima legge di Ohm possiamo scrivere quindi:

$$i(0\,\mathrm{s}) = i_0 = \frac{V}{R_e} = \frac{25\,\mathrm{V}}{34{,}1\,\Omega} = 0{,}73\,\mathrm{A} \tag{20.37}$$

2. Dopo l'istante iniziale la corrente segue un andamento esponenziale dato dalla seguente legge:

$$i(t) = \frac{V}{R}\mathrm{e}^{\left(-\frac{t}{RC}\right)} \tag{20.38}$$

   Nel nostro caso possiamo scrivere:

$$i(1{,}35\,\mathrm{s}) = \frac{25\,\mathrm{V}}{34{,}1\,\Omega}\mathrm{e}^{\left(-\frac{1{,}35\,\mathrm{s}}{34{,}1\,\Omega \cdot 12\times 10^{-3}\,\mathrm{C}}\right)} = 0{,}027\,\mathrm{A} \tag{20.39}$$

3. Se la corrente si riduce a tre millesimi di quella iniziale deve valere la seguente condizione:

$$\frac{3}{1000}i_0 = i(t) \tag{20.40}$$

   Scriviamo per esteso la precedente equazione e mettiamo in evidenza il tempo incognito.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{1000}\frac{V}{R_e} &= \frac{V}{R}\mathrm{e}^{\left(-\frac{t}{RC}\right)} \\
\frac{3}{1000} &= \mathrm{e}^{\left(-\frac{t}{RC}\right)} \\
\ln\left(\frac{3}{1000}\right) &= -\frac{t}{RC} \\
t = -\ln\left(\frac{3}{1000}\right)RC &= -\ln\left(\frac{3}{1000}\right)\cdot 34{,}1\,\Omega\cdot 12\times 10^{-3}\,\mathrm{C} = 2{,}2\,\mathrm{s}
\end{aligned} \tag{20.41}$$

21 Magnetostatica

Esercizio 174 *Un flusso di particelle cariche, di carica pari a quella dell'elettrone, si muove con velocità* $v = 3{,}8 \times 10^7$ m/s *nel verso positivo dell'asse x, lungo un condotto orizzontale, largo* $l = 2{,}00$ cm*. Sul condotto e perpendicolarmente ad esso, verso l'alto, agisce un campo magnetico uniforme e costante* $B = 0{,}45$ T.

1. *Trova la forza magnetica che agisce su ogni carica nel condotto.*
2. *Trova la d.d.p. di Hall agli estremi del conduttore.*
3. *Trova l'intensità del campo elettrico che può equilibrare la forza magnetica presente.*

1. La forza che agisce sulle particelle è la forza di Lorentz : in questo caso velocità e campo magnetico sono perpendicolari.

$$F = qvB\sin(90°) = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 3{,}8 \times 10^7\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}45\,\mathrm{T} = 2{,}7 \times 10^{-12}\,\mathrm{N} \tag{21.1}$$

2. La differenza di potenziale di Hall agli estremi del conduttore è data da:

$$\Delta V = lvB = 0{,}02\,\mathrm{m} \cdot 3{,}8 \times 10^7\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}45\,\mathrm{T} = 3{,}42 \times 10^5\,\mathrm{V} \tag{21.2}$$

   Questa tensione è elevatissima perché non abbiamo un normale conduttore, ma solo una condotta con particelle ad alta velocità.

3. Per equilibrare la forza magnetica dovremmo avere una forza elettrica uguale e contraria:

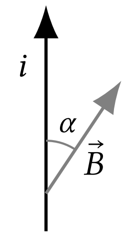
$$F_e = F_m \qquad ; \qquad qE = qvB_1 \tag{21.3}$$

   Per cui il campo elettrico, se la velocità è perpendicolare al campo magnetico come in questo caso, deve valere:

$$E = vB = 3{,}8 \times 10^7\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}45\,\mathrm{T} = 1{,}7 \times 10^7\,\mathrm{V/m} \tag{21.4}$$

21.1 Forza su un filo percorso da corrente (II legge di Laplace)

Esercizio 175 *Un filo rettilineo è attraversato da un corrente continua ed è immerso in un campo magnetico uniforme e costante. Il filo è lungo $l = 4{,}5\,\text{dm}$, la corrente ha una intensità $i = 0{,}70\,\text{A}$, il campo magnetico ha un'intensità $B = 34\,\text{mT}$ e forma un angolo $\alpha = 30°$ con il verso positivo del filo (individuato dal verso della corrente).*
Trova, in modulo direzione e verso, la forza che agisce sul filo.



Sul filo descritto nel testo agisce una forza, quantificata dalla II legge di Laplace:

$$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B} \tag{21.5}$$

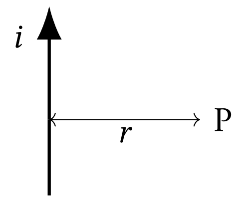
Il modulo della forza vale quindi:

$$F = i|\vec{l}||\vec{B}|\sin(\alpha) = 0{,}70\,\text{A} \cdot 0{,}45\,\text{m} \cdot 0{,}034\,\text{T}\sin(30°) = 5{,}4 \times 10^{-3}\,\text{N} \tag{21.6}$$

Per trovare il verso della forza applichiamo la regola della mano destra. Se indichiamo con l'indice il verso della corrente e con il medio il verso del campo magnetico, la forza avrà il verso del pollice, perpendicolare al piano degli altri due vettori. In questo caso la forza è entrante rispetto al piano del foglio.

21.2 Campo magnetico di un filo percorso da corrente

Esercizio 176 *Un filo rettilineo di lunghezza infinita è attraversato da una corrente di* 2 A.
Trova, in modulo direzione e verso, il campo magnetico a 28 cm *nel punto* P *indicato in figura.*

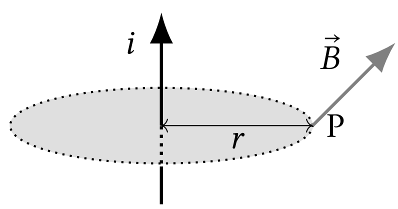


Intorno al filo dato si forma un campo magnetico. Il vettore campo magnetico $\vec{B}$ nel punto P è un vettore che giace su un piano perpendicolare al filo percorso da corrente.

Tracciamo una circonferenza centrata sul filo, passante per il punto P e appartenente al piano. Il *vettore campo magnetico* parte da ogni punto della circonferenza ed è ad essa perpendicolare. Il verso è dato dalla regola della mano destra: se il pollice è orientato come la corrente, le dita avvolgono il filo nel verso del campo magnetico.

Il valore del campo in un punto dipende solo dalla sua distanza r dal filo e dall'intensità i della corrente che lo attraversa, secondo la legge di Biot-Savard :

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} \tag{21.7}$$



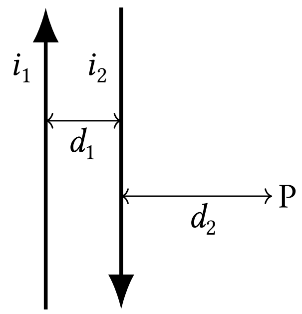
dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto. Quindi:

$$B = \frac{4\pi 10^{-7}\,\text{N}\,\text{A}^{-2}}{2\pi}\frac{2\,\text{A}}{0{,}28\,\text{m}} = 14{,}29 \times 10^{-7}\,\text{N}\,\text{A}^{-2}\,\text{m}^{-1} = 1{,}43 \times 10^{-6}\,\text{T} \tag{21.8}$$

21.3 Campo magnetico di due fili percorsi da corrente: legge di Ampére.

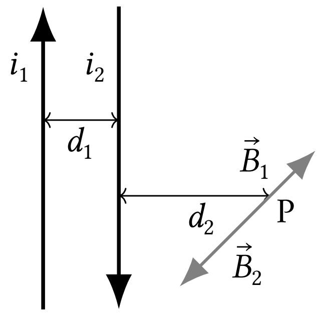
Esercizio 177 *Due fili rettilinei di lunghezza infinita sono rispettivamente attraversati da una corrente* $i_1 = 0{,}50\,\mathrm{A}$ *e* $i_2 = 0{,}85\,\mathrm{A}$. *I fili sono tra loro paralleli, la distanza tra essi è* $d_1 = 35\,\mathrm{mm}$.

1. *Trova, in modulo direzione e verso, il campo magnetico nel punto P indicato in figura, posto a distanza* $d_2 = 124\,\mathrm{mm}$ *dal secondo filo.*
2. *Trova il modulo della forza che agisce tra i due fili.*



1. Intorno a ciascun filo dato si forma un campo magnetico, come indicato nell'esercizio precedente, la cui intensità è data dalla legge di Biot-Savard.

   Guardando al verso della corrente indicato, per la regola della mano destra, nel punto P si forma un campo magnetico $\vec{B}_1$ entrante nel piano del foglio, e un campo magnetico $\vec{B}_2$ uscente. Il campo magnetico totale ha un'intensità pari alla differenza tra i moduli di questi due vettori.



   La distanza del punto P dal filo 2 è:

$$r_2 = d_2 = 124\,\mathrm{mm} = 0{,}124\,\mathrm{m} \tag{21.9}$$

   La distanza del punto P dal filo 1 è:

$$r_1 = d_1 + d_2 = 35\,\mathrm{mm} + 124\,\mathrm{mm} = 159\,\mathrm{mm} = 0{,}159\,\mathrm{m} \tag{21.10}$$

   Applichiamo la legge di Biot-Savard per trovare il campo dei due fili:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} \tag{21.11}$$

   dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto. Quindi:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1}{r_1} = \frac{4\pi 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}}}{2\pi}\frac{0{,}5\,\mathrm{A}}{0{,}159\,\mathrm{m}} = 6{,}29\times10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}\,m^{-1}} = 6{,}29\times10^{-7}\,\mathrm{T} \tag{21.12}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_2}{r_2} = \frac{4\pi 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}}}{2\pi}\frac{0{,}85\,\mathrm{A}}{0{,}124\,\mathrm{m}} = 13{,}7\times10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}\,m^{-1}} = 13{,}7\times10^{-7}\,\mathrm{T} \tag{21.13}$$

   Diamo, a nostro arbitrio, il segno positivo al verso del campo B_1 in P e negativo a quello del campo B_2. Quindi, facendo la somma algebrica delle componenti:

$$B_{\mathrm{tot}} = B_1 + B_2 = 6{,}29\times10^{-7}\,\mathrm{T} - 13{,}7\times10^{-7}\,\mathrm{T} = -7{,}42\times10^{-7}\,\mathrm{T} \tag{21.14}$$

   Il campo totale ha il verso del campo B_2, quindi esce dal piano del foglio, verso chi guarda.

2. Tra i due fili si manifesta una forza repulsiva per il fatto di avere due correnti parallele che si muovono in verso opposto tra loro. La legge di Ampère quantifica la forza per unità di lunghezza l che si manifesta sui fili:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2}\frac{i_1\cdot i_2}{d} = \frac{4\pi 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}}}{2}\frac{0{,}50\,\mathrm{A}\cdot 0{,}85\,\mathrm{A}}{0{,}035\,\mathrm{m}} = 7{,}63\times10^{-6}\,\mathrm{N/m} \tag{21.15}$$

21.4 Flusso del campo magnetico

Esercizio 178 *Trova il flusso di un campo magnetico* $B = 0{,}055\ \mathrm{T}$, *costante e uniforme, attraverso una spira piana, rettangolare, larga* $l = 6{,}8\ \mathrm{cm}$ *e alta* $h = 2{,}7\ \mathrm{cm}$, *sapendo che l'angolo formato dal campo magnetico e dalla spira vale* $\alpha = 25°$.

Il flusso del vettore $\vec{B}$ attraverso una superficie piana $\vec{S}$ è:

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = |\vec{B}||\vec{S}| \cos \alpha \tag{21.16}$$

dove α è l'angolo che il vettore $\vec{B}$ forma con la superficie orientata $\vec{S}$ ovvero con la normale alla superficie stessa.

Dobbiamo quindi dare una orientazione alla superficie data. Una superficie piana può avere due orientazioni individuate dalle due possibili normali al piano della superficie e uscenti da essa.

Si può scegliere una delle due normali avendo scelto un verso di percorrenza del contorno della superficie. Il verso della normale è scelto in modo tale che un osservatore che veda la normale attraversarlo dai piedi alla testa veda il verso di percorrenza del contorno della superficie in senso antiorario.

Nel nostro problema non viene detto né quale sia il verso di percorrenza del contorno della superficie, né quale sia la direzione della normale. Non possiamo quindi dare un segno al flusso. Troviamo solo il modulo.

L'area della spira è:

$$S = lh = (6{,}8\ \mathrm{cm}) \cdot 2{,}7\ \mathrm{cm} = 18{,}36\ \mathrm{cm}^2 = 1{,}836 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2 \tag{21.17}$$

Quindi il flusso vale:

$$\Phi(\vec{B}) = BS \cos \alpha = 0{,}055\ \mathrm{T} \cdot 1{,}836 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2 \cdot \cos 25° = 9{,}2 \times 10^{-5}\ \mathrm{Wb} \tag{21.18}$$

Esercizio 179 *Un solenoide è realizzato con* 10 m *di filo strettamente avvolto ad un cilindro di alluminio largo* 10 cm *e lungo* 20 cm. *La resistenza del filo è* $R_1 = 10\ \Omega$. *Ai suoi capi è applicata una differenza di potenziale di* 25 V.

1. *Trova l'intensità del campo magnetico presente all'interno del solenoide.*
2. *Trova di quanto varia con la presenza del blocco di alluminio.*

1. Il campo magnetico all'interno di un solenoide, attraversato da corrente continua, può essere considerato uniforme se la sua lunghezza è più grande della sua larghezza. Se valgono queste condizioni l'intensità del campo è data dalla seguente relazione:

   $$B = \mu_0 \frac{Ni}{l} \tag{21.19}$$

   dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto, N il numero di spire da cui è formato, i la corrente che lo attraversa e l la lunghezza del solenoide.
   Nel nostro caso non sappiamo quante siano le spire. Per trovare quante spire possiamo ottenere con la lunghezza di filo dato, applichiamo due possibili metodi.
   Primo metodo.

Il filo, in prima approssimazione, deve compiere intorno al cilindro un numero di giri proporzionale alla lunghezza della circonferenza. Per cui:

$$N = \frac{l_f}{2\pi r} = \frac{10\ \text{m}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot \dfrac{0{,}10\ \text{m}}{2}} = 31{,}8 \tag{21.20}$$

Secondo metodo.
Svolgiamo il filo avvolto intorno al cilindro facendo ruotare il cilindro su un piano. Allora possiamo considerare il filo avvolto come se fosse la diagonale di un rettangolo, la cui altezza corrisponde alla lunghezza del solenoide. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo formato dalla diagonale d, la base (incognita) b e l'altezza h, possiamo scrivere:

$$b = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{(10\ \text{m})^2 - (0{,}20\ \text{m})^2} = 9{,}998\ \text{m} \tag{21.21}$$

Il numero di spire N corrisponde al rapporto tra la base di questo rettangolo e la circonferenza alla base del solenoide.

$$N = \frac{b}{2\pi r} = \frac{9{,}998\ \text{m}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot \dfrac{10\ \text{cm}}{2}} = 31{,}8 \tag{21.22}$$

In questo caso otteniamo lo stesso risultato perché il filo forma delle spire molto compatte. Se il filo fosse stato più corto la prima approssimazione sarebbe stata meno accettabile.

L'intensità di corrente la possiamo trovare con la prima legge di Ohm:

$$i = \frac{V}{R_1} = \frac{25\ \text{V}}{10\ \Omega} = 2{,}5\ \text{A} \tag{21.23}$$

Infine:

$$B = 4\pi 10^{-7}\ \text{N}\,\text{A}^{-2} \cdot \frac{31{,}8 \cdot 2{,}5\ \text{A}}{0{,}20\ \text{m}} = 5{,}0 \times 10^{-4}\ \text{T} \tag{21.24}$$

2. Se all'interno del solenoide è presente un materiale (l'alluminio) di permeabilità magnetica relativa μ_r, allora il campo magnetico vale:

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{l} \tag{21.25}$$

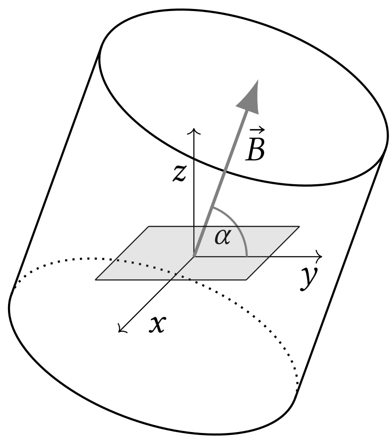
Tuttavia l'alluminio è una sostanza paramagnetica e la permeabilità magnetica relativa è praticamente uguale a uno: il campo magnetico ha lo stesso valore che abbiamo già riportato per il vuoto.

21.5 Momento magnetico di una spira piana

Esercizio 180 *Una spira piana quadrata, il cui momento magnetico di dipolo è* $0{,}3\,\mathrm{Am}^2$*, è posta sul piano* xy *centrata sull'asse z, come indicato in figura (non in scala).*

Un solenoide lungo $4\,\mathrm{dm}$ *formato da* 250 *spire, percorso da una corrente di* $1{,}4\,\mathrm{A}$ *e largo* $7\,\mathrm{cm}$ *è centrato nello stesso punto in posizione reclinata, in modo tale che il campo magnetico al suo interno, orientato verso l'alto, formi un angolo* $\alpha = 34°$ *con il piano* xy*. Calcola:*

1. *il campo magnetico all'interno del solenoide;*
2. *il modulo del momento torcente la spira.*



1. Il campo magnetico all'interno di un solenoide attraversato da corrente continua può essere considerato uniforme se la sua lunghezza è più grande della sua larghezza, come in questo caso. Questo campo ha un'intensità:

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l} \tag{21.26}$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto, N il numero di spire, i la corrente e l la lunghezza del solenoide. In questo caso:

$$B = 4\pi 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}} \cdot \frac{250 \cdot 1{,}4\,\mathrm{A}}{0{,}07\,\mathrm{m}} = 6{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{T} \tag{21.27}$$

2. Il momento magnetico di dipolo della spira è orientato come la spira stessa, quindi in direzione perpendicolare al piano della spira, lungo l'asse z.
La spira è sottoposta ad un momento torcente:

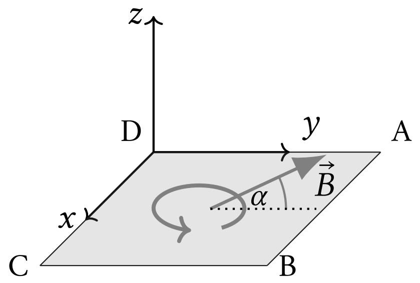
$$\vec{M} = \vec{\mu}_m \wedge \vec{B} \tag{21.28}$$

dove $\vec{\mu}_m$ è il momento magnetico della spira. L'angolo tra spira e campo non è l'angolo α indicato in figura, ma l'angolo complementare formato dalla perpendicolare alla spira e il vettore campo magnetico.
In modulo:

$$M = \mu_m B \sin(90° - 34°) = 0{,}3\,\mathrm{Am}^2 \cdot 6{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{T} \cdot 0{,}829 = 1{,}57 \times 10^{-3}\,\mathrm{Nm} \tag{21.29}$$

Esercizio 181 *Una spira piana quadrata è immersa in un campo magnetico uniforme e costante. Il filo con cui è fatta la spira è di rame, largo* 0,23 mm, *di sezione circolare. Il lato della spira è lungo* 25 cm. *Il campo magnetico B, di intensità* 0,15 T, *forma un angolo di $\alpha = 25°$ con il piano della superficie della spira, ed è parallelo al piano yz, come illustrato in figura. La spira è alimentata con un generatore ideale di tensione a* 12 V. *Il verso della corrente è indicato in figura.*

1. *Trova la forza che il campo magnetico esercita su ogni lato della spira, in modulo, direzione e verso.*
2. *Trova il momento magnetico della spira.*



1. La forza che agisce su ogni lato della spira è legata alla corrente che l'attraversa. Per determinare questa corrente applichiamo la prima legge di Ohm al circuito e, prima ancora, la secondo legge per determinare la resistenza totale del filo:

$$R = \rho\frac{l}{S} \tag{21.30}$$

dove ρ è la resistività del materiale di cui è fatto il filo (rame), l la lunghezza del filo e S l'area della sezione del filo (area di un cerchio).

$$S = \pi r^2 = 3{,}1415 \cdot \left(\frac{0{,}23 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}\right)^2 = 4{,}15 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^2 \tag{21.31}$$

$$R = 1{,}68 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}\frac{0{,}25\,\mathrm{m}}{4{,}15 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^2} = 0{,}101\,\Omega \tag{21.32}$$

La corrente che circola vale:

$$i = \frac{V}{R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{0{,}101\,\Omega} = 119\,\mathrm{A} \tag{21.33}$$

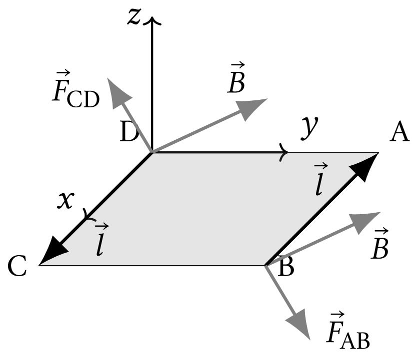
Su un tratto di filo rettilineo percorso da una corrente i agisce una forza (II legge di Laplace):

$$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B} \tag{21.34}$$

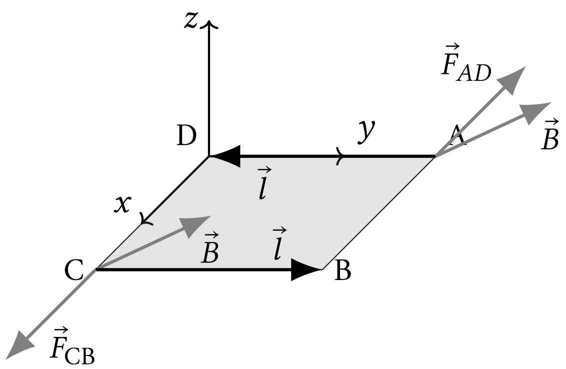
dove $\vec{l}$ è la lunghezza del filo a cui stiamo attribuendo una direzione e un verso, tipicamente quello della corrente che l'attraversa.
Cominciamo dal lato AB. l'angolo che il verso e direzione di l forma con il campo è 90°. Il modulo della forza vale:

$$F_{\mathrm{AB}} = ilB\sin(90°) = 119\,\mathrm{A} \cdot 0{,}25\,\mathrm{m} \cdot 0{,}15\,\mathrm{T} = 4{,}46\,\mathrm{N} \tag{21.35}$$

Il lato CD si trova in una situazione simile e il modulo del campo è lo stesso del lato AB.



Usando la regola della mano destra per trovare la direzione e verso della forza $\vec{F}_{AB}$ troviamo, come indicato nella figura precedente, che questa forza è diretta verso destra in basso. La forza $\vec{F}_{CD}$ è diretta invece nella stessa direzione, ma in verso contrario, verso sinistra in alto. Le due forze formano una coppia che tende a far ruotare la spira in verso antiorario intorno ad un'asse parallelo all'asse x.
Guardando al lato AD in esso l'angolo tra il lato e il vettore campo magnetico è $180° - \alpha$.



Per cui il modulo della forza vale:

$$F_{AB} = ilB\sin(180° - 25°) = 119\,\text{A} \cdot 0{,}25\,\text{m} \cdot 0{,}15\,\text{T} \cdot \sin(155°) = 1{,}89\,\text{N} \tag{21.36}$$

Questa forza è perpendicolare al lato AD e diretta verso l'esterno.
Nelle ultime figure abbiamo segnato campo magnetico e forza nei vertici della spira. Tuttavia il campo è presente in ogni punto della spira e la forza la possiamo pensare applicata, più correttamente, nel centro di ogni lato.
Per quanto riguarda il lato CB il modulo della forza è lo stesso, la direzione anche, ma il verso è contrario. L'angolo è α, che ha lo stesso seno. Le due forze stirano la spira, ma non determinano alcuna coppia.

$$F_{CB} = ilB\sin(\alpha) = 119\,\text{A} \cdot 0{,}25\,\text{m} \cdot 0{,}15\,\text{T} \cdot \sin(25°) = 1{,}89\,\text{N} \tag{21.37}$$

2. Il momento magnetico della spira è un vettore orientato come la normale al piano della spira. Il verso è dato con la regola della mano destra: orientate le dita come il verso della corrente allora il pollice segue il verso del momento magnetico. Il modulo è dato dal prodotto della corrente per l'area della spira:

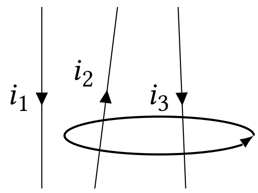
$$m = iA = il^2 = 119\,\text{A} \cdot (0{,}25\,\text{m})^2 = 7{,}44\,\text{Am}^2 \tag{21.38}$$

Il verso del vettore è nel verso positivo dell'asse z.

21.6 Teorema di Ampére

Esercizio 182 *Trova la circuitazione del campo magnetico lungo il percorso curvilineo orientato della figura, sapendo che i fili percorsi da corrente sono di lunghezza infinita e l'intensità della corrente che gli attraversa è* $i_1 = 2\,\mathrm{A}$*,* $i_2 = 4\,\mathrm{A}$*,* $i_3 = 7\,\mathrm{A}$*.*

(Si consideri la freccia indicata sul percorso curvilineo in prospettiva davanti al piano della figura).



La circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa vale, secondo il teorema circuitazionale di Ampére, quanto la somma algebrica delle correnti concatenate con la linea chiusa, moltiplicate per la permeabilità magnetica del vuoto.

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum i_n \tag{21.39}$$

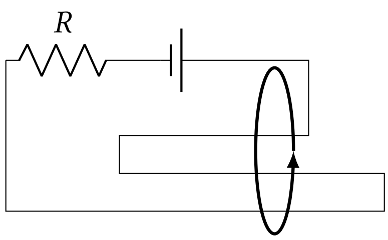
La forma della linea chiusa e il calcolo matematico dell'integrale, come in questo caso, non hanno solitamente alcuna rilevanza. Ciò che è fondamentale è capire quali siano le correnti concatenate. Una corrente è detta concatenata con una linea chiusa se attraversa *qualsiasi* superficie avente quella linea come contorno; il verso della corrente è considerato positivo quando orientando il pollice della mano destra come il verso della corrente le altre dita seguono il verso di percorrenza indicato della linea.

Nel nostro caso quale che sia la superficie che ha il percorso dato come contorno (come una bolla di sapone che partisse dal percorso) essa verrà sempre bucata dalle correnti i_2 e i_3; non così per la corrente i_1, soprattutto se la superficie è abbastanza piccola. Quindi i_2 e i_3 sono concatenate al percorso, i_1 invece no. Per stabilire il loro segno orientiamo il pollice della mano destra come il loro verso: i_2 è positiva e i_3 è negativa. Infine possiamo scrivere:

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(-i_2 + i_3) = 4\pi 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}}(4\,\mathrm{A} - 7\,\mathrm{A}) = -3{,}8 \times 10^{-6}\,\mathrm{Tm} \tag{21.40}$$

Esercizio 183 *Trova la circuitazione del campo magnetico lungo il percorso curvilineo orientato della figura, sapendo che la tensione ai capi del generatore vale* $\Delta V = 12\,\mathrm{V}$ *e la resistenza è* $R = 50\,\Omega$*.*

(Si consideri la freccia indicata sul percorso curvilineo in prospettiva sotto il piano della figura).



La circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa vale, secondo il teorema circuitazionale di Ampére, quanto la somma algebrica delle correnti concatenate con la linea chiusa, moltiplicate per la permeabilità magnetica del vuoto.

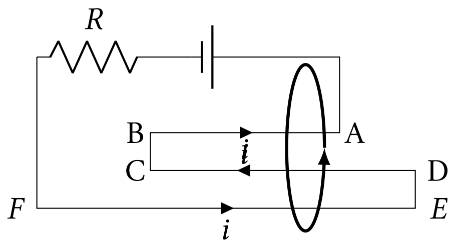
$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum i_n \tag{21.41}$$

Troviamo la corrente che circola nel circuito applicando la I legge di Ohm:

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{50\,\Omega} = 0{,}24\,\mathrm{A} \tag{21.42}$$

Ricordiamoci che il verso positivo della corrente è quello delle cariche positive: esse fluiscono dal polo positivo del generatore (la linea più lunga) al polo negativo (la linea più corta).

Per trovare quali siano le correnti concatenate e dare loro un segno nella legge di Ampére diamo un nome ai tratti di filo che attraversano il piano della spira come nella figura seguente e indichiamo il verso della corrente in quei tratti (la corrente in questo circuito con una sola maglia è sempre la stessa).



Primo metodo

Consideriamo i fili che attraversano il piano della linea curva: sono tre. I tratti AB e CD hanno correnti uguali e di segno opposto, quindi si annullano a vicenda. Il tratto FE ha una corrente da prendere con il segno positivo, per la regola della mano destra. Per cui possiamo scrivere:

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 i = 4\pi 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}} \cdot 0{,}24\,\mathrm{A} = 3{,}0 \times 10^{-7}\,\mathrm{Tm} \tag{21.43}$$

Secondo metodo

Se facciamo scorrere il percorso chiuso verso sinistra, pur senza rompere mai il circuito, osserviamo che solo il tratto FE rimane dentro di esso. Inoltre, anche posizionando il percorso in qualsiasi altra maniera rimane sempre un filo al suo interno. Ne deduciamo che una sola è la corrente concatenata ed è quella del tratto FE. Ritroviamo così il risultato del metodo precedente.

22 Moto di cariche elettriche

In tutti gli esercizi proposti in questo capitolo, salvo diversa indicazione, abbiamo trascurato l'eventuale presenza della forza di gravità agente sui corpi carichi.

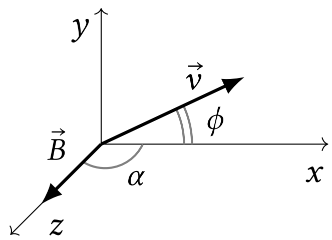
22.1 Carica in moto in un campo magnetico (Forza di Lorentz)

Esercizio 184 *Una corpo puntiforme di carica* $q = 3{,}6 \times 10^{-6}$ C *si muove con una velocità iniziale* $v = 12 \times 10^{2}$ m/s *nel piano* xy *con un angolo* $\phi = 25°$ *rispetto all'asse x. All'istante* $t = 0$ s *si trova nell'origine degli assi.*

In quell'istante il corpo attraversa una regione di spazio nel quale è presente un campo magnetico costante e omogeneo, di intensità $B = 0{,}055$ T, *orientato come l'asse z.*

Trova la forza a cui è sottoposto il corpo a causa del campo magnetico e il tipo di moto che il corpo assume.

Rappresentiamo con un disegno quanto descritto nel testo nell'istante iniziale.



Il vettore $\vec{B}$ nel disegno è applicato nell'origine per semplicità: in realtà in ogni punto dello spazio è presente il campo magnetico e quindi un vettore parallelo a quello segnato.

Su un corpo carico in moto in un campo magnetico agisce in generale una forza, detta forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q|\vec{v}||\vec{B}| \sin(\alpha) \tag{22.1}$$

dove α è l'angolo tra il vettore velocità $\vec{v}$ e il campo magnetico $\vec{B}$. La forza è sempre diretta perpendicolarmente al piano individuato da questi due vettori.

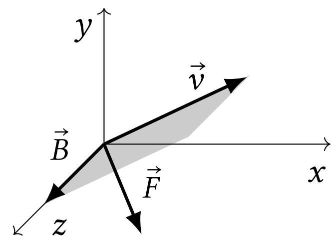
Se la velocità e il campo magnetico sono costanti sono possibili tre scenari:

1. Se la velocità e il campo magnetico hanno la stessa direzione iniziale (i vettori formano tra loro un angolo di $\alpha = 0°$ o $\alpha = 180°$) allora la forza di Lorentz è nulla. Il corpo prosegue il suo moto indisturbato.
   Non è questa la configurazione del nostro esercizio.
2. Se la velocità iniziale forma un angolo $\alpha = 90°$ con il campo magnetico allora il corpo si troverà sottoposto ad un forza che porterà il corpo a muoversi di moto circolare uniforme.

La forza di Lorentz si comporta come la forza centripeta del moto circolare uniforme. Questo è il caso di questo esercizio perché il vettore $\vec{B}$ è perpendicolare al piano xy dove giace il vettore $\vec{v}$. L'intensità della forza di Lorentz vale:

$$F = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin(\alpha) = 3{,}6 \times 10^{-6}\,\mathrm{C} \cdot 12 \times 10^{2}\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}055\,\mathrm{T} \cdot \sin(90°) = 2{,}4 \times 10^{-4}\,\mathrm{N} \quad (22.2)$$

Per trovare il verso della forza applichiamo la regola della mano destra. Se indichiamo con l'indice il verso della velocità e con il medio il verso del campo magnetico, la forza avrà il verso del pollice, perpendicolare al piano degli altri due vettori.



Nel disegno è stato indicato in grigio un frammento del piano su cui giacciono $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Quella superficie è un parallelogramma la cui area è legato il valore della forza. L'immagine rappresenta solo l'istante iniziale del moto, ma la direzione della velocità e di conseguenza della forza variano col tempo.

3. Se il vettore velocità ha un componente perpendicolare al campo magnetico, questo componente determinerà un moto circolare uniforme (come nel secondo caso). Il componente parallelo al campo magnetico (come nel primo caso) non determina nessuna forza, ma solo un moto rettilineo uniforme.
   Complessivamente avremo un moto elicoidale.

Esercizio 185 *Un elettrone si muove con una velocità iniziale* $v = 1{,}5 \times 10^{4}\,\mathrm{km/s}$ *nel piano yz con un angolo* $\alpha = 20°$ *rispetto all'asse y. All'istante* $t = 0\,\mathrm{s}$ *si trova nell'origine degli assi. La particella attraversa una regione di spazio nel quale è presente un campo magnetico costante e omogeneo di intensità* $B = 0{,}03\,\mathrm{T}$ *orientato come l'asse z.*

1. *Trova la legge oraria del moto dell'elettrone.*
2. *Trova l'equazione della traiettoria.*

L'elettrone si muove con una velocità iniziale non del tutto perpendicolare ad un campo magnetico uniforme: il moto è di conseguenza elicoidale.

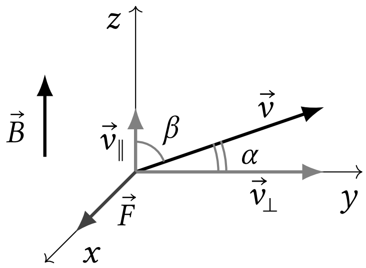
Su l'elettrone agisce una forza di Lorentz perpendicolare al piano del campo magnetico e della velocità. La direzione della forza si trova con la regola della mano destra: velocità, campo e forza si dispongono come indice, medio e pollice della mano destra. Velocità e campo possono non essere perpendicolari, ma la forza è sempre perpendicolare al piano degli altri due vettori. Il modulo della forza e quindi la forza stessa dipende solo dal componente della velocità perpendicolare al campo.

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (22.3)$$

$$F = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin(\beta) = q|\vec{v_\perp}||\vec{B}| \quad (22.4)$$

L'angolo β è quello che va dal vettore velocità al vettore campo magnetico: nel nostro caso è il complementare dell'angolo alfa ($\beta = 90° - \alpha$).

Rappresentiamo graficamente quanto detto e indicato dal problema all'istante iniziale.



Il componente della velocità $\vec{v}_\perp$ perpendicolare al campo determina un moto circolare uniforme su un piano perpendicolare al campo magnetico: nel nostro caso il piano xy.

Il componente $\vec{v}_\parallel$ parallelo al campo magnetico non sente l'influenza del campo e quindi determina un moto rettilineo uniforme: nel nostro caso parallelo all'asse z.

1. Per scrivere la legge oraria del moto analizziamo separatamente i due moti e poi componiamoli assieme. Scomponiamo la velocità parallelamente e perpendicolarmente al campo, ovvero lungo l'asse z e lungo l'asse y.

$$\begin{aligned} v_\perp &= v_y = |v| \cos\alpha = 1{,}5 \times 10^4 \text{ km/s} \cdot \cos 20° = 1{,}41 \times 10^7 \text{ m/s} \\ v_\parallel &= v_z = |v| \sin\alpha = 1{,}5 \times 10^4 \text{ km/s} \cdot \sin 20° = 5{,}13 \times 10^6 \text{ m/s} \end{aligned} \tag{22.5}$$

Il raggio dell'orbita circolare è:

$$r = \frac{m_e v_y}{eB} = \frac{9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1{,}41 \times 10^7 \text{ m/s}}{1{,}60 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 0{,}03 \text{ T}} = 2{,}68 \times 10^{-3} \text{ m} \tag{22.6}$$

Il tempo per compiere un orbita, cioè il periodo è:

$$T = \frac{2\pi r}{v_y} = \frac{2\pi \cdot 2{,}68 \times 10^{-3} \text{ m}}{1{,}41 \times 10^7 \text{ m/s}} = 1{,}19 \times 10^{-9} \text{ s} \tag{22.7}$$

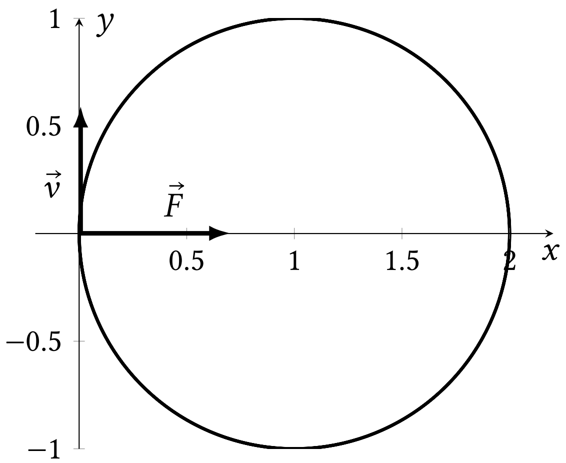
La velocità angolare:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v_y}{r} = \frac{1{,}41 \times 10^7 \text{ m/s}}{2{,}68 \times 10^{-3} \text{ m}} = 5{,}27 \times 10^9 \text{ s}^{-1} \tag{22.8}$$

Il moto della particella, proiettato sul piano xy è un moto circolare uniforme. Il raggio è quello appena calcolato. La circonferenza passa per l'origine degli assi.
L'equazione oraria di un moto circolare uniforme di centro $C(x_c; y_c)$ e raggio r è:

$$\begin{cases} x(t) = x_c + r \cdot \cos(\omega t + \phi_0) \\ y(t) = y_c + r \cdot \sin(\omega t + \phi_0) \end{cases} \tag{22.9}$$

L'argomento delle funzioni goniometriche rappresenta un angolo centrato nel centro della circonferenza, secondo le usuali convenzioni della trigonometria: l'argomento può essere solo un numero puro. Questo angolo è quello assunto dal punto in movimento all'istante t, dove ω è velocità angolare e ϕ_0 è l'angolo sotteso all'istante $t = 0$ s.
La forza di Lorentz si comporta come una forza centripeta per cui il centro della circonferenza deve stare sull'asse da essa indicato: nel nostro caso l'asse x. Inoltre la circonferenza è tangente all'origine degli assi e quindi, come si vede dalla figura seguente, il centro ha coordinate $C(r, 0 \text{ m})$. Il grafico che segue è in unità multiple del raggio.



La velocità angolare deve essere negativa, dato che il corpo si muove in senso orario per chi guarda il moto come nella figura precedente.
Per le condizioni poste dal problema abbiamo:

$$\begin{aligned} x(0\,\mathrm{s}) = r + r\cdot\cos(\phi_0) &= 0\,\mathrm{m} \\ r\cos(\phi_0) &= -r \\ \cos(\phi_0) &= -1 \\ \phi_0 &= \pi \end{aligned} \tag{22.10}$$

La legge del moto circolare uniforme nel piano xy è:

$$\begin{cases} x(t) = 2{,}68\times10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot(1+\cos(-5{,}27\times10^{9}\,\mathrm{s}^{-1}\cdot t+\pi)) \\ y(t) = 2{,}68\times10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\sin(-5{,}27\times10^{9}\,\mathrm{s}^{-1}\cdot t+\pi) \end{cases} \tag{22.11}$$

Infine, il moto lungo l'asse z è un moto rettilineo uniforme con velocità v_z che parte dall'origine degli assi all'istante $t = 0$ s. Per cui la **legge oraria del moto nello spazio** è:

$$\begin{cases} x(t) = 2{,}68\times10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot(1+\cos(-5{,}27\times10^{9}\,\mathrm{s}^{-1}\cdot t+\pi)) \\ y(t) = 2{,}68\times10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\sin(-5{,}27\times10^{9}\,\mathrm{s}^{-1}\cdot t+\pi) \\ z(t) = 5{,}13\times10^{6}\,\mathrm{m/s}\cdot t \end{cases} \tag{22.12}$$

2. La legge oraria si trasforma in equazione della traiettoria se eliminiamo il tempo. Possiamo ad esempio esplicitare il tempo nella legge relativa all'asse z e sostituire l'espressione nelle altre due relazioni.

$$\begin{cases} t = \dfrac{z}{5{,}13\times10^{6}\,\mathrm{m/s}} \\ x = 2{,}68\times10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\left(1+\cos\left(-5{,}27\times10^{9}\,\mathrm{s}^{-1}\cdot\dfrac{z}{5{,}13\times10^{6}\,\mathrm{m/s}}+\pi\right)\right) \\ y = 2{,}68\times10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\sin\left(-5{,}27\times10^{9}\,\mathrm{s}^{-1}\cdot\dfrac{z}{5{,}13\times10^{6}\,\mathrm{m/s}}+\pi\right) \end{cases} \tag{22.13}$$

Per cui l'**equazione della traiettoria** è:

$$\begin{cases} x = 2{,}68\times10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot(1+\cos(-1{,}03\times10^{3}\,\mathrm{m}^{-1}\cdot z+\pi)) \\ y = 2{,}68\times10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\sin(-1{,}03\times10^{3}\,\mathrm{m}^{-1}\cdot z+\pi) \end{cases} \tag{22.14}$$

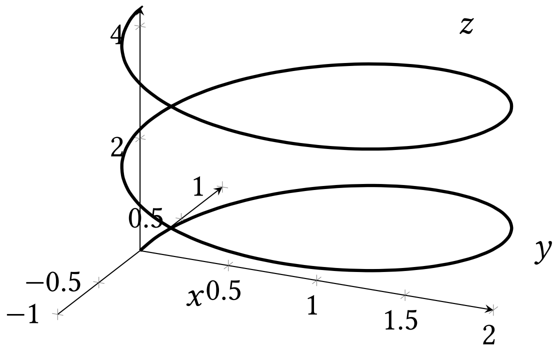
Volendo rappresentare graficamente il moto elicoidale calcoliamo il passo dell'orbita che è la distanza percorsa dal moto dopo ogni circonferenza completa. Lo otteniamo moltiplicando la velocità nell'asse z per il periodo.

$$\Delta z = v_z T = 5{,}13 \times 10^{6}\ \mathrm{m/s} \cdot 1{,}19 \times 10^{-9}\ \mathrm{s}^{-1} = 6{,}10 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} \tag{22.15}$$

Il rapporto tra il passo e il raggio dell'orbita vale:

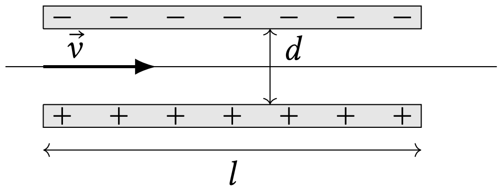
$$\frac{6{,}10 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}}{2{,}68 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 2{,}3 \tag{22.16}$$

Questo vuol dire che al trascorrere di ogni periodo la posizione della particella avanza di una distanza poco più grande del diametro della circonferenza. Questo è quel che si osserva nel seguente grafico in unità di misura multiple del raggio.



22.2 Carica in moto in un campo elettrico nel piano

Esercizio 186 *Una particella alfa entra con velocità iniziale* $v = 1{,}20 \times 10^5$ m/s *parallelamente alle armature di un condensatore piano, lungo l'asse del condensatore. Le piastre sono caricate con una densità superficiale di carica* $\sigma = 3{,}8 \times 10^{-9}$ C/m^2*; la distanza tra esse è* $d = 2$ cm*; la loro lunghezza* $l = 10$ cm.



1. *Trova la legge del moto della particella all'interno del condensatore*
2. *Trova la traiettoria della particella all'interno del condensatore*
3. *Trova dove esce la particella*
4. *Trova la legge del moto della particella all'uscita dal condensatore*
5. *Trova la traiettoria della particella all'uscita dal condensatore*

Le particelle alfa sono nuclei di atomi di elio: sono presenti due protoni e due neutroni. La carica è il doppio della carica dell'elettrone; la massa, essendo la massa del protone e del neutrone pressoché uguale, è quattro volte quella del protone.

Tra le armature del condensatore è presente un campo elettrico uniforme perpendicolare alle piastre e diretto dall'armatura positiva a quella negativa. Il modulo del campo è:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{22.17}$$

La particella, immersa nel campo elettrico, è sottoposta a una forza columbiana:

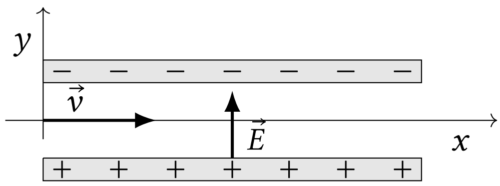
$$F = ma = qE \tag{22.18}$$

e quindi a una accelerazione:

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{q\sigma}{m\varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 3{,}8 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}}{4 \cdot 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}} = 2{,}06 \times 10^{10}\,\mathrm{m/s^2} \tag{22.19}$$

1. Il moto della particella nella direzione dell'asse del condensatore è indipendente da quello nella direzione perpendicolare perché nessuna delle grandezze che caratterizzano il moto in una direzione ha a che fare con quelle dell'altra direzione, a parte naturalmente il tempo. Il primo è un moto rettilineo uniforme; il secondo un moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla. Stabiliamo, a nostro arbitrio, che la posizione iniziale della particella all'istante $t = 0$ sia $x_0 = 0$ m e $y_0 = 0$ m. Per cui possiamo scrivere la **legge del moto**:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t = (1{,}20 \times 10^5\,\mathrm{m/s})\,t \\ y(t) = y_0 + v_y t + \frac{1}{2}at^2 = (1{,}03 \times 10^{10}\,\mathrm{m/s^2})\,t^2 \end{cases} \tag{22.20}$$



2. Per ricavare l'equazione della traiettoria mettiamo in evidenza il tempo in una delle due relazioni precedenti e sostituiamola nell'altra.

$$\begin{aligned} x &= v_x t \\ t &= \frac{x}{v_x} \\ y &= \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{x}{v_x}\right)^2 = \left(\frac{a}{2{v_x}^2}\right)x^2 \end{aligned} \tag{22.21}$$

Otteniamo l'equazione di una parabola e quindi un moto parabolico.

$$y = \left(\frac{a}{2\,{v_x}^2}\right)x^2 = \left(\frac{2{,}06 \times 10^{10}\ \mathrm{m/s^2}}{2\,(1{,}2 \times 10^5\ \mathrm{m/s})^2}\right)x^2 = 7{,}15 \times 10^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}x^2 \tag{22.22}$$

3. Per trovare la posizione di uscita della particella possiamo usare l'equazione della traiettoria sapendo che $x_\mathrm{f} = 0{,}1\ \mathrm{m}$:

$$y_\mathrm{f} = \left(\frac{a}{2\,{v_x}^2}\right){x_\mathrm{f}}^2 = 7{,}15 \times 10^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}(0{,}1\ \mathrm{m})^2 = 7{,}15 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} \tag{22.23}$$

La particella si alza di 0,00715 m ovvero di meno di un centimetro, quindi rimane dentro il condensatore.

4. All'uscita dal condensatore la particella non è più sottoposta a forze: il moto è rettilineo uniforme. La velocità orizzontale è sempre la stessa; quella verticale è quella raggiunta a causa dell'accelerazione data dalla forza elettrica.
Troviamo dapprima l'istante in cui la particella esce dal condensatore:

$$\begin{aligned} x_\mathrm{f} &= v_x t_\mathrm{f} \\ t_\mathrm{f} &= \frac{x_\mathrm{f}}{v_x} = \frac{0{,}1\ \mathrm{m}}{1{,}2 \times 10^5\ \mathrm{m/s}} = 8{,}33 \times 10^{-7}\ \mathrm{s} \end{aligned} \tag{22.24}$$

Sostituiamo quell'istante nella legge oraria della velocità verticale:

$$v_y(t_\mathrm{f}) = at_\mathrm{f} = 2{,}06 \times 10^{10}\ \mathrm{m/s^2} \cdot 8{,}33 \times 10^{-7}\ \mathrm{s} = 1{,}72 \times 10^4\ \mathrm{m/s} \tag{22.25}$$

Per cui la legge del moto è:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t = (1{,}20 \times 10^5\ \mathrm{m/s})\,t \\ y(t) = y_0 + v_y t = (1{,}72 \times 10^4\ \mathrm{m/s})\,t \end{cases} \quad \text{se } t \geq 8{,}33 \times 10^{-7}\ \mathrm{s} \tag{22.26}$$

Dobbiamo ancora trovare i nuovi x_0 e y_0 in modo tale che la particella passi per il punto di uscita dal condensatore all'istante t_f trovato prima. Osserviamo che le leggi del moto dentro e fuori il condensatore devono essere riferite allo stesso Sistema di Riferimento.
Il moto orizzontale continua indisturbato dentro e fuori il condensatore per cui x_0 continua ad essere zero.
Invece per il moto verticale abbiamo:

$$\begin{aligned} y(t_\mathrm{f}) &= y_0 + v_y t_\mathrm{f} \\ y_0 &= y(t_\mathrm{f}) - v_y t_\mathrm{f} = 7{,}15 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} - 1{,}72 \times 10^4\ \mathrm{m/s} \cdot 8{,}33 \times 10^{-7}\ \mathrm{s} = -7{,}18 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} \end{aligned} \tag{22.27}$$

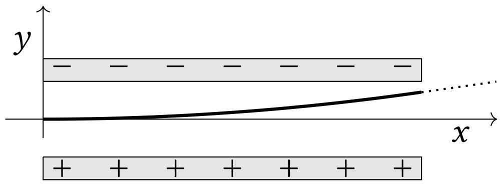
La **legge del moto** è quindi:

$$\begin{cases} x(t) = v_x t = (1{,}20 \times 10^4\ \mathrm{m/s})\,t \\ y(t) = y_0 + v_y t = -7{,}18 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} + (1{,}72 \times 10^4\ \mathrm{m/s})\,t \end{cases} \quad \text{se } t \geq 8{,}33 \times 10^{-7}\ \mathrm{s} \tag{22.28}$$

5. Per trovare la traiettoria usiamo lo stesso metodo usato prima:

$$x = v_x t$$
$$t = \frac{x}{v_x}$$
$$y = y_0 + v_y t = v_y \frac{x}{v_x} = -7{,}19 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} + \left(\frac{1{,}72 \times 10^4\ \mathrm{m/s}}{1{,}2 \times 10^5\ \mathrm{m/s}} \right) x = -7{,}18 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} + 0{,}143\, x \tag{22.29}$$

In particolare questa è una retta di coefficiente angolare 0,143.
La retta ha un'inclinazione $\alpha = \arctan(0{,}143) = 8°$.



22.3 Carica in moto in un campo elettrico e magnetico

Esercizio 187 *Un protone attraversa una regione di spazio in cui è presente un campo elettrico uniforme d'intensità* 3000 V/m *con velocità* $v = 2{,}7 \times 10^5$ m/s.

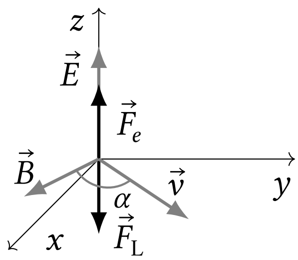
Trova quanto deve valere in modulo direzione e verso l'intensità di un opportuno campo magnetico B *affinché la velocità dell'elettrone non vari nella suddetta regione di spazio.*

Affinché non vari la velocità della particella, la forza complessiva che agisce su di essa deve essere nulla. Il campo elettrico esercita una forza $F_e = qE$. Nella stessa direzione, ma in verso opposto, deve agire una forza di Lorentz originata dalla presenza del campo magnetico: all'equilibrio abbiamo $F_e = F_{\mathrm{L}}$.

Tuttavia i dati del problema non sono sufficienti a dare una risposta completa, perché la forza di Lorentz dipende dalla velocità in modulo, direzione e verso e noi non sappiamo quale sia la direzione e verso della velocità.

Per avere una forza magnetica nella direzione del campo elettrico la velocità deve avere un componente perpendicolare ad entrambi. Ma ogni altra componente residua determinerà un'altra forza di Lorentz che non possiamo evitare e che non permetterebbe all'elettrone di procedere indisturbato.

Nella figura seguente, ad esempio, il campo magnetico e la velocità giacciono su un piano perpendicolare al campo elettrico; campo e forza elettrica hanno lo stesso verso perché la particella ha carica positiva.



Pur potendo equilibrare la forza elettrica con una forza di Lorentz ci sono infinite direzioni diverse per il campo magnetico, pur rimanendo nel piano xy, che portano alla stessa forza. Infatti la forza di Lorentz dipende anche dall'angolo tra campo magnetico e velocità: per ogni angolo abbiamo un valore del campo magnetico che ci può dare la stessa forza.

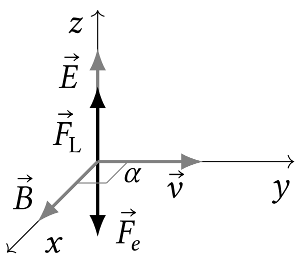
$$|\vec{F}| = |q\vec{v} \wedge \vec{B}| = |q||\vec{v}||\vec{B}| \sin(\alpha) \tag{22.30}$$

Quindi non ci sono abbastanza dati per rispondere al problema e se anche ci fossero non è detto che si possa trovare una forza magnetica di equilibrio né è detto che la risposta sia univoca.

Esercizio 188 *Un elettrone attraversa una regione di spazio in cui è presente un campo elettrico uniforme d'intensità* 3000 V/m *diretto nel verso positivo dell'asse z e velocità $v = 2{,}7 \times 10^5$ m/s diretta nel verso positivo dell'asse y.*

1. *Trova quanto deve valere in modulo direzione e verso l'intensità di un opportuno campo magnetico B_1 affinché la velocità dell'elettrone non vari nella suddetta regione di spazio.*
2. *L'elettrone, successivamente, attraversa un altra regione di spazio in un cui è presente solo un campo magnetico costante B_2 che agisce perpendicolarmente alla velocità della particella e la fa muovere di traiettoria circolare di raggio $r = 4{,}2$ m.*
   Trova il modulo e verso di questo campo e il periodo dell'orbita.
3. *Un'altra particella, con carica doppia rispetto a quella dell'elettrone, attraversa le due regioni di spazio partendo con la stessa velocità iniziale.*
   Trova se la nuova particella emerge dalla prima regione di spazio preservando la sua velocità e quanto vale la sua massa se si muove nella seconda regione con una traiettoria di raggio $r = 3{,}2$ m.

1. Affinché non vari la velocità della particella, la forza complessiva che agisce su di essa deve essere nulla. Il campo elettrico esercita una forza $F_e = qE$. Nella stessa direzione, ma in verso opposto, deve agire una forza di Lorentz originata dalla presenza del campo magnetico. All'equilibrio abbiamo:
$$F_e = F_{\mathrm{L}} \qquad ; \qquad qE = qvB_1 \sin(\alpha) \tag{22.31}$$
dove α è l'angolo tra il vettore velocità e il vettore campo magnetico. Esistono quindi infinite combinazioni tra angolo e campo magnetico che ci permettono di realizzare lo stesso equilibrio. Scegliamo a nostro arbitrio e per semplicità un angolo di 90° che è quello che ci consente di avere il campo magnetico minimo per realizzare l'equilibrio tra forze.
Per cui, semplificando e mettendo in evidenza B, abbiamo:
$$B_1 = \frac{E}{v} = \frac{3000\,\mathrm{V/m}}{2{,}7 \times 10^5\,\mathrm{m/s}} = 0{,}011\,\mathrm{T} \tag{22.32}$$
Come si vede nella figura seguente il campo elettrico è verso l'alto e la forza elettrica verso il basso a causa della carica negativa dell'elettrone. Il vettore velocità e il campo magnetico stanno sul piano xy, quindi sono entrambi perpendicolari al campo elettrico. Con questa condizione la forza magnetica, sempre perpendicolare al piano della velocità e del campo magnetico, può stare totalmente nella direzione dell'asse z ovvero della forza elettrica. Per la regola della mano destra la forza di Lorentz deve essere diretta verso l'alto, considerando anche in questo caso il segno della particella; il campo magnetico deve essere diretto nel verso negativo dell'asse x.



2. Se una particella carica si muove in una regione di spazio in cui è presente solo un campo magnetico uniforme in direzione perpendicolare alla sua velocità allora la particella, sottoposta ad una forza di Lorentz costante in modulo, assumerà un moto circolare uniforme. La forza centripeta necessaria per mantenere questo moto è data proprio dalla forza di Lorentz.

Per cui possiamo scrivere:

$$F_{\mathrm{L}} = F_{\mathrm{c}} \qquad ; \qquad qvB_2 = \frac{mv^2}{r} \tag{22.33}$$

dove m è la massa della particella, v la sua velocità e r il raggio dell'orbita.
Mettiamo in evidenza il modulo del campo magnetico:

$$B_2 = \frac{mv}{qr} = \frac{9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot 2{,}7 \times 10^5\ \mathrm{m/s}}{1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 4{,}2\ \mathrm{m}} = 3{,}66 \times 10^{-7}\ \mathrm{T} \tag{22.34}$$

Inoltre, essendo un modo circolare uniforme, il legame tra velocità tangenziale e periodo T è:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{22.35}$$

Da cui:

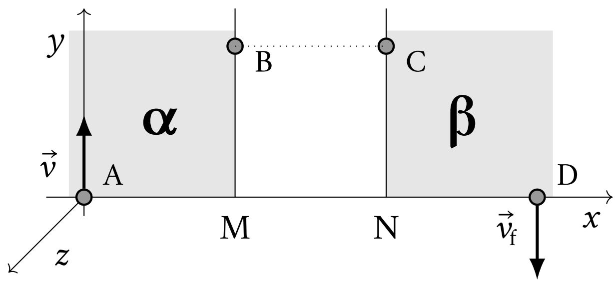
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}1415 \cdot 4{,}2\ \mathrm{m}}{2{,}7 \times 10^5\ \mathrm{m/s}} = 9{,}77 \times 10^{-5}\ \mathrm{s} \tag{22.36}$$

3. La prima regione di spazio è tale, come prima è stato mostrato, che la carica della particella non influisce sull'uguaglianza fra forza elettrica e magnetica e quindi sulla sua velocità.
   Per quanto riguarda la seconda regione di spazio vale ancora la relazione 22.33, possiamo quindi ricavare la massa conoscendo il nuovo raggio dell'orbita.

$$m = \frac{qB_2 r}{v} = \frac{1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 3{,}66 \times 10^{-7}\ \mathrm{T} \cdot 3{,}2\ \mathrm{m}}{2{,}7 \times 10^5\ \mathrm{m/s}} = 6{,}94 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \tag{22.37}$$

Esercizio 189 *Un fascio di particelle di carica* $q = 3{,}7 \times 10^{-18}$ C *e massa* $m = 8{,}3 \times 10^{-26}$ kg *é immesso dal punto* A *nella regione di spazio* $\boldsymbol{\alpha}$, *alla sinistra del punto* B *in figura, in cui è presente un campo magnetico costante e uniforme, orientato parallelamente all'asse z. La lunghezza dei tratti AM, ND, BC, BM e* CN *è la stessa e vale* $d = 75$ cm. *Tutte le particelle hanno la stessa velocità iniziale* $v = 0{,}5$ c, *diretta nel verso positivo dell'asse y.*

1. *Trova, in modulo e segno, il campo magnetico che bisogna applicare nella regione* $\boldsymbol{\alpha}$ *affinché una particella, dopo essere entrata nel punto* A, *si diriga nel punto* B *con la stessa velocità, ma in direzione orizzontale.*
2. *Scrivi la legge del moto e l'equazione della traiettoria nella regione* $\boldsymbol{\alpha}$.
3. *La particella, giunta in* B, *prosegue indisturbata verso il punto* C. *Scrivi la legge del moto e l'equazione della traiettoria in questa regione.*
4. *Successivamente la particella, alla destra del punto* C, *entra nella regione di spazio* $\boldsymbol{\beta}$ *in cui è presente un opportuno campo elettrico uniforme e costante. Questo campo è tale da dirigere la particella verso il basso in modo da farla entrare nel punto* D *con la stessa velocità iniziale, ma diretta verso il basso.*
   Determina, in modulo direzione e verso, l'entità di questo campo elettrico.
5. *Scrivi la legge del moto e l'equazione della traiettoria nella regione* $\boldsymbol{\beta}$.
6. *Verifica la continuità della legge oraria tra le varie regioni di spazio.*



1. Una particella che si muove perpendicolarmente ad un campo magnetico costante ed uniforme è sottoposta ad un forza di Lorentz che ne determina un moto circolare uniforme. Se il campo magnetico è orientato come l'asse z e la particella ha una velocità iniziale come nella figura allora essa devierà verso destra o sinistra a seconda nel verso del campo.
   Secondo la regola della mano destra se il pollice è orientato come il campo le altre dite seguono il moto delle particelle. Se il *campo è nel verso negativo* dell'asse z le particelle seguono una traiettoria in verso orario, che è quello che vogliamo.
   Il raggio della traiettoria deve essere uguale a d e la particella segue un arco di circonferenza dal punto A al punto B. Conoscendo il raggio della traiettoria possiamo ricavare l'intensità del campo magnetico.

$$d = r = \frac{mv}{qB}$$

$$B = \frac{mv}{dq} = \frac{8{,}3 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}5\,\mathrm{c}}{75\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}7 \times 10^{-18}\,\mathrm{C}} = \frac{8{,}3 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg} \cdot 0,5 \cdot 2{,}998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{0{,}75\,\mathrm{m} \cdot 3{,}7 \times 10^{-18}\,\mathrm{C}} = 4{,}48\,\mathrm{T} \tag{22.38}$$

2. Il moto nella regione $\boldsymbol{\alpha}$ abbiamo detto che è circolare uniforme. Esso avviene totalmente sul piano xy e per questo non consideriamo qui di seguito la coordinata z. Il centro della traiettoria

deve stare nel punto M di coordinate (0,75 m; 0 m). La legge del moto ha questa forma:

$$\begin{cases} x(t) = x_c + r \cdot \cos(\omega t + \phi_0) \\ y(t) = y_c + r \cdot \sin(\omega t + \phi_0) \end{cases} \tag{22.39}$$

dove x_c e y_c sono le coordinate del centro; r è il raggio della traiettoria; ω è la frequenza angolare e ϕ_0 è argomento del coseno e seno all'istante $t = 0$ s.
La frequenza angolare, per un moto circolare uniforme, vale:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{0{,}5\,\mathrm{c}}{0{,}75\,\mathrm{m}} = \frac{0,5 \cdot 2{,}998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{0{,}75\,\mathrm{m}} = 2{,}00 \times 10^8\,\mathrm{s}^{-1} \tag{22.40}$$

La velocità angolare deve essere negativa, dato che il corpo si muove in senso orario per chi guarda il moto come nella figura precedente.
Il periodo del moto è legato alla frequenza angolare dalla relazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{22.41}$$

Il periodo ci serve a sapere per quanto tempo ogni particella transita nella regione $\boldsymbol{\alpha}$: la legge oraria vale solo in quell'intervallo di tempo che possiamo chiamare Δt_1. Questo intervallo, poiché la particella percorre un quarto di circonferenza, è un quarto del periodo.

$$\Delta t_1 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2 \cdot 2{,}00 \times 10^8\,\mathrm{s}^{-1}} = 7{,}85 \times 10^{-9}\,\mathrm{s} \tag{22.42}$$

Consideriamo, a nostro arbitrio, che la particella si trovi nel punto A nell'istante $t = 0$ s.
Allora possiamo ricavare la fase iniziale ϕ_0:

$$\begin{aligned} x(0\,\mathrm{s}) = r + r \cdot \cos(\phi_0) &= 0\,\mathrm{m} \\ r \cdot \cos(\phi_0) &= -r \\ \cos(\phi_0) &= -1 \\ \phi_0 &= \pi \end{aligned} \tag{22.43}$$

Per cui la *legge oraria è*:

$$\begin{cases} x(t) = 0{,}75\,\mathrm{m} + 0{,}75\,\mathrm{m} \cdot \cos(-2{,}00 \times 10^8\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t + \pi) \\ y(t) = 0{,}75\,\mathrm{m} \cdot \sin(-2{,}00 \times 10^8\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t + \pi) \end{cases} \quad \text{se } 0\,\mathrm{s} \le t \le 7{,}85 \times 10^{-9}\,\mathrm{s} \tag{22.44}$$

L'*equazione della traiettoria* è una circonferenza e la scriviamo direttamente, dal momento che ne conosciamo centro e raggio.

$$\begin{aligned} (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 &= r^2 \\ (x - 0{,}75\,\mathrm{m})^2 + y^2 &= 0{,}56\,\mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{22.45}$$

3. La particella giunta in B ha la stessa velocità iniziale, ma diretta orizzontalmente. Prosegue il suo moto sino al punto C con velocità costante, poiché non è sottoposta a nessuna forza. Il moto è rettilineo uniforme. La legge del moto ha la forma:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x \cdot t \\ y(t) = y_0 + v_y \cdot t \end{cases} \tag{22.46}$$

v_x e v_y sono le componenti rispetto agli assi della velocità e da quanto appena scritto sappiamo già che $v_x = v$ e $v_y = 0\,\mathrm{m/s}$.
x_0 e y_0 è la posizione del corpo all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ che in questo caso non ha significato fisico dal momento che l'attuale moto avviene solo per $t \geq 7{,}85 \times 10^{-9}$ s. Però possiamo ricavare le due costanti anche dalla conoscenza della posizione in un istante qualsiasi e noi sappiamo che all'istante $t_B = 7{,}85 \times 10^{-9}$ s la particella sta nel punto B.
Per cui:

$$\begin{aligned} x(t_\mathrm{b}) &= x_0 + v_x \cdot t_\mathrm{b} \\ x_0 &= x(t_\mathrm{b}) - v_x \cdot t_\mathrm{b} \\ x_0 &= 0{,}75\,\mathrm{m} - 0{,}5 \cdot 2{,}998 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 7{,}85 \times 10^{-9}\,\mathrm{s} = -4{,}27 \times 10^{-1}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{22.47}$$

$$\begin{aligned} y(t_\mathrm{b}) &= y_0 + v_y \cdot t_\mathrm{b} \\ y_0 &= y(t_\mathrm{b}) = 0{,}75\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

La *legge oraria* è:

$$\begin{cases} x(t) = -0{,}43\,\mathrm{m} + 1{,}50 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot t \\ y(t) = 0{,}75\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{22.48}$$

Tuttavia questa formulazione non è completa, perché dobbiamo indicare in quale intervallo di tempo essa si possa applicare. La legge vale dall'istante t_B in cui la particella passa nel punto B (che già conosciamo) all'istante t_C in cui la particella passa nel punto C. Troviamo t_C dalla $x(t)$ appena scritta, conoscendo le coordinate del punto C che sono $(2 \cdot 0{,}75\,\mathrm{m}; 0{,}75\,\mathrm{m})$.

$$\begin{aligned} x(t_\mathrm{C}) = 1{,}50\,\mathrm{m} &= -0{,}43\,\mathrm{m} + 1{,}50 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot t_\mathrm{C} \\ t_\mathrm{C} &= \frac{1{,}50\,\mathrm{m} - (-0{,}43\,\mathrm{m})}{1{,}50 \times 10^8\,\mathrm{m/s}} = 1{,}28 \times 10^{-8}\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{22.49}$$

Quindi la *legge oraria completa* è:

$$\begin{cases} x(t) = -0{,}43\,\mathrm{m} + 1{,}50 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot t \\ y(t) = 0{,}75\,\mathrm{m} \end{cases} \quad \text{se } 7{,}85 \times 10^{-9}\,\mathrm{s} \leq t \leq 1{,}28 \times 10^{-8}\,\mathrm{s} \tag{22.50}$$

La *traiettoria* è un retta orizzontale che dista 0,75 m dall'asse x. La sua equazione è:

$$y = 0{,}75\,\mathrm{m} \tag{22.51}$$

4. Per poter dirigere verso il basso la particella giunta in C dobbiamo applicarle una forza parallela all'asse y. Una carica puntiforme immersa in un campo elettrico subisce una forza che ha la stessa direzione del campo e, se la carica è positiva, anche lo stesso verso. Di conseguenza a noi serve un *campo elettrico parallelo all'asse y e orientato verso il basso*.

$$F = ma = qE \tag{22.52}$$

Se troviamo l'accelerazione a cui sottoporre la particella possiamo ricavare il campo elettrico. Il moto della particella nella regione **β** è ancora rettilineo uniforme parallelamente all'asse x e uniformemente accelerato parallelamente all'asse y. Nell'intervallo di tempo che la particella impiega a procedere orizzontalmente da CN a D per una distanza d il moto accelerato la sposta verso il basso della stessa distanza. Questo intervallo è uguale a:

$$\Delta t = t_\mathrm{D} - t_\mathrm{C} = t_\mathrm{C} - t_\mathrm{D} = 1{,}28 \times 10^{-8}\,\mathrm{s} - 7{,}85 \times 10^{-9}\,\mathrm{s} = 4{,}95 \times 10^{-9}\,\mathrm{s} \tag{22.53}$$

La legge del moto in verticale ha la forma:

$$y(t) = y_0 + v_{y_0}t + \frac{1}{2}at^2 \tag{22.54}$$

dove y_0 è la posizione all'istante $t = 0$ s e v_{y_0} la velocità iniziale. Per il momento ci interessa ricavare solo l'accelerazione. Allora supponiamo che questo moto cominci all'istante $t = 0$ s. In quell'istante la particella si trova in C con velocità verticale nulla. Quindi $y_0 = d$ e $v_y = 0$ m/s. Quanto è trascorso l'intervallo Δt, che chiamiamo t_f, la particella è giunta nella posizione $y = 0$ m.

$$\begin{aligned} y(t_f) = 0\,\text{m} = d + \frac{1}{2}a(t_f)^2 \\ a = -\frac{2d}{(t_f)^2} = -\frac{2 \cdot 0{,}75\,\text{m}}{(4{,}95 \times 10^{-9}\,\text{s})^2} = -6{,}12 \times 10^{16}\,\text{m/s}^2 \end{aligned} \tag{22.55}$$

Infine:

$$E = \frac{ma}{q} = \frac{8{,}3 \times 10^{-26}\,\text{kg} \cdot -6{,}12 \times 10^{16}\,\text{m/s}^2}{3{,}7 \times 10^{-18}\,\text{C}} = 1{,}37 \times 10^9\,\text{N/m} \tag{22.56}$$

5. Abbiamo già determinato la forma della legge del moto nella regione **β**, ma dobbiamo determinarne i particolari.

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x \cdot t \\ y(t) = y_0 + v_{y_0}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \tag{22.57}$$

La legge del moto orizzontale continua ad essere identica a quella della regione intermedia. Mentre l'accelerazione a, una volta scelta l'orientazione per gli assi, non dipende dal sistema di riferimento, non è così per y_0 e v_{y_0}. I valori utilizzati alla domanda precedente non vanno più bene: dobbiamo scrivere delle leggi del moto che si raccordino alle altre già scritte.
Per trovare questi due valori usiamo un sistema di due equazioni in due incognite in cui usiamo la seconda equazione della (22.57) e la legge oraria della velocità verticale calcolate entrambe all'istante t_C in cui conosciamo posizione e velocità della particella.

$$\begin{cases} y(t_C) = y_0 + v_{y_0}t_C + \frac{1}{2}a(t_C)^2 \\ v_y(t_C) = v_{y_0} + a(t_C) \end{cases} \tag{22.58}$$

Sappiamo che $v_y(t_C) = 0$ m/s: ricaviamo v_{y_0} e sostituiamolo nella prima equazione ricavando y_0.

$$\begin{aligned} v_y(t_C) = v_{y_0} + a(t_C) = 0\,\text{m/s} \\ v_{y_0} = -a(t_C) = -(-6{,}12 \times 10^{16}\,\text{m/s}^2) \cdot 1{,}28 \times 10^{-8}\,\text{s} = 7{,}83 \times 10^8\,\text{m/s} \end{aligned} \tag{22.59}$$

$$\begin{aligned} y(t_C) &= y_0 + v_{y_0}t_C + \frac{1}{2}a(t_C)^2 = 0{,}75\,\text{m} \\ y_0 &= -v_{y_0}t_C - \frac{1}{2}a(t_C)^2 + 0{,}75\,\text{m} \\ y_0 &= -7{,}83 \times 10^8\,\text{m/s} \cdot 1{,}28 \times 10^{-8}\,\text{s} - (-6{,}12 \times 10^{16}\,\text{m/s}^2) \cdot (1{,}28 \times 10^{-8}\,\text{s})^2 + 0{,}75\,\text{m} \\ y_0 &= 0{,}780\,\text{m} \end{aligned} \tag{22.60}$$

Rimane da determinare l'intervallo temporale di validità di quest'ultima legge del moto. La legge vale dall'istante t_C in cui la particella passa nel punto C (che già conosciamo) all'istante t_D

in cui la particella passa nel punto CD. Troviamo t_D dalla $x(t)$, la stessa già trovata, conoscendo le coordinate del punto D che sono $(3 \cdot 0{,}75\ \mathrm{m}; 0\ \mathrm{m})$.

$$x(t_D) = 2{,}25\ \mathrm{m} = -0{,}43\ \mathrm{m} + 1{,}50 \times 10^8\ \mathrm{m/s} \cdot t_D$$
$$t_D = \frac{2{,}25\ \mathrm{m} - (-0{,}43\ \mathrm{m})}{1{,}50 \times 10^8\ \mathrm{m/s}} = 1{,}79 \times 10^{-8}\ \mathrm{s} \tag{22.61}$$

Quindi la *legge oraria completa* è:

$$\begin{cases} x(t) = -0{,}43\ \mathrm{m} + 1{,}50 \times 10^8\ \mathrm{m/s} \cdot t \\ y(t) = 0{,}78\ \mathrm{m} + 7{,}83 \times 10^8\ \mathrm{m/s} \cdot t - (3{,}06 \times 10^{16}\ \mathrm{m/s^2}) \cdot t^2 \end{cases} \quad \text{se } 1{,}28{\times}10^{-8}\ \mathrm{s} \le t \le 1{,}79{\times}10^{-8}\ \mathrm{s} \tag{22.62}$$

Per scrivere l'equazione della traiettoria (l'equazione di una parabola) possiamo sostituire nel sistema precedente il valore del tempo dalla prima equazione nella secondo, ottenendo una equazione in x e y. Per evitare di pasticciare con troppi numeri scriviamo il precedente sistema con le sole lettere e sostituiamo i valori numerici solo alla fine dei passaggi algebrici.

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \tag{22.63}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{v_x} \\ y = y_0 + v_y\left(\dfrac{x - x_0}{v_x}\right) + \dfrac{1}{2}a\left(\dfrac{x - x_0}{v_x}\right)^2 \end{cases} \tag{22.64}$$

$$y = y_0 + \frac{v_y}{v_x}(x - x_0) + \frac{1}{2}a\left(\frac{x^2 - 2xx_0 + x^2{}_0}{v_x}\right)$$
$$y = y_0 + \frac{v_y}{v_x}x - \frac{v_y}{v_x}x_0 + \frac{ax^2}{2v^2{}_x} - \frac{axx_0}{v^2{}_x} + \frac{ax^2{}_0}{2v^2{}_x} \tag{22.65}$$
$$y = \left(y_0 - \frac{v_y}{v_x}x_0 + \frac{ax^2{}_0}{2v^2{}_x}\right) + \left(\frac{v_y}{v_x} - \frac{ax_0}{v^2{}_x}\right)x + \left(\frac{a}{2v^2{}_x}\right)x^2$$

Infine:

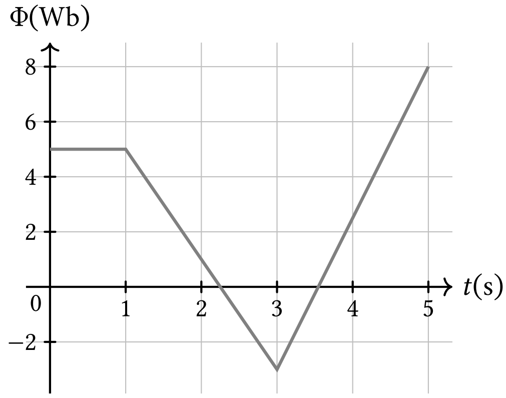
$$y = 2{,}77\ \mathrm{m} + 4{,}05 \cdot x - 1{,}36\ \mathrm{m}^{-1} \cdot x^2 \tag{22.66}$$

23 Induzione magnetica

23.1 F.e.m. indotta

Esercizio 190 *Abbiamo una spira immersa in un campo magnetico. Il flusso attraverso la spira varia nel tempo secondo la legge rappresentata nel seguente grafico.*
Trova quanto varia le f.e.m. indotta:

1. *nel tempo tra* 0 s *e* 1 s*;*
2. *nel tempo tra* 1 s *e* 3 s*;*
3. *nel tempo tra* 0 s *e* 5 s*;*



La legge di Faraday-Neumann ci dice che se il flusso del campo magnetico attraverso una spira cambia nel tempo allora, in generale, sulla spira si manifesta una forza elettromotrice, secondo la seguente relazione:

$$f.e.m. = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} \tag{23.1}$$

dove $\Delta\Phi(\vec{B})$ è la variazione del flusso e Δt è il tempo trascorso. Il segno meno a secondo membro ha un pieno significato solo se conosciamo l'orientazione della spira rispetto al campo magnetico: non conoscendolo determiniamo solo il valore assoluto della f.e.m. . Applichiamo la legge ai tre casi.

1.
$$f.e.m. = \left|\frac{\Phi(\vec{B}_2) - \Phi(\vec{B}_1)}{t_2 - t_1}\right| = \left|\frac{5\,\mathrm{Wb} - 5\,\mathrm{Wb}}{1\,\mathrm{s} - 1\,\mathrm{s}}\right| = 0\,\mathrm{V} \tag{23.2}$$

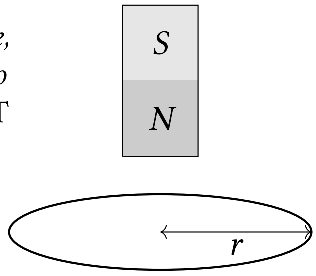
2.
$$f.e.m. = \left|\frac{\Phi(\vec{B}_2) - \Phi(\vec{B}_1)}{t_2 - t_1}\right| = \left|\frac{-3\,\mathrm{Wb} - 5\,\mathrm{Wb}}{3\,\mathrm{s} - 1\,\mathrm{s}}\right| = 4{,}0\,\mathrm{V} \tag{23.3}$$

3.
$$f.e.m. = \left|\frac{\Phi(\vec{B}_2) - \Phi(\vec{B}_1)}{t_2 - t_1}\right| = \left|\frac{8\,\mathrm{Wb} - 5\,\mathrm{Wb}}{5\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s}}\right| = 0{,}6\,\mathrm{V} \tag{23.4}$$

23.2 Corrente indotta e suo verso

Esercizio 191 *Un magnete viene accostato ad una spira di rame, rotonda e di raggio* $r = 10$ cm, *come indicato in figura. Il campo magnetico presente nel piano della spira passa da* 5,0 mT *a* 35,0 mT *in* 3 s.

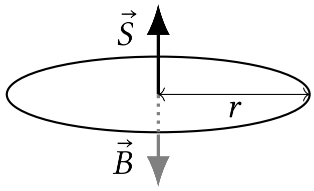
1. *Quanto vale le f.e.m. media indotta?*
2. *Qual è il verso della corrente indotta?*



La variazione del campo magnetico concatenato con la spira induce in questo una forza elettromotrice indotta che possiamo determinare con la legge di Faraday-Neumann.

$$f.e.m. = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} \tag{23.5}$$

Supponiamo che il campo magnetico del magnete sia uniforme su tutto il piano della spira. Per dare un segno al flusso del campo abbiamo bisogno di conoscere l'angolo relativo tra il verso del campo e quello della superficie orientata associata alla spira. La superficie è orientata secondo la normale alla superficie stessa. Nel nostro caso abbiamo due possibilità: a nostro arbitrio scegliamo quello verso l'alto. Possiamo rappresentare quel che avviene nel piano della spira con il disegno posto qui a fianco.



1. Con queste premesse possiamo calcolare quanto vale il flusso all'inizio e alla fine dell'accostamento del magnete.

$$\begin{gathered}\Phi_{\mathrm{i}}(\vec{B}) = \vec{B}_{\mathrm{i}} \cdot \vec{S} = \\ |\vec{B}_{\mathrm{i}}||\vec{S}|\cos(\alpha) = B_{\mathrm{i}}\pi r^2 \cos(180) = 0{,}005\,\mathrm{T}\cdot\pi\cdot(0{,}1\,\mathrm{m})^2\cdot(-1) = -1{,}57\times10^{-4}\,\mathrm{Wb}\end{gathered} \tag{23.6}$$

$$\begin{gathered}\Phi_{\mathrm{f}}(\vec{B}) = \vec{B}_{\mathrm{f}} \cdot \vec{S} = \\ |\vec{B}_{\mathrm{f}}||\vec{S}|\cos(\alpha) = B_{\mathrm{f}}\pi r^2 \cos(180) = 0{,}035\,\mathrm{T}\cdot\pi\cdot(0{,}1\,\mathrm{m})^2\cdot(-1) = -1{,}10\times10^{-3}\,\mathrm{Wb}\end{gathered} \tag{23.7}$$

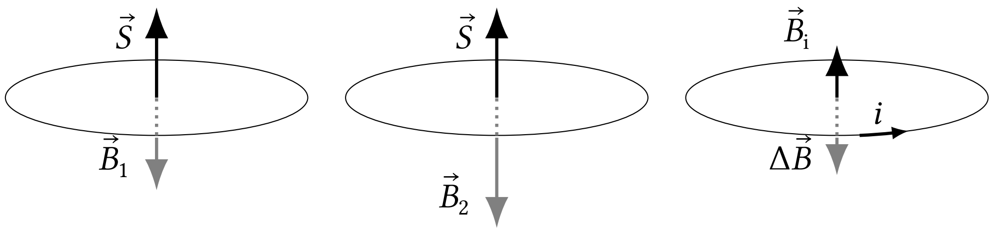
Ora applichiamo questi dati alla legge di Faraday-Neumann, considerando anche i segni:

$$f.e.m. = -\frac{\Phi_{\mathrm{f}}(\vec{B}) - \Phi_{\mathrm{i}}(\vec{B})}{\Delta t} = -\frac{-1{,}10\times10^{-3}\,\mathrm{Wb} - (-1{,}57\times10^{-4}\,\mathrm{Wb})}{3\,\mathrm{s}} = 3{,}14\times10^{-4}\,\mathrm{V} \tag{23.8}$$

2. Per trovare il verso della corrente indotta possiamo procedere in due modi.

   Metodo analitico
   La scelta iniziale di un verso per la superficie orientata ci serve non solo per dare un segno al flusso, ma anche per riferire ad esso il verso della corrente indotta. Il segno della f.e.m. è risultato positivo. Di conseguenza se il pollice della mano destra (chiusa ad indicare un OK) è orientato come il vettore $\vec{S}$ allora le altre dita si avvolgono come il verso della corrente. In termini più formali: un osservatore che venga attraversato dai piedi alla testa dal vettore $\vec{S}$ vede la corrente circolare in verso antiorario. Possiamo osservare la corrente e il suo verso nell'ultima spira rappresentata nell'esercizio.

Metodo della Legge di Lenz
La legge di Lenz stabilisce che il verso della corrente indotta è tale da opporsi alla causa che l'ha generato; in particolare la corrente indotta è tale da generare un campo indotto che si oppone alla variazione del campo che l'ha indotto.
Nella figura seguente indichiamo il campo nel momento iniziale e poi nel momento finale.
La variazione $\Delta\vec{B}$ del campo magnetico è diretta verso il basso: di conseguenza nella spira deve circolare una corrente *i* che produce un campo indotto verso l'alto, tale da opporsi alla variazione del campo che l'ha indotto.



Nota

Se nel disegno iniziale avessimo messo la spira orientata verso il basso sarebbe cambiato qualcosa?
Per quanto riguarda i due flussi sarebbe cambiato il segno e la variazione sarebbe stata positiva invece che negativa. La f.e.m., legata alla variazione di flusso, avrebbe avuto il segno opposto.

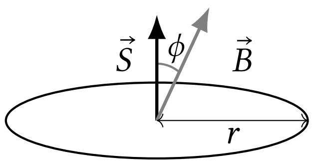
Il verso della corrente indotta sarebbe stato lo stesso, perché avrei avuto sia il verso della superficie orientata che quello della f.e.m. opposti. Il verso della corrente non dipende dalla scelta geometrica che facciamo per affrontare il problema, ma dipende dalla fisica dello stesso.

Esercizio 192 *Una spira rotonda viene accostata ad un magnete, come indicato nella figura dell'esercizio precedente. Il campo magnetico presente nel piano della spira passa da* 5,0 mT *a* 35,0 mT.

1. *Quanto vale le f.e.m. media indotta?*
2. *Qual è il verso della corrente indotta?*

Ai fini della f.e.m. indotta e della corrente associata non c'è nessuna particolare differenza tra l'avvicinare la spira al magnete fermo o viceversa, come avviene nell'esercizio precedente: infatti non appare in nessun calcolo e in nessuna delle rappresentazioni chi si stia muovendo e verso chi. Di conseguenza i risultati sono gli stessi già trovati.

Esercizio 193 *Una spira conduttrice circolare di raggio* 5,0 cm *e resistenza* $R = 145\,\Omega$ *è immersa in un campo magnetico la cui direzione forma un angolo* $\phi = 19°$ *con la normale alla spira. L'intensità del campo magnetico segue la seguente legge:* $B(t) = \sin(2\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t - 4)\,\mathrm{T}$



1. *Determina l'espressione funzionale del flusso del campo magnetico attraverso la superficie.*
2. *Determina la f.e.m. indotta istantaneamente sulla spira dal flusso del campo.*
3. *Determina la corrente che circola nella spira all'istante* $t = 3{,}5$ s.

1. Il flusso del campo magnetico attraverso una superficie piana è il prodotto scalare del campo magnetico che l'attraversa per l'area orientata della superficie. Nel nostro caso la superficie è un cerchio. Come verso di $\vec{S}$ scegliamo quello della normale alla superficie indicata nel testo. Potevamo scegliere anche il verso opposto, essendo anch'esso normale alla superficie e quindi adatto ad indicare la direzione e verso della superficie orientata.

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = |\vec{B}||\vec{S}| \cos(\phi) = \sin(2\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t - 4) \cdot \pi r^2 \cdot \cos(19^\circ)\,\mathrm{T} = \tag{23.9}$$
$$\sin(2\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t - 4) \cdot 3{,}141 \cdot (0{,}05\,\mathrm{m})^2 \cdot 0{,}946\,\mathrm{T} = 7{,}42 \times 10^{-3} \sin(2\,\mathrm{s}^{-1} t - 4)\mathrm{Wb}$$

2. La f.e.m. istantanea la ricaviamo dalla legge di Faraday-Neumann in forma differenziale:

$$f.e.m. = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}|\vec{B}||\vec{S}|\cos(\phi)}{\mathrm{d}t} = -|\vec{S}|\cos(\phi)\frac{\mathrm{d}|\vec{B}|}{\mathrm{d}t} = \tag{23.10}$$
$$-7{,}42 \times 10^{-3} \cos(2\,\mathrm{s}^{-1} t - 4)\mathrm{Wb} \cdot 2\,\mathrm{s}^{-1} = -1{,}48 \times 10^{-2} \cos(2\,\mathrm{s}^{-1} t - 4)\mathrm{V}$$

Osserviamo che:

- La derivata del flusso è fatta rispetto al tempo; ciò che nell'espressione del flusso rimane costante esce dall'operazione di derivazione.
- L'espressione funzionale del campo magnetico è una funzione composta del tipo $f(g(t))$ dove la $g(t) = s^{-1}t - 4$ e la derivata rispetto al tempo della $g(t)$ è:

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(2\,\mathrm{s}^{-1} t - 4)}{\mathrm{d}t} = 2\,\mathrm{s}^{-1} \tag{23.11}$$

- L'unità di misura dell'argomento di funzioni trascendenti (in questo caso il seno) sono sempre adimensionali.
- Nel derivare una espressione le unità di misura presenti si comportano come costanti.
- La derivata del modulo di un vettore ha un segno; sebbene un modulo sia positivo può comunque essere una funzione crescente o decrescente e quindi con derivata positiva o negativa.

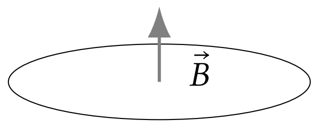
3. La corrente che circola in un certo istante la ricaviamo con la prima legge di Ohm, considerando il circuito come fosse solamente resistivo:

$$i(3{,}5\,\mathrm{s}) = \frac{V(3{,}5\,\mathrm{s})}{R} = \frac{-1{,}48 \times 10^{-2} \cos(2\,\mathrm{s}^{-1} 3{,}5\,\mathrm{s} - 4)\mathrm{V}}{145\,\Omega} = 1{,}01 \times 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{23.12}$$

Avvertenza
L'argomento delle funzioni goniometriche può essere un angolo misurato in gradi o in radianti. Normalmente nei compiti d'esame di matematica l'argomento è inteso in radianti. Il testo ci dava un angolo in gradi e nel calcolare il prodotto scalare abbiamo usato i gradi come argomento del coseno. Nell'ultimo calcolo, per coerenza, abbiamo inteso il numero che compare ad argomento del coseno come una misura in gradi. Il risultato sarebbe stato diverso se lo avessimo inteso come una misura in radianti.

Esercizio 194 *Una spira rotonda è immersa in un campo magnetico costante e uniforme* $B = 350\,\mu\mathrm{T}$*, come indicato in figura. Il raggio della spira varia linearmente da* 25 cm *a* 5 cm *in otto secondi.*

1. *Quanto vale le f.e.m. indotta media?*
2. *Quanto vale le f.e.m. indotta istantanea?*
3. *Qual è il verso della corrente indotta media nell'intervallo dato?*
4. *Qual è il verso della corrente indotta istantanea nello stesso intervallo?*



Se vogliamo calcolare la f.e.m. indotta nella spira dobbiamo applicare la legge di Faraday-Neumann e quindi dobbiamo considerare il flusso del campo magnetico e l'area sottesa dalla spira. La spira è rotonda, ma la superficie racchiusa non è costante, ma funzione del raggio che è funzione del tempo.

$$S = \pi r^2(t) \tag{23.13}$$

Del raggio sappiamo che è una funzione lineare e quindi ha questa forma:

$$r(t) = m \cdot t + q \tag{23.14}$$

dove q è il valore al tempo iniziale $t = 0$ s e m è la velocità di variazione. Per cui:

$$m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_\mathrm{f} - r_\mathrm{i}}{t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i}} = \frac{0{,}05\,\mathrm{m} - 0{,}25\,\mathrm{m}}{8\,\mathrm{s}} = -\frac{0{,}20\,\mathrm{m}}{8\,\mathrm{s}} = -0{,}025\,\mathrm{m/s} \tag{23.15}$$

$$r(t) = -0{,}025\,\mathrm{m/s} \cdot t + 0{,}25\,\mathrm{m} \tag{23.16}$$

1. Per trovare la f.e.m. indotta media non abbiamo bisogno di conoscere il comportamento della spira durante la sua contrazione, ma solo il comportamento all'inizio e alla fine del processo. Per semplicità orientiamo la spira, ovvero il vettore $\vec{S}$, nello stesso verso del campo magnetico. L'angolo tra i due vettori è 0°. Calcoliamo il flusso del campo all'inizio e alla fine del processo.

$$\begin{gathered}\Phi_\mathrm{i}(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S}_\mathrm{i} = \\ |\vec{B}||\vec{S}_\mathrm{i}| \cos(\alpha) = B\pi {r_\mathrm{i}}^2 \cos(0) = 0{,}350\,\mathrm{T} \cdot \pi \cdot (0{,}25\,\mathrm{m})^2 \cdot (1) = 6{,}87 \times 10^{-2}\,\mathrm{Wb}\end{gathered} \tag{23.17}$$

$$\begin{gathered}\Phi_\mathrm{f}(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S}_\mathrm{i} = \\ |\vec{B}||\vec{S}_\mathrm{i}| \cos(\alpha) = B\pi {r_\mathrm{f}}^2 \cos(0) = 0{,}350\,\mathrm{T} \cdot \pi \cdot (0{,}05\,\mathrm{m})^2 \cdot (1) = 2{,}75 \times 10^{-3}\,\mathrm{Wb}\end{gathered} \tag{23.18}$$

Ora applichiamo questi dati alla legge di Faraday-Neumann:

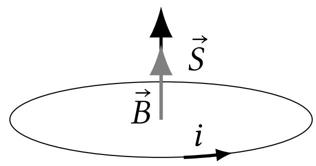
$$f.e.m. = -\frac{\Phi_\mathrm{f}(\vec{B}) - \Phi_\mathrm{i}(\vec{B})}{\Delta t} = -\frac{2{,}75 \times 10^{-3}\,\mathrm{Wb} - (6{,}87 \times 10^{-2}\,\mathrm{Wb})}{3\,\mathrm{s}} = 8{,}25 \times 10^{-3}\,\mathrm{V} \tag{23.19}$$

2. Per trovare la f.e.m. istantanea scriviamo l'espressione funzionale del flusso magnetico concatenato e poi facciamone la derivata rispetto al tempo nella legge di Faraday-Neumann.

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S}(t) = |\vec{B}||\vec{S}(t)| \cos(\alpha) = B\pi r(t)^2 \cos(0) = B\pi(-0{,}025\,\mathrm{m/s} \cdot t + 0{,}25\,\mathrm{m})^2 \tag{23.20}$$

$$
\begin{aligned}
f.e.m. = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(B\pi(-0{,}025\ \mathrm{m/s}\cdot t + 0{,}25\ \mathrm{m})^2)}{\mathrm{d}t} = \\
-B\pi\frac{\mathrm{d}(-0{,}025\ \mathrm{m/s}\cdot t + 0{,}25\ \mathrm{m})^2}{\mathrm{d}t} = -(B\pi 2)(-0{,}025\ \mathrm{m/s}\cdot t + 0{,}25\ \mathrm{m})(-0{,}025\ \mathrm{m/s}) = \\
-(0{,}350\ \mathrm{T}\cdot 3,141\cdot 2)(-0{,}025\ \mathrm{m/s}\cdot t + 0{,}25\ \mathrm{m})(-0{,}025\ \mathrm{m/s}) = \\
-(-5{,}50\times 10^{-2}\ \mathrm{V/m})(-0{,}025\ \mathrm{m/s}\cdot t + 0{,}25\ \mathrm{m}) = \\
-1{,}37\times 10^{-3}\ \mathrm{V/s}\cdot t + 1{,}37\times 10^{-2}\ \mathrm{V}
\end{aligned}
\tag{23.21}
$$

3. Per trovare il verso della corrente indotta consideriamo il segno della f.e.m.: esso è conseguenza della scelta fatta per l'orientazione della superficie orientata. Al segno positivo della f.e.m. è associata una corrente che segue la regola della mano destra, con il pollice orientato come il vettore $\vec{S}$.
   Di conseguenza il verso della corrente è quello indicato in figura.

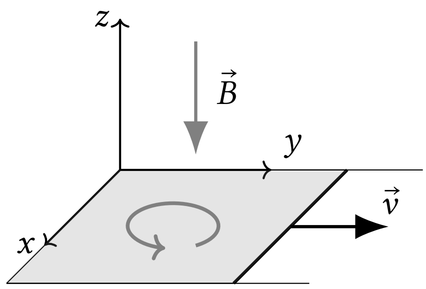


4. Possiamo osservare che il segno della funzione f.e.m. è positivo al tempo $t = 0$ s; poi decresce linearmente fino ad annullarsi al tempo $t = 10$ s. Per cui, nell'intervallo di tempo richiesto, la f.e.m. mantiene sempre il segno positivo e la corrente sempre lo stesso verso indicato al punto precedente.

23.3 F.e.m. mozionale

Esercizio 195 *Una spira rettangolare è posta nel piano xy come indicato in figura. Una lato, di larghezza* $l = 18\,\text{cm}$*, si muove con velocità* $v = 8\,\text{m/s}$ *verso destra. La spira è immersa in un campo magnetico, uniforme e constante, di* $2{,}5\,\text{T}$ *orientato nella direzione dell'asse z e perpendicolare alla spira, con il verso indicato in figura. Tenendo conto del verso positivo di percorrenza della spira indicato in figura, calcola:*

1. *la forza elettromotrice indotta nella spira;*
2. *il verso della corrente indotta;*
3. *la forza, in modulo direzione e verso, che agisce sul lato mobile della spira quando è in movimento.*



1. La forza elettromotrice indotta nella spira è data dalle legge di Faraday-Neumann.

$$f.e.m. = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} \tag{23.22}$$

dove $d\Phi(\vec{B})$ è la variazione del flusso del campo magnetico concatenato con la spira.
Il flusso del campo magnetico è il prodotto scalare del campo magnetico per la superficie orientata del piano della spira.
La superficie è rettangolare, la sua area é $A = bh$, dove possiamo prendere come altezza il lato mobile e come base la lunghezza dell'altro lato ad un certo istante t. L'estremità destra della base si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v, partendo da una lunghezza iniziale b_0 all'istante $t = 0$:

$$b(t) = b_0 + vt \tag{23.23}$$

Quindi l'area della spira all'istante t vale:

$$A = bh = (b_0 + vt)h \tag{23.24}$$

Per trovare il flusso del campo dobbiamo conoscere l'orientazione del campo magnetico rispetto alla direzione della spira. Se il verso di percorrenza scelto (a piacimento) è quello della figura, la direzione positiva della spira è verso il basso, perpendicolarmente al piano della spira, secondo la legge della mano destra (prendendo il pollice come direzione della spira e le altre dita della mano come il verso scelto del contorno della spira). In questo caso la spira forma un angolo di $\theta = 0°$ con il campo magnetico.

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = |\vec{B}||\vec{S}| \cos(\theta) = Bh(b_0 + vt) \tag{23.25}$$

Se facciamo la derivata rispetto al tempo del flusso otteniamo:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = Bhv = 2{,}5\,\text{T} \cdot 0{,}18\,\text{m} \cdot 8\,\text{m/s} = 3{,}6\,\text{V} \tag{23.26}$$

2. Il verso della corrente indotta è tale da generare un campo che si oppone alla variazione del flusso del campo concatenato alla spira che l'ha generata. In questo caso il campo esterno è costante, la superficie della spira sta aumentando e quindi sta aumentando il flusso del campo magnetico ad essa concatenato. Il flusso è negativo ovvero diretto verso il basso e sta aumentando in modulo. Si deve quindi creare un campo magnetico orientato verso l'alto che crei un controflusso diretto verso l'alto. Se questo campo è diretto verso l'alto, deve essere generato da una corrente indotta che, per la regola della mano destra indicata precedentemente, è orientata in verso opposto a quello dato per la spira.
3. In questa situazione su tutti i lati della spira circola corrente. Per la seconda legge di Laplace su ogni lato della spira agisce una forza che è data dalla relazione:

$$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B} \tag{23.27}$$

dove $\vec{l}$ è un vettore orientato come il tratto l di conduttore, $\vec{B}$ il campo magnetico ed $\vec{F}$ la forza che agisce sul tratto di conduttore. Seguendo la regola della mano destra e orientando l'indice nella direzione e verso di $\vec{l}$, il medio (a 90°) nella direzione e verso del campo magnetico, troviamo che la forza è orientata nella direzione e verso del pollice.
In questo caso la forza che agisce sul tratto mobile della spira la spinge verso sinistra, cioè in verso opposto alla sua velocità, come stabilisce anche la legge di Lenz.

23.4 Circuito RL

Esercizio 196 *Una bobina circolare, lunga* 3,7 cm*, di raggio* 12 mm *e resistenza* $r = 15\,\Omega$*, è composta da* 35 *spire di rame. La bobina viene sottoposta ad una differenza di potenziale costante di* 25 V*.*

1. *Calcola l'induttanza della bobina.*
2. *Trova l'energia accumulata nel campo magnetico della bobina.*
3. *Se il generatore di tensione viene staccato all'istante* $t = 5$ s *e il circuito viene immediatamente cortocircuitato, quanto vale la corrente che circola dopo* 3 *secondi?*

1. L'induttanza L di un solenoide è dato dalla seguente relazione:

$$L = \mu_0 A \frac{N^2}{l} \tag{23.28}$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto, A è l'area della sezione trasversale del solenoide, N il numero di spire, l la lunghezza della spirale. In questo caso:

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7}\pi(0{,}012\,\mathrm{m})^2 \frac{35^2}{0{,}037\,\mathrm{m}} = 1{,}88 \times 10^{-5}\,\mathrm{H} \tag{23.29}$$

2. L'energia accumulata nel campo magnetico della bobina è legata alla corrente i che l'attraversa dalla seguente relazione:

$$E = \frac{1}{2} L i^2 \tag{23.30}$$

Per la prima legge di Ohm la corrente che circola nel circuito in regime stazionario é semplicemente:

$$i = \frac{\Delta V}{r} = \frac{25\,\mathrm{V}}{15\,\Omega} = 1{,}67\,\mathrm{A} \tag{23.31}$$

dal momento che a regime, in un circuito a corrente continua, l'induttanza non influisce sulla corrente. Per cui l'energia accumulata vale:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1{,}88 \times 10^{-5}\,\mathrm{H} \cdot (1{,}67\,\mathrm{A})^2 = 2{,}62 \times 10^{-5}\,\mathrm{J} \tag{23.32}$$

3. Il nostro circuito è un circuito RL; togliendo il generatore si trasforma in un circuito RL alla sua apertura. La corrente che circola all'istante t dopo aver staccato il generatore è:

$$i(t) = i_0 \mathrm{e}^{-tr/L} \tag{23.33}$$

Ci viene detto che il generatore viene staccato all'istante $t = 5$ s: ciò non ha alcuna rilevanza perché ciò che importa è quel che accade dopo. A noi interessa trovare l'intensità di corrente dopo 3 s dall'esclusione del generatore quindi:

$$i(3\,\mathrm{s}) = 1{,}67\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{(-3\,\mathrm{s}\cdot 15\,\Omega/1{,}88\times 10^{-5}\,\mathrm{H})} \cong 0\,\mathrm{A} \tag{23.34}$$

24 Equazioni di Maxwell e onde e.m.

24.1 Corrente di spostamento

Esercizio 197 *In una regione di spazio vuota la circuitazione del campo magnetico attraverso una linea chiusa l vale* $2{,}34 \times 10^{-3}$ Tm.

Trova la corrente di spostamento attraverso la linea chiusa.

La legge di Ampére-Maxwell lega la circuitazione del campo magnetico alla presenza di due tipi di correnti: quelle di conduzione I_c, con la presenza di cariche in movimento, e quella di spostamento I_s, legata a campi elettrici in variazione.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_c + I_s) \tag{24.1}$$

La circuitazione del campo magnetico è fatta su una linea chiusa, come nel nostro caso. Le correnti sono concatenate con la linea chiusa. La regione di spazio vuota esclude la presenza di cariche: è presente solo la corrente di spostamento. Per cui:

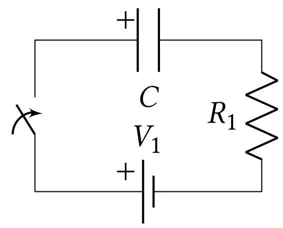
$$I_s = \frac{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}}{\mu_0} = \frac{2{,}34 \times 10^{-3}\ \mathrm{Tm}}{4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Tm/A}} = 1{,}86 \times 10^{3}\ \mathrm{A} \tag{24.2}$$

Esercizio 198 *Un circuito è costituito dalla resistenza* $R = 150\,\Omega$ *e da un condensatore di capacità* $C = 130\,\mu\text{F}$ *posti in serie con un generatore da* $12\,\text{V}$*. Il condensatore è a facce piane e parallele, di forma quadrata, di lato* $l = 5\,\text{cm}$*; tra le armature è interposta aria.*

Il circuito (mostrato in figura) è inizialmente aperto; il condensatore scarico.

Il circuito viene chiuso e dopo un tempo $t = 0{,}05\,\text{s}$ *ci domandiamo:*

1. *Quanto vale la corrente di conduzione alle armature del condensatore?*
2. *Quanto vale la corrente di spostamento tra le armature del condensatore?*
3. *Qual è il verso e direzione del campo elettrico all'interno del condensatore?*
4. *Quanto vale la velocità di variazione del campo elettrico?*
5. *Quanto vale il modulo del campo magnetico su una linea circolare di raggio* $r = 5{,}0\,\text{mm}$ *centrata sul filo di interconnessione tra gli elementi del circuito?*
6. *Quanto vale il modulo del campo magnetico su una linea circolare di raggio* $r = 50{,}0\,\text{mm}$ *centrata sull'asse del condensatore e posta al suo interno?*
7. *Quanto vale il modulo del campo magnetico su una linea circolare di raggio* $r = 5{,}0\,\text{mm}$ *centrata sull'asse del condensatore?*
8. *Come è orientato il campo magnetico sulla linea precedente?*



1. Abbiamo un circuito RC inizialmente scarico e in chiusura. La corrente che fluisce nel circuito all'istante 0,5 s vale:

$$I(0{,}05\,\text{s}) = \frac{V}{R}\mathrm{e}^{\left(-\frac{0{,}05\,\text{s}}{RC}\right)} = \frac{12\,\text{V}}{150\,\Omega}\mathrm{e}^{\left(-\frac{0{,}5\,\text{s}}{150\,\Omega\cdot 130\times 10^{-6}\,\text{F}}\right)} = 6{,}15\times 10^{-3}\,\text{A} \tag{24.3}$$

La corrente di conduzione che arriva alle armature del condensatore è questa corrente.

2. La corrente complessiva che fluisce nel circuito non si interrompe nel condensatore. *La corrente di spostamento tra le armature del condensatore è in modulo e verso la stessa corrente di conduzione che scorre nel filo.*

In realtà questo è vero solo parzialmente. Infatti la corrente di spostamento è associata alla variazione del flusso del campo elettrico.

$$I_s = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{E})}{\mathrm{d}t} \tag{24.4}$$

Se consideriamo la corrente tra le armature ci stiamo limitando a considerare il flusso e quindi il campo elettrico presente solo tra le armature. In realtà il campo si estende in tutto lo spazio intorno alle armature e solo considerando il flusso esteso ad una superficie infinitamente estesa potremo ottenere una corrente di spostamento uguale a quella di conduzione che alimenta il condensatore.

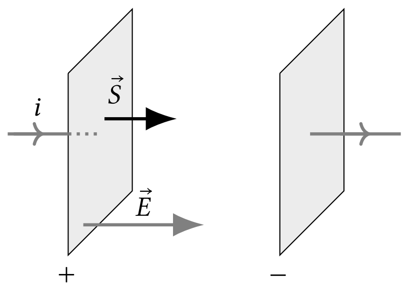
3. *Il verso del campo elettrico va sempre dall'armatura positiva a quella negativa*: nel nostro modello semplificato è uniforme in tutti i punti dello spazio tra le armature e vale zero in tutto il resto

dello spazio. Questo verso non ha importanza ai fini del verso della corrente di spostamento, la quale dipende piuttosto dalla variazione del campo.

4. Per rispondere alla domanda applichiamo la legge di Ampére-Maxwell alla regione compresa tra le armature del condensatore, sapendo che in essa è presente solo la corrente di spostamento e non quella di conduzione.

(24.5)

- Facciamo la supposizione, prima fatta, che la corrente di spostamento sia uguale alla corrente di conduzione che alimenta il condensatore.
- Sviluppiamo l'espressione del flusso: il flusso è quello di un campo elettrico attraverso una superficie.
- Nella figura seguente indichiamo il campo elettrico in un punto qualsiasi sulla faccia della prima armatura. Esso ha la stessa e direzione e verso in qualsiasi punto dello spazio compreso tra le armature: basta indicarne direzione e verso in un punto a piacere.
- Come superficie orientata, per calcolare il flusso, scegliamo la prima armatura; prendiamo (a nostro arbitrio) come direzione e verso quello che va dalla prima alla seconda armatura. Indichiamo il vettore in un punto qualsiasi della faccia.
- La corrente di conduzione nella fase di carica ha il verso indicato in figura. Esso coincide con il verso dato al vettore $\vec{S}$: dobbiamo prendere la corrente con il segno positivo nella legge di Ampére-Maxwell.



$$I_s = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d(|\vec{S}||\vec{E}|\cos(0°))}{dt} = \varepsilon_0 S \frac{dE}{dt} \tag{24.6}$$

Il termine $\dfrac{dE}{dt}$ rappresenta la velocità di variazione del campo elettrico.

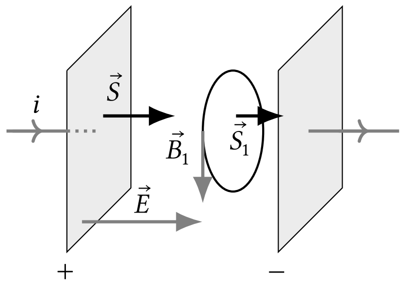
$$\frac{dE}{dt} = \frac{I_s}{\varepsilon_0 S} = \frac{I_s}{\varepsilon_0 (0{,}05\ \text{m})^2} = 2{,}78 \times 10^{11}\ \text{V/s} \tag{24.7}$$

5. Intorno ad un filo percorso da corrente si forma un campo magnetico. Se il tratto di filo è sufficientemente rettilineo ed esteso rispetto alla distanza dal filo possiamo applicare ad esempio la legge di Biot-Savart per trovarne l'intensità.

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_c}{r} = \frac{\mu_0 \cdot 6{,}15 \times 10^{-3}\ \text{A}}{2\pi \cdot 0{,}005\ \text{m}} = 2{,}47 \times 10^{-7}\ \text{T} \tag{24.8}$$

6. Anche nella zona tra le armature del condensatore la circuitazione del campo magnetico ha lo stesso valore, ma solo se prendiamo una linea chiusa che circonda completamente il condensatore. La nostra linea chiusa è una circonferenza di 0,1 m di diametro: le armature del condensatore stanno completamente all'interno. Quindi *il campo magnetico ha lo stesso valore che abbiamo determinato al punto precedente*.

7. In questo caso la linea chiusa descrive una circonferenza che è più piccola delle armature del condensatore. Di conseguenza la superficie $\vec{S}_1$ da considerare nel calcolo del flusso del campo elettrico è più piccola delle armature del condensatore. La velocità di cambiamento del campo elettrico è invece la medesima calcolata nei punti precedenti.
   Il campo magnetico lo chiamo B_1 ad indicare che è diverso da quello che calcoleremmo fuori dal condensatore. In questo caso ci viene chiesto il campo su una linea circolare centrata sull'asse del condensatore: siamo nelle condizioni di simmetria per usare anche la legge di Ampére-Maxwell. Il campo ha lo stesso valore (direzione e verso) in ogni punto della circonferenza: possiamo farlo uscire dall'integrale. L'integrale che rimane rappresenta la lunghezza della circonferenza.



$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = B_1 \oint dl = B_1 \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 S_1 \frac{dE}{dt} \tag{24.9}$$

$$B_1 = \frac{\left(\mu_0 \varepsilon_0 S_1 \dfrac{dE}{dt}\right)}{2\pi r} = \frac{\left(\mu_0 \varepsilon_0 \pi \cdot (0{,}005\ \text{m})^2 \cdot 2{,}78 \times 10^{11}\ \text{V/s}\right)}{2\pi \cdot 0{,}005\ \text{m}} = 7{,}74 \times 10^{-9}\ \text{T} \tag{24.10}$$

Nota

C'è un'ulteriore elemento di irrealisticità nel condensatore che abbiamo descritto: è la sua capacità. Trattandosi di un condensatore a facce piane e parallele, con l'aria tra le armature, la sua capacità è data dalla formula $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$. La distanza tra le armature dovrebbe essere infinitesima per dare quella capacità. Tuttavia se avessimo usato un valore più realistico per la capacità avremo avuto valori piccolissimi per la costante di tempo del circuito RC.

24.2 Onde elettromagnetiche

Esercizio 199 *Trova il valore efficace del campo elettrico e magnetico associati ad un'onda elettromagnetica la cui intensità è* $I = 3{,}5\,\mathrm{W/m^2}$.

L'intensità o irraggiamento di un'onda elettromagnetica nel vuoto è il prodotto della velocità della luce c per la densità volumica media di energia $\overline{w}$ associata all'onda:

$$I = c\overline{w} \tag{24.11}$$

La densità volumica di energia $\overline{w}$ è legata al valore massimo del campo elettrico E_0 dalla seguente relazione:

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \tag{24.12}$$

Infine il valore efficace del campo elettrico E_{eff} è:

$$E_{\mathrm{eff}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \tag{24.13}$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\begin{aligned} I &= c\varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2} = c\varepsilon_0 E_{\mathrm{eff}}^2 \\ E_{\mathrm{eff}} &= \sqrt{\frac{I}{c \cdot \varepsilon_0}} = 1320\,\mathrm{V/m} \end{aligned} \tag{24.14}$$

Il campo elettrico è legato al campo magnetico secondo la relazione $E = cB$ quindi:

$$B_{\mathrm{eff}} = \frac{E_{\mathrm{eff}}}{c} = 4{,}4 \times 10^{-6}\,\mathrm{T} \tag{24.15}$$

Esercizio 200 *Trova la potenza a cui deve trasmettere una stazione radiofonica per avere a* $100\,\mathrm{km}$ *di distanza un segnale il cui campo elettrico associato vale almeno* $6{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{V/m}$.

La potenza associata ad un'onda è il prodotto tra l'intensità dell'onda e la superficie che attraversa. Nel nostro caso, supponendo che l'onda venga irraggiata isotropicamente in tutte le direzioni, possiamo immaginare che arrivi nel punto di ricezione su una superficie sferica il cui raggio è la nostra distanza dalla sorgente. Supponiamo inoltre che il valore minimo del campo elettrico nel punto di ricezione sia il suo valore efficace.

$$\begin{aligned} &P = IS = (c\varepsilon_0 E_{\mathrm{eff}}^2)(4\pi r^2) = \\ &2{,}99 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 8{,}86 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \cdot (6{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{V/m})^2 \cdot 4\pi \cdot (100\,\mathrm{km})^2 = 30\,\mathrm{W} \end{aligned} \tag{24.16}$$

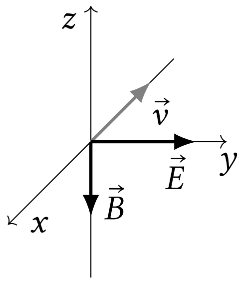
Esercizio 201 *Un satellite in orbita intorno alla Terra ha* $70\,\mathrm{m}^2$ *di panelli solari esposti al Sole. Sapendo che assorbono completamente la luce che li investe, trova la pressione di radiazione a cui sono sottoposti e la forza esercitata dalla radiazione solare su di essi.*

1. Un fascio di onde elettromagnetiche che investono un oggetto possono esercitare su di esso una pressione: questa pressione varia a seconda che il fascio venga assorbito o riflesso.
   Nel caso di completo assorbimento e con la luce che incide normalmente alla superficie la pressione di radiazione vale:
   $$P = \frac{I}{\mathrm{c}} \tag{24.17}$$
   dove I è l'intensità della radiazione incidente e c la velocità della luce. Nel caso di superficie completamente riflettente la pressione raddoppia.
   La radiazione solare che incide sulla Terra ha un intensità media $I_\mathrm{R} = 1367\,\mathrm{W/m^2}$. Per cui:
   $$P = \frac{1367\,\mathrm{W/m^2}}{2{,}99 \times 10^8\,\mathrm{m/s^2}} = 4{,}57 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa} \tag{24.18}$$
2. La forza complessiva vale:
   $$F = PS = 4{,}1 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa} \cdot 70\,\mathrm{m}^2 = 3{,}20 \times 10^{-4}\,\mathrm{N} \tag{24.19}$$

Esercizio 202 *Un'onda elettromagnetica piana è linearmente polarizzata e si propaga nel vuoto. Il campo elettrico dell'onda varia secondo la legge* $\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx + \omega t)\,\hat{j}$.

1. *Qual è la direzione di propagazione dell'onda?*
2. *In quale direzione oscilla il campo elettrico?*
3. *Qual è la legge associata al campo magnetico dell'onda e in quale direzione oscilla?*
4. *Qual è il vettore di Poynting associato all'onda?*

1. Quando si parla di onda piana nello spazio si intende un'onda i cui fronte d'onda sono dei piani che si muovono tutti nella stessa direzione e con la stessa velocità. Per determinare la direzione di propagazione dell'onda dobbiamo guardare all'argomento della sua espressione funzionale. Nel nostro caso abbiamo una $f(x + vt)$, dove il tempo e la posizione sono sommati: abbiamo un'onda regressiva che avanza nel *verso negativo* dell'asse x.
2. Il versore $\hat{j}$ non sta ad indicare la direzione di propagazione, ma la direzione di oscillazione del campo. Il campo elettrico oscilla lungo la direzione del versore $\hat{j}$ ovvero lungo l'asse y oppure perpendicolarmente al piano xz.
3. Il campo magnetico associato ha un modulo di intensità $B = \frac{E}{c}$ dove E è il modulo del campo elettrico e c la velocità della luce nel vuoto. Questo vettore è perpendicolare al campo elettrico e alla direzione di propagazione dell'onda. In particolare forma una terna destra in cui il primo vettore è il campo elettrico, il secondo il campo magnetico e il terzo un vettore orientato $\vec{v}$ come la direzione e il verso di propagazione dell'onda.



Di conseguenza il vettore campo magnetico oscilla lungo l'asse z, in fase con il vettore campo elettrico, ma nel verso negativo dell'asse quando il campo elettrico è nel verso positivo, così come indicato in figura. Infine:

$$\vec{B}(x,t) = -\frac{E_0}{\mathrm{c}} \sin(kx + \omega t)\,\hat{k} \tag{24.20}$$

4. Il vettore di Poynting associato ad un'onda piana nel vuoto è così definito:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \tag{24.21}$$

Questo vettore è orientato come il vettore $\vec{v}$ prima espresso: infatti rappresenta direzione e verso di propagazione dell'onda. Il vettore campo elettrico e magnetico sono in questo caso perpendicolari quindi l'angolo tra essi è 90°. Il suo modulo è:

$$S = \frac{EB\sin(90°)}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mathrm{c}\mu_0} \sin^2(kx + \omega t) \tag{24.22}$$

Il vettore può essere espresso come:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{(E_0 \sin(kx + \omega t)\,\hat{j}) \wedge (-\frac{E_0}{\mathrm{c}} \sin(kx + \omega t)\,\hat{k})}{\mu_0} = \\ &= -\frac{E_0^2}{\mathrm{c}\mu_0} \sin^2(kx + \omega t)\,\hat{i} \end{aligned} \tag{24.23}$$

Esercizio 203 *Trova la velocità di un'onda elettromagnetica in un mezzo con costante dielettrica relativa $\varepsilon_\mathrm{r} = 2{,}5$ e permeabilità magnetica relativa $\mu_\mathrm{r} = 1{,}05$.*
Trova poi l'indice di rifrazione del mezzo in cui l'onda si sta propagando.

1. La velocità di un'onda elettromagnetica in un mezzo materiale può essere ottenuta con la seguente relazione:

$$v = \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}}} = \frac{2{,}99 \times 10^8\ \mathrm{m/s}}{2{,}5 \cdot 1{,}05} = 1{,}85 \times 10^8\ \mathrm{m/s} \tag{24.24}$$

2. L'indice di rifrazione del mezzo vale invece:

$$n = \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}} = 2{,}5 \cdot 1{,}05 = 2{,}63 \tag{24.25}$$

Esercizio 204 *Un fascio di luce non polarizzato di intensità* $I = 10\,\mathrm{W/m^2}$ *incide su un polarizzatore lineare: il polarizzatore ha l'asse di trasmissione che forma un angolo di* $60°$ *con l'asse* x*.*

Il fascio in uscita da questo polarizzatore viene intercettato da un altro polarizzatore lineare con l'asse di trasmissione che forma un angolo di $70°$ *con l'asse* x*.*

1. *Trova l'intensità della luce in uscita dal primo polarizzatore.*
2. *Trova l'intensità della luce in uscita dal secondo polarizzatore.*
3. *Trova l'angolo di un terzo polarizzatore lineare in grado di attenuare l'intensità della luce di un ulteriore* 50%*.*

1. L'intensità trasmessa da un polarizzatore lineare è la metà di quella intercettata, se il fascio incidente non è polarizzato, a prescindere dall'orientazione del polarizzatore.

$$I_1 = \frac{I}{2} = 5{,}0\,\mathrm{W/m^2} \tag{24.26}$$

2. Un fascio polarizzato linearmente, se viene intercettato da un polarizzatore lineare, emerge con un'intensità data dalla legge di Malus.

$$I_2 = I_1 \cos^2(\alpha) \tag{24.27}$$

dove l'angolo α è quello formato dall'asse di trasmissione del polarizzatore con la direzione di polarizzazione del fascio incidente: nel nostro caso sono $10°$.

$$I_2 = 5{,}0\,\mathrm{W/m^2} \cdot \cos^2(10°) = 4{,}85\,\mathrm{W/m^2} \tag{24.28}$$

3. Se vogliamo che un terzo polarizzatore dimezzi l'intensità applichiamo ancora la legge di Malus per trovare l'angolo per il quale:

$$\begin{aligned} \cos^2(\beta) &= \frac{1}{2} \\ \cos(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45° \end{aligned} \tag{24.29}$$

Se ci riferiamo ancora allo stesso asse x il polarizzatore deve avere un angolo di $115°$ o $25°$, cioè $45°$ in più o in meno rispetto all'angolo iniziale di $70°$.

25 Relatività

25.1 Dilazione dei tempi, contrazione delle lunghezze

Esercizio 205 *Andrea è un astronomo e Marco un astronauta: hanno entrambi* 40 *anni. Marco viene reclutato per fare un viaggio verso la stella Sirio, distante* 8,6 *anni luce, con un'astronave capace di andare alla velocità di* 0,95 c*. Trova:*

1. *quanto tempo dura il viaggio per Andrea e quanto per Marco;*
2. *quanto vale la distanza percorsa per Andrea e quanto per Marco;*
3. *l'età di entrambi quando viene raggiunta la stella.*

Supponiamo che sia Andrea che Marco si trovino ognuno in un sistema di riferimento inerziale. Il tempo e la distanza percorsa sono misurati tra due eventi: la partenza dalla Terra e l'arrivo su Sirio.

1. Per Andrea il tempo é misurato con un orologio posto fermo di fronte a sé. Tuttavia l'evento di partenza e di arrivo avvengono in luoghi differenti: non si tratta di un tempo proprio. Il tempo trascorso può essere ricavato dalla definizione di velocità.

$$v = \frac{\Delta x_0}{\Delta t} \tag{25.1}$$

dove v è la velocità dell'astronave, Δx_0 la distanza tra la Terra e Sirio, misurata stando fermi sulla Terra, e Δt il tempo trascorso.

$$\Delta t = \frac{\Delta x_0}{v} = \frac{8{,}6\ \mathrm{al}}{0{,}95\ \mathrm{c}} = 9{,}1\ \text{anni} = 2{,}9 \times 10^8\ \mathrm{s} \tag{25.2}$$

Se Andrea, sulla Terra, guarda l'orologio che Marco, sull'astronave, porta con sé, vedrà che il tempo trascorso (in questo caso tempo proprio perché misura l'intervallo di tempo tra due eventi che avvengo nello stesso posto) è:

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2{,}9 \times 10^8\ \mathrm{s}\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}95\ \mathrm{c}}{\mathrm{c}}\right)^2} = 8{,}9 \times 10^7\ \mathrm{s} \tag{25.3}$$

Questo è il tempo trascorso per Marco ed è un tempo proprio perché l'evento della partenza e dell'arrivo avvengo, nel suo sistema di riferimento, nella stessa posizione.

2. Chi misura la distanza tra la Terra e Sirio dal sistema di riferimento della Terra vede sia il luogo di arrivo che di partenza fermi nel proprio sistema di riferimento: questa distanza è una lunghezza propria. Essa vale:

$$l_0 = 8{,}6\ \mathrm{al} = 8{,}1 \times 10^{16}\ \mathrm{m} \tag{25.4}$$

Marco invece, nel suo sistema di riferimento, è come se stesse fermo e vedesse sia il punto di partenza che il punto di arrivo muoversi alla velocità v= 0,95 c: la distanza da lui misurata non è una lunghezza propria. La distanza da lui percorsa la possiamo ricavare dalla definizione di velocità, considerando il tempo Δt_0 da lui misurato per arrivare a destinazione.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t_0} \tag{25.5}$$

$$l = \Delta x = v\Delta t = 0{,}95\,\mathrm{c} \cdot 8{,}9 \times 10^7\,\mathrm{s} = 2{,}5 \times 10^{16}\,\mathrm{m} \tag{25.6}$$

Osserviamo che la velocità relativa tra il sistema di riferimento di Marco e quello di Andrea non può che essere, in modulo, la stessa per entrambi.
Possiamo ricavare questa distanza anche considerando il fenomeno della contrazione delle lunghezze.

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}} = 8{,}1 \times 10^{16}\,\mathrm{m}\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}95\,\mathrm{c}}{\mathrm{c}}\right)^2} = 2{,}5 \times 10^{16}\,\mathrm{m} \tag{25.7}$$

3. Infine, quando l'astronave giungerà alla meta, l'età di Andrea sarà:

$$t = 40\,\text{anni} + \Delta t = 49\,\text{anni} \tag{25.8}$$

Invece l'età di Marco:

$$t' = 40\,\text{anni} + \Delta t_0 = 43\,\text{anni} \tag{25.9}$$

Esercizio 206 *Una navicella spaziale viene inviata dalla Terra verso Giove; la navicella si muove con una velocità costante $v = 25\,\mathrm{km/s}$. Determina lo scarto temporale tra quanto indicato da un orologio a Terra, dopo un anno di viaggio, e quello posto sulla navicella.*

Abbiamo due eventi: la posizione della navicella alla partenza e quella dopo un anno. Il tempo Δt_0 trascorso sulla navicella (ancora incognito) è un tempo proprio: i due eventi avvengono, per questo sistema di riferimento, nella stessa posizione. Il tempo Δt trascorso sulla Terra è invece un tempo non proprio.

Tra i due tempi sussiste quindi la seguente relazione:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \tag{25.10}$$

Calcoliamo il fattore γ.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{25\,\mathrm{km/s}}{2{,}99 \times 10^5\,\mathrm{km/s}}\right)^2}} = 1{,}0000000035 \tag{25.11}$$

In questo risultato c'è tuttavia un problema: una usuale calcolatrice scientifica darà come risultato solo uno, non potendo gestire abbastanza cifre significative da mostrare le cifre finali del fattore qui calcolato.

Per risolvere questo problema, e quando le velocità sono molto inferiori a quelle della luce, possiamo utilizzare uno sviluppo in serie. Si può dimostrare che, se $x \ll 1$, vale con buona approssimazione la seguente relazione:

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x \tag{25.12}$$

Se applichiamo questa relazione al fattore gamma possiamo scrivere:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \tag{25.13}$$

$$\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{25\,\mathrm{km/s}}{2{,}99 \times 10^5\,\mathrm{km/s}}\right)^2 = 1 + 0{,}0000000035 \tag{25.14}$$

Per cui, se un anno sono 31536000 s, lo scarto temporale Δt_x tra i due orologi è:

$$\Delta t_x = \Delta t - \Delta t_0 = \gamma \Delta t_0 - \Delta t_0 = \Delta t_0(\gamma - 1) = 31536000\,\mathrm{s}\,((1 + 0{,}0000000035) - 1) = 0{,}11\,\mathrm{s} \tag{25.15}$$

25.2 Trasformazioni di Lorentz

Esercizio 207 *Abbiamo due sistemi di riferimento inerziale O e O'. Gli assi coordinati e le origini dei due sistemi sono sovrapposti all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$. Il secondo sistema si muove rispetto al primo con velocità $v = 7{,}3 \times 10^7\ \mathrm{m/s}$ nel verso positivo dell'asse x.*

Trova in che punto dello spazio tempo è individuato nel sistema O' un evento che nel sistema O accade all'istante $t = 3\ \mathrm{min}$ nel punto $\vec{P} \equiv (45\,\mathrm{km}; 3\,\mathrm{km}; 2\,\mathrm{km})$.

Per la particolare orientazione reciproca dei due sistemi di riferimento possiamo utilizzare la forma più semplice delle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{25.16}$$

dove:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{25.17}$$

Queste trasformazioni ci consentono di trovare le coordinate (t, x, y, z) di un evento nel sistema di riferimento O conoscendo le coordinate (t', x', y', z') dello stesso evento nel sistema di riferimento O'. Sostituiamo i dati:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{7{,}3 \times 10^7\ \mathrm{m/s}}{299792458\ \mathrm{m/s}}\right)^2}} = 1{,}031 \tag{25.18}$$

$$\begin{aligned} x' &= 1{,}031 \cdot (45 \times 10^3\ \mathrm{m} - 7{,}3 \times 10^7\ \mathrm{m/s} \cdot 180\ \mathrm{s}) = -1{,}35 \times 10^{10}\ \mathrm{m} \\ y' &= 3 \times 10^3\ \mathrm{m} \\ z' &= 2 \times 10^3\ \mathrm{m} \\ t' &= 1{,}031 \cdot \left(180\ \mathrm{s} - \frac{7{,}3 \times 10^7\ \mathrm{m/s} \cdot 45 \times 10^3\ \mathrm{m}}{(299792458\ \mathrm{m/s})^2}\right) = 186\ \mathrm{s} \end{aligned} \tag{25.19}$$

Quindi, nel sistema di riferimento O', l'evento accade all'istante $t' = 186\,\mathrm{s}$, nel punto di coordinate spaziali $\vec{P}' \equiv (-1{,}35 \times 10^{10}\ \mathrm{m}; 3 \times 10^3\ \mathrm{m}; 2 \times 10^3\ \mathrm{m})$.

Esercizio 208 *Abbiamo due osservatori, O e O′: il primo sta sulla Terra e il secondo si muove su un'astronave verso una stazione spaziale che dista 2 anni luce dalla Terra, procedendo alla velocità* $v = 0{,}50\,\mathrm{c}$. *Quando l'astronave parte per il suo viaggio i due osservatori si trovano nello stesso istante sulla Terra.*

1. *Trova i punti dello spazio-tempo, per i due osservatori, in cui inizia il viaggio.*
2. *Trova i punti dello spazio-tempo, per i due osservatori, in cui il viaggio termina.*
3. *Trova la durata del viaggio che ognuno dei due osservatori misura nel proprio sistema di riferimento, indicando quale delle due durate può interpretarsi come un tempo proprio.*
4. *Trova la lunghezza del viaggio che ognuno dei due osservatori misura nel proprio sistema di riferimento, indicando quale delle due può interpretarsi come lunghezza propria.*

Il testo ci dice che nell'istante iniziale il tempo è lo stesso per i due osservatori: poniamolo, a nostro arbitrio e per semplicità, uguale a zero.

$$t_1 = t'_1 = 0\,\mathrm{s} \tag{25.20}$$

Supponiamo che il moto avvenga in linea retta, a velocità costante. Se vale questa ipotesi possiamo considerare il sistema di riferimento della Terra e dell'astronave come inerziali e possiamo applicare le trasformazioni di Lorentz. Se il moto fosse differente quasi sicuramente dovremmo usare un modello molto più sofisticato, magari la relatività generale.

Per quanto riguarda l'orientazione spaziale poniamo l'asse x nella direzione della traiettoria del moto e con il verso positivo concorde con il verso della velocità dell'astronave. Gli assi y e z sono di conseguenza perpendicolari al moto e per essi non si osservano fenomeni relativistici: gli escludiamo dalla discussione.

Adesso possiamo fissare la posizione iniziale del viaggio nei due sistemi di riferimento in una coordinata qualsiasi dell'asse x: poniamola, a nostro arbitrio e per semplicità, uguale a zero per entrambe i sistemi. Come per il tempo esse sono definite a meno di una costante arbitraria.

$$x_1 = x'_1 = 0\,\mathrm{m} \tag{25.21}$$

1. Ora possiamo dire che la posizione iniziale nei due sistemi di riferimento inerziale è:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}'_1 \equiv (0\,\mathrm{m}; 0\,\mathrm{s}) \tag{25.22}$$

2. Per quanto costruito e conosciuto finora, tra i nostri sistemi di riferimento possiamo applicare le seguenti trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{25.23}$$

Per quanto riguarda il sistema di riferimento O, il punto di arrivo è a due anni luce dal punto di partenza, quindi:

$$x_2 = 2\,\mathrm{al} = 1{,}8908 \times 10^{16}\,\mathrm{m} \tag{25.24}$$

Il tempo trascorso può essere ricavato dalla definizione di velocità.

$$v = \frac{\Delta x_0}{\Delta t} \tag{25.25}$$

dove v è la velocità dell'astronave, Δx_0 la distanza tra la Terra e la stazioni spaziale, misurata stando fermi sulla Terra, e Δt il tempo trascorso.

$$t_2 = t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta x_0}{v} = \frac{2\,\mathrm{al}}{0{,}5\,\mathrm{c}} = 4{,}0\,\mathrm{anni} = 1{,}2614 \times 10^8\,\mathrm{s} \tag{25.26}$$

Quindi:

$$\vec{P_2} \equiv (x_2; t_2) = (2\,\mathrm{al}; 4\,\mathrm{a}) = (1{,}8908 \times 10^{16}\,\mathrm{m}; 1{,}2614 \times 10^8\,\mathrm{s}) \tag{25.27}$$

Per il sistema di riferimento O' sostituiamo quanto sappiamo nelle trasformazioni:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}5\,\mathrm{c}}{\mathrm{c}}\right)^2}} = 1{,}1547 \tag{25.28}$$

$$\begin{aligned} x'_2 &= 1{,}1547 \cdot (2\,\mathrm{al} - 0{,}5\,\mathrm{c} \cdot 4\,\mathrm{a}) = 0\,\mathrm{al} = 0\,\mathrm{m} \\ t'_2 &= 1{,}1547 \cdot \left(4\,\mathrm{a} - \frac{0{,}5\,\mathrm{c} \cdot 2\,\mathrm{al}}{\mathrm{c}^2}\right) = 3{,}45\,\mathrm{a} = 1{,}0925 \times 10^8\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{25.29}$$

Il punto di arrivo nel sistema di riferimento O' è:

$$\vec{P'_2} \equiv (x'_2; t'_2) = (0\,\mathrm{m}; 1{,}0925 \times 10^8\,\mathrm{s}) \tag{25.30}$$

3. Per il sistema di riferimento O, come abbiamo già calcolato, il viaggio dura:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_2 = 1{,}2614 \times 10^8\,\mathrm{s} \tag{25.31}$$

Per il sistema di riferimento O' il viaggio dura:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = t'_2 = 1{,}0925 \times 10^8\,\mathrm{s} \tag{25.32}$$

La durata del viaggio per il sistema di riferimento O' è un tempo proprio. Tra le due durate deve sussistere anche la relazione:

$$\Delta t' = \Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} \tag{25.33}$$

Infatti:

$$\frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{1{,}2614 \times 10^8\,\mathrm{s}}{1{,}1547} = 1{,}0925 \times 10^8\,\mathrm{s} = \Delta t' \tag{25.34}$$

4. Per il sistema di riferimento O la lunghezza del viaggio L, come sappiamo dal testo, è 2 al. La posizione di arrivo e di partenza sono misurabili nello stesso istante dallo stesso sistema di riferimento: abbiamo una lunghezza propria.
Per il sistema di riferimento O' la lunghezza L' *non é* $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. Infatti, oltre ad essere nulla, quella lunghezza è tra due eventi che per O' non avvengono nello stesso istante. Allora la lunghezza è ad esempio la distanza tra il punto di partenza e il traguardo visti entrambi al momento della partenza.
Se il moto è rettilineo uniforme il traguardo si trova ad una distanza che è il prodotto della velocità del viaggio per il tempo che esso dura.

$$L' = v \cdot t'_2 = 0{,}5\,\mathrm{c} \cdot 1{,}0925 \times 10^8\,\mathrm{s} = 1{,}64 \times 10^{16}\,\mathrm{m} \tag{25.35}$$

Avvertenze

In una precedente versione di questo file, nel calcolare la posizione x_2' non ho svolto dei calcoli esatti, come scritto sopra, ma dei calcoli numerici, peraltro con più cifre significative di quelle che sarebbe opportuno scrivere.

$$x_2{}' = 1{,}1547 \cdot (1{,}8908 \times 10^{16}\ \mathrm{m} - 1{,}4989 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s} \cdot 1{,}2614 \times 10^{8}\ \mathrm{s}) = 1{,}0108 \times 10^{12}\ \mathrm{m} \quad (25.36)$$

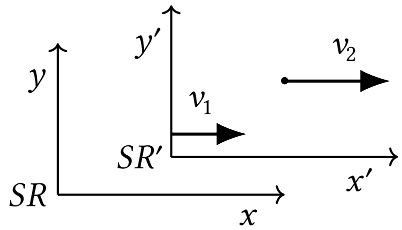
Cosa c'è di sbagliato in un risultato così diverso da quello corretto? Il problema è che il risultato non è formalmente scorretto. Con cinque cifre significative ci possiamo aspettare che il risultato abbia una approssimazione del $0,01\%$ e infatti è così. Il rapporto tra la distanza ottenuta e la lunghezza L è dello $0,005\%$, ovvero è uno zero entro i limiti di precisione dei calcoli. Questo risultato è inoltre molto sensibile al numero di cifre usato per svolgere il calcolo: con alcune calcolatrici, preservando tutta la precisione matematica nei calcoli precedenti, ho ottenuto come risultato $2{,}7 \times 10^4$ m. Tuttavia non vediamo nessun particolare significato in quei numeri, ma ritroviamo tutta la fisica che dobbiamo aspettarci solo nel risultato nullo. Per cui vi invito in relatività a prestare ancora più attenzione del solito nello svolgere calcoli approssimati invece di quelli esatti, se questi sono possibili, e al numero di cifre utilizzate anche nei passaggi intermedi.

25.3 Composizione delle velocità

Esercizio 209 *L'astronave Arcadia si allontana ad una velocità* $v_1 = 0{,}60\,\mathrm{c}$ *rispetto alla Terra. Poi lancia un missile con una velocità* $v_2 = 0{,}90\,\mathrm{c}$ *rispetto ad essa, davanti a sé.*

Trova la velocità relativa del missile rispetto alla Terra.

In mancanza di specifiche indicazioni supponiamo che il movimento del missile e dell'astronave avvengano tutti sulla stessa retta. A nostro arbitrio e come scelta puramente formale supponiamo che il movimento avvenga sull'asse x: un'altra scelta potrebbe in questo caso cambiare i calcoli, ma non la fisica. Se valgono queste premesse chiamiamo SR il sistema di riferimento della Terra e chiamiamo SR' il sistema di riferimento dell'astronave. L'astronave e il suo sistema di rifermento hanno la stessa velocità e si muovono nel verso positivo dell'asse x. I due sistemi di riferimento hanno gli assi paralleli. Possiamo rappresentare quanto detto con questa figura:



La composizione classica delle velocità prevede che in questo caso le velocità relative si sommino direttamente. Non è così in relatività. Se chiamiamo v_1 la velocità del secondo sistema di riferimento rispetto al primo (la velocità dell'astronave) e v_2 la velocità di un oggetto rispetto a quest'ultimo riferimento (la velocità del missile) allora questo oggetto ha una velocità v_T rispetto al primo sistema di riferimento (la Terra), secondo questa relazione:

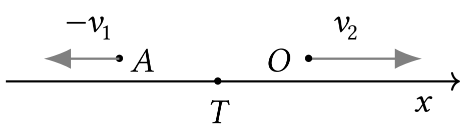
$$v_T = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 \cdot v_2}{\mathrm{c}^2}} = \frac{0{,}6\,\mathrm{c} + 0{,}8\,\mathrm{c}}{1 + \dfrac{0{,}6\,\mathrm{c} \cdot 0{,}8\,\mathrm{c}}{\mathrm{c}^2}} = 0{,}95\,\mathrm{c} \tag{25.37}$$

Osserviamo che nella precedente relazione le velocità sono prese con segno positivo se concordi con il verso positivo dell'asse x (come in questo caso) o con segno negativo altrimenti.

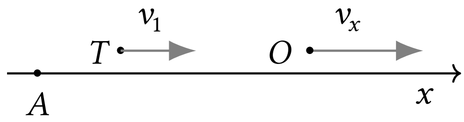
Esercizio 210 *L'astronave Arcadia e la Orion si allontanano in direzioni opposte dalla base spaziale Beta. La stazione spaziale riferisce che la prima astronave si allontana alla velocità* $v_1 = 0{,}60\,\mathrm{c}$ *e la seconda con velocità* $v_2 = 0{,}40\,\mathrm{c}$.

Con quale velocità l'Orion si sta allontanando dall'Arcadia?

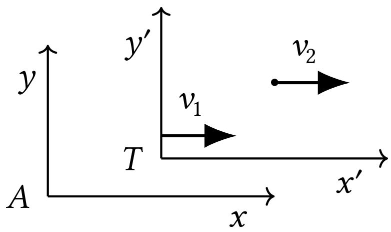
Il testo ci dice che il moto delle astronavi avviene nella stessa direzione: rappresentiamo il moto tutto sull'asse x. La velocità dell'Arcadia è indicata con il meno davanti perché è in verso opposto al verso positivo dell'asse x.



Dal punto di vista dell'Arcadia, la Terra si allontana da essa con velocità v_1 (le velocità reciproche di due oggetti sono sempre le stesse), ma in verso opposto. L'Orion si allontana dall'Arcadia con la velocità incognita v_x.



Questa rappresentazione è del tutto corrispondente a quella descritta nell'esercizio precedente, dove il sistema di riferimento SR è quello dell'Arcadia e SR' è quello della Terra.



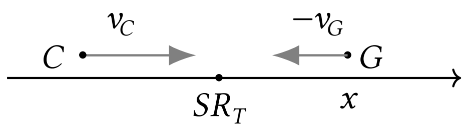
Concludendo:

$$v_x = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} = \frac{0{,}6\,c + 0{,}9\,c}{1 + \dfrac{0{,}6\,c \cdot 0{,}9\,c}{c^2}} = 0{,}97\,c \tag{25.38}$$

Esercizio 211 *L'astronave Cavour, se vista dalla Terra, percorre* 18×10^7 km *in* $8{,}2 \times 10^2$ s*, allontanandosi da essa. L'astronave Garibaldi é in viaggio verso la Terra alla velocità* $v_G = 0{,}60$ c *nella stessa direzione.*

1. *Trova la velocità della Cavour se vista dalla Terra.*
2. *Trova la velocità della Cavour se vista dalla Garibaldi.*
3. *Trova la distanza percorsa e il tempo impiegato dalla Cavour se vista dalla Garibaldi.*

Chiamiamo SR_T il sistema di riferimento della Terra, SR_C quello della Cavour e SR_G quello della Garibaldi. Il moto avviene tutto in un unica dimensione. Rappresentiamo quanto illustrato dal testo immaginando la Cavour che si muove nel verso positivo dell'asse x e la Garibaldi nel verso negativo se viste da SR_T.



1. La velocità della Cavour vista dalla Terra è semplicemente il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato: sia questo spazio che questo tempo sono entrambi misurati dal sistema di riferimento della Terra.

$$v_C = \frac{x}{t} = \frac{\Delta x_0}{\Delta t} = \frac{18 \times 10^{10}\ \mathrm{m}}{8{,}2 \times 10^2\ \mathrm{s}} = 2{,}20 \times 10^8\ \mathrm{m/s} = 0{,}732\,c \tag{25.39}$$

La distanza vista dalla Terra può essere considerata una lunghezza propria: possiamo mettere un regolo fisso che va dalla posizione di partenza della Cavour fino al punto di arrivo. Il tempo trascorso non è un tempo proprio: si riferisce a due eventi che non avvengono nello stesso luogo.

2. Dal testo constatiamo che la Cavour e la Garibaldi si muovono l'una incontro all'altra nella stessa direzione. La loro velocità relativa è legata alla somma delle loro velocità rispetto alla Terra. Rappresentiamo quel che si vede da SR_G.

Per cui la velocità v_{CG} della Cavour vista dalla Garibaldi è:

$$v_{CG} = \frac{v_C + v_G}{1 + \dfrac{v_C \cdot v_G}{c^2}} = \frac{0{,}732\ c + 0{,}6\ c}{1 + \dfrac{0{,}732\ c \cdot 0{,}6\ c}{c^2}} = 0{,}926\ c \tag{25.40}$$

3. Per rispondere alla terza domanda usiamo due metodi distinti.

Primo metodo

Non possiamo applicare direttamente le formule relative alla contrazione delle lunghezze e alla dilatazione dei tempi perché queste si possono applicare solo se in uno dei due sistemi la lunghezza o l'intervallo di tempo misurati sono propri.

In particolare il tempo misurato dalla Terra e quello misurato dalla Garibaldi non sono propri entrambi: non possiamo stabilire una relazione diretta tra i due intervalli di tempo. Il tempo misurato sulla Cavour è invece un tempo proprio. Scriviamo una relazione tra il tempo misurato sulla Terra e quello misurato sulla Cavour ricavando quest'ultimo.

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v_C}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{0{,}732\ c}{c}\right)^2}} = 1{,}47 \tag{25.41}$$

$$\begin{aligned} \Delta t_T &= \gamma_1 \Delta t_{0\,C} \\ \Delta t_{0\,C} &= \frac{\Delta t_T}{\gamma_1} = \frac{8{,}2 \times 10^2\ \mathrm{s}}{1{,}47} = 5{,}58 \times 10^2\ \mathrm{s} \end{aligned} \tag{25.42}$$

L'intervallo di tempo misurato sulla Garibaldi, che non è un tempo proprio, può a sua volta essere legato al tempo misurato sulla Cavour, utilizzando la loro velocità relativa che abbiamo prima ricavato.

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v_{CG}}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{0{,}926\ c}{c}\right)^2}} = 2{,}65 \tag{25.43}$$

$$\Delta t_G = \gamma_2 \Delta t_{0\,C} = 2{,}65 \cdot 5{,}58 \times 10^2\ \mathrm{s} = 1{,}48 \times 10^3\ \mathrm{s} \tag{25.44}$$

Per ricavare la lunghezza misurata dalla Garibaldi possiamo applicare la definizione di velocità.

$$\begin{aligned} v_{CG} &= \frac{\Delta x_G}{\Delta t_G} \\ \Delta x_G &= v_{CG} \cdot \Delta t_G = 0{,}926\ c \cdot 1{,}48 \times 10^3\ \mathrm{s} = 4{,}11 \times 10^{11}\ \mathrm{m} \end{aligned} \tag{25.45}$$

Osserviamo che per ricavare questa lunghezza *non avremo potuto usare* le usuali formule relative alla contrazione delle lunghezze. Infatti nel nostro caso la lunghezza misurata dalla Terra può essere considerata una lunghezza propria in quanto la posizione di partenza e di arrivo possono essere misurate allo stesso istante: possiamo quindi trovare la lunghezza contratta misurata dalla Cavour. Una volta conosciuta questa però non possiamo fare nessuna trasformazione dello stesso tipo per sapere quale distanza misura la Garibaldi. Non possiamo fare neanche una trasformazione diretta tra la distanza misurata dalla Terra e quella misurata dalla Garibaldi.

Secondo metodo

Possiamo ottenere gli stessi risultati in maniera più diretta facendo uso delle trasformazioni di Lorentz. Per poterle utilizzare supponiamo a nostro arbitrio, senza che questo modifichi la fisica del problema, che i tre sistemi di riferimento abbiamo l'origine degli assi coincidenti all'istante $t = 0$ s, dove t è specifico per ogni sistema. In particolare definiamo le coordinate senza apice quelle misurate nel SR_T e le coordinate con apice quelle misurate nel SR_G.

La posizione iniziale è quindi per tutti alla coordinata $x_1 = x_1' = 0$ m all'istante $t_1 = t_1' = 0$ s

La distanza misurata da SR_T è:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 18 \times 10^{10}\ \mathrm{m} - 0\ \mathrm{m} = 18 \times 10^{10}\ \mathrm{m} \tag{25.46}$$

Considerando che:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_G}{\mathrm{c}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}6\ \mathrm{c}}{\mathrm{c}}\right)^2}} = 1{,}25 \tag{25.47}$$

Allora la posizione finale misurata da SR_G è:

$$x_2' = \gamma(x_2 - v_G t_2) = 1{,}25 \cdot (18 \times 10^{10}\ \mathrm{m} - (-0{,}6\ \mathrm{c}) \cdot 8{,}2 \times 10^2\ \mathrm{s}) = 4{,}09 \times 10^{11}\ \mathrm{m} \tag{25.48}$$

La velocità della Garibaldi è negativa perché da Terra si muove verso sinistra nel verso negativo dell'asse x. Il valore è differente rispetto a quello calcolato col primo metodo per il maggior arrotondamento svolto nel passaggi precedenti.

La distanza misurata da SR_G è:

$$\Delta x_G = \Delta x' = x_2' - x_1' = 4{,}09 \times 10^{11}\ \mathrm{m} - 0\ \mathrm{m} = 4{,}09 \times 10^{11}\ \mathrm{m} \tag{25.49}$$

Analogamente il tempo trascorso misurata da SR_T è:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 8{,}2 \times 10^2\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s} = 8{,}2 \times 10^2\ \mathrm{s} \tag{25.50}$$

L'istante finale misurato da SR_G è:

$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{v_G \cdot x_2}{\mathrm{c}^2}\right) = 1{,}25 \cdot \left(8{,}2 \times 10^2\ \mathrm{s} - \frac{(-0{,}6\ \mathrm{c}) \cdot 18 \times 10^{10}\ \mathrm{m}}{\mathrm{c}^2}\right) = 1{,}48 \times 10^3\ \mathrm{s} \tag{25.51}$$

L'intervallo di tempo misurato da SR_G è:

$$\Delta t_G = \Delta t' = t_2' - t_1' = 1{,}48 \times 10^3\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s} = 1{,}48 \times 10^3\ \mathrm{s} \tag{25.52}$$

25.4 Quantità di moto

Esercizio 212 *Due particelle, di massa* $m_1 = 2{,}37\times10^{-30}$ kg *e* $m_2 = 8{,}26\times10^{-31}$ kg*, si muovono l'una verso l'altra, verso uno stesso osservatore, nella medesima direzione, rispettivamente con velocità* $v_1 = 0{,}80$ c *e* $v_2 = 0{,}60$ c*. Le particelle si urtano in maniera completamente anelastica.*

Trova la velocità finale delle due particelle dopo l'urto.

Anche in relatività la quantità di moto totale di un sistema si conserva se il sistema non è soggetto a forze esterne. Se consideriamo che i due corpi rimangono uniti con una stessa velocità dopo l'urto possiamo scrivere:

$$p_1 + p_2 = p_f \tag{25.53}$$

Calcoliamo le quantità di moto iniziali delle due particelle.

$$p_1 = \gamma m_1 v_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mv = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}8)^2}} \cdot 2{,}37\times10^{-30}\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}8\,\mathrm{c} = 9{,}47\times10^{-22}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}} \tag{25.54}$$

$$p_2 = \gamma m_2 v_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mv = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}6)^2}} \cdot 8{,}26\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}6\,\mathrm{c} = 1{,}86\times10^{-22}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}} \tag{25.55}$$

Osserviamo che le particelle procedono nella stessa direzione, ma in verso opposto: una delle due quantità di moto (a nostro arbitrio) ha segno negativo.

$$p_f = \gamma m_{tot} v_f = p_1 + (-p_2) = 7{,}62\times10^{-22}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}} \tag{25.56}$$

$$m_{tot} = 2{,}37\times10^{-30}\,\mathrm{kg} + 8{,}26\times10^{-31}\,\mathrm{kg} = 3{,}20\times10^{-30}\,\mathrm{kg} \tag{25.57}$$

Ricaviamo v_f da questa equazione, dove è l'unica incognita.

$$\begin{aligned}
\frac{p_f}{m_{tot}} &= \gamma v_f = \frac{v_f}{\sqrt{1-\frac{v_f^2}{c^2}}} \\
\frac{p_f^2}{m_{tot}^2} &= \frac{v_f^2}{1-\frac{v_f^2}{c^2}} = \frac{v_f^2}{\frac{c^2-v_f^2}{c^2}} = \frac{v_f^2c^2}{c^2-v_f^2} \\
\frac{p_f^2}{m_{tot}^2} - \frac{v_f^2c^2}{c^2-v_f^2} &= 0 \\
\frac{p_f^2(c^2-v_f^2) - v_f^2c^2m_{tot}^2}{(c^2-v_f^2)m_{tot}^2} &= 0 \\
p_f^2c^2 - p_f^2v_f^2 - m_{tot}^2v_f^2c^2 &= 0 \\
p_f^2c^2 &= v_f^2(p_f^2 + m_{tot}^2c^2) \\
v_f &= \sqrt{\frac{p_f^2c^2}{p_f^2 + m_{tot}^2c^2}}
\end{aligned} \tag{25.58}$$

Infine:

$$v_f = \sqrt{\frac{(7{,}62 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}})^2 \cdot v^2}{(7{,}62 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}})^2 + \mathrm{c}^2 \cdot (3{,}20 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg})^2}} = 1{,}86 \times 10^8\,\mathrm{m/s} = 0{,}62\,\mathrm{c} \qquad (25.59)$$

25.5 Energia

Esercizio 213 *Trova l'energia a riposo, l'energia cinetica e quella totale di un muone che si muove alla velocità* $v = 0{,}70\,\mathrm{c}$. *[massa muone* $m_\mu = 105{,}7\,\mathrm{MeV/c^2}$*]*

In fisica nucleare e delle particelle è molto frequente usare queste unità di misura alternative per l'energia, la quantità di moto e la massa. In particolare la massa è spesso indicata in $\mathrm{MeV/c^2}$ dove $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

L'energia a riposo E_0 di un oggetto di massa m in relatività vale:

$$E_0 = m\mathrm{c}^2 \qquad (25.60)$$

Per cui:

$$m = \frac{E_0}{\mathrm{c}^2} \qquad (25.61)$$

che ha la stessa forma dell'unità di misura qui usata per la massa del muone.

Per cui, nel nostro caso:

$$E_0 = (105{,}7\,\mathrm{MeV/c^2}) \cdot \mathrm{c}^2 = 105{,}7\,\mathrm{MeV} = 105{,}7 \times 10^6 \cdot 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} = 1{,}693 \times 10^{-11}\,\mathrm{J} \quad (25.62)$$

L'energia cinetica E_c è definita come:

$$E_c = (\gamma - 1)m\mathrm{c}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}} - 1\right)E_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}7)^2}} - 1\right) \cdot 1{,}693 \times 10^{-11}\,\mathrm{J} = 6{,}778 \times 10^{-12}\,\mathrm{J} \qquad (25.63)$$

L'energia totale è la somma dell'energia a riposo con l'energia cinetica:

$$E_{tot} = E_0 + E_c = \gamma m\mathrm{c}^2 = 2{,}371 \times 10^{-11}\,\mathrm{J} \qquad (25.64)$$

Esercizio 214 *Una particella di massa* $m = 205\,\mathrm{MeV/c^2}$ *viene inviata su un rilevatore di particelle.*

Il rilevatore ci dice che la quantità di moto della particella vale $p = 365\,\mathrm{MeV/c}$.

Determina l'energia totale e la velocità della particella, nell'unità di misura data e nel SI.

La relazione relativistica tra energia totale, massa e quantità di moto è questa:

$$E^2 = m^2\mathrm{c}^4 + p^2\mathrm{c}^2 \qquad (25.65)$$

In questo caso:

$$E = \sqrt{\left(205\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}\right)^2 \mathrm{c}^4 + \left(365\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}\right)^2 \mathrm{c}^2} = \\ \sqrt{(205\,\mathrm{MeV})^2 + (365\,\mathrm{MeV})^2} = 419\,\mathrm{MeV} = 6{,}71 \times 10^{-11}\,\mathrm{J} \tag{25.66}$$

Dalla relazione:

$$p = mv\gamma \tag{25.67}$$

procediamo come nell'esercizio 212 e scriviamo direttamente:

$$v_f = \sqrt{\frac{p_f^2 \mathrm{c}^2}{p_f^2 + m_{tot}^2 \mathrm{c}^2}} \tag{25.68}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{\left(365\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}\right)^2 \mathrm{c}^2}{\left(365\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}\right)^2 + \left(205\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}\right)^2 \mathrm{c}^2}} = \sqrt{\frac{(365\,\mathrm{MeV})^2}{\left(365\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}\right)^2 + \left(205\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}\right)^2}} = 0{,}87\,\mathrm{c} = 2{,}61 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \tag{25.69}$$

26 Errori di misura

26.1 Valor medio ed errore assoluto

Esercizio 215 *Viene compiuta la misurazione dell'altezza di una palazzina con un distanziometro con una accuratezza di* 2 mm *e una sensibilità di* 1 mm*. Facendo la misurazione per cinque volte si ottengono i seguenti risultati:*
15,453 m*;* 15,456 m*;* 15,454 m*;* 15,455 m*;* 15,455 m*.*

1. *Trova il valor medio della misura.*
2. *Trova l'errore assoluto associato al valor medio.*

1. Il valor medio delle misure date è definito come:

$$< x >= \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{n} \tag{26.1}$$

Quindi in questo caso

$$< x >= \frac{15{,}453\,\mathrm{m} + 15{,}456\,\mathrm{m} + 15{,}454\,\mathrm{m} + 15{,}455\,\mathrm{m} + 15{,}455\,\mathrm{m}}{5} = 15{,}455\,\mathrm{m} \tag{26.2}$$

2. L'errore assoluto associato alla singola misura è uguale all'accuratezza. La sensibilità dello strumento è però più piccola e possiamo sperare di ottenere una misura più accurata ripetendo più volta la misura. Allora come errore assoluto associato al valor medio possiamo considerare la seguente grandezza

$$\varepsilon_\mathrm{a} = \frac{V_\mathrm{max} - V_\mathrm{min}}{2} \tag{26.3}$$

Prendiamo il valore più grande e più piccolo ottenuti nelle nostre misure dell'altezza e otteniamo:

$$\varepsilon_\mathrm{a} = \frac{V_\mathrm{max} - V_\mathrm{min}}{2} = \frac{15{,}456\,\mathrm{m} - 15{,}453\,\mathrm{m}}{2} = 0{,}0015\,\mathrm{m} \tag{26.4}$$

Abbiamo indicato questo errore con due cifre significative perché la prima era un uno.
Questo errore è più piccolo dell'accuratezza dello strumento, ma più grande della sensibilità: lo possiamo usare come nuova valutazione dell'errore.
L'indicazione finale della nostra misura è:

$$x = 15{,}455 \pm 0{,}015\,\mathrm{m} \tag{26.5}$$

26.2 Errore assoluto di grandezze derivate

Esercizio 216 *Viene compiuta la misurazione delle dimensioni di un campo rettangolare con un telemetro laser per il quale è indicata una accuratezza di* 2 cm *e una sensibilità di* 1 cm*.*

Facendo la misurazione per cinque volte si ottengono i seguenti risultati:
altezza: 60,86 m*;* 60,85 m*;* 60,87 m*;* 60,87 m*;* 60,86 m*.*
base: 289,67 m*;* 289,67 m*;* 289,67 m*;* 289,66 m*;* 289,68 m*.*

1. *Trova il valor medio dell'altezza e della base.*
2. *Trova l'errore assoluto associato alle due grandezze.*
3. *Trova l'area e l'errore assoluto ad essa associato.*

1. Il valor medio dell'altezza è
$$< h >= \frac{60{,}86\ \mathrm{m} + 60{,}85\ \mathrm{m} + 60{,}87\ \mathrm{m} + 60{,}87\ \mathrm{m} + 60{,}86\ \mathrm{m}}{5} = 60{,}86\ \mathrm{m} \tag{26.6}$$
Il valor medio della base è:
$$< b >= \frac{289{,}67\ \mathrm{m} + 289{,}67\ \mathrm{m} + 289{,}67\ \mathrm{m} + 289{,}66\ \mathrm{m} + 289{,}68\ \mathrm{m}}{5} = 289{,}67\ \mathrm{m} \tag{26.7}$$
2. L'errore assoluto associato all'altezza può essere valutato come:
$$\varepsilon_{\mathrm{a}}(h) = \frac{V_{\mathrm{max}} - V_{\mathrm{min}}}{2} = \frac{60{,}87\ \mathrm{m} - 60{,}85\ \mathrm{m}}{2} = 0{,}01\ \mathrm{m} \tag{26.8}$$
Quello associato alla base:
$$\varepsilon_{\mathrm{a}}(b) = \frac{V_{\mathrm{max}} - V_{\mathrm{min}}}{2} = \frac{289{,}68\ \mathrm{m} - 289{,}66\ \mathrm{m}}{2} = 0{,}01\ \mathrm{m} \tag{26.9}$$
Questi errori assoluti sono uguali alla sensibilità dello strumento e sono accettabili.
3. L'area è data da:
$$A = b \cdot h = 289{,}67\ \mathrm{m} \cdot 60{,}86\ \mathrm{m} = 17689{,}3162\ \mathrm{m}^2 \tag{26.10}$$
Abbiamo riportato la misura dell'area con tutte le cifre date dalla calcolatrice usata per fare questi calcoli. Si pone il problema di decidere quante di queste cifre abbiano un significato oppure no. Una risposta ci viene trovando l'errore assoluto associato all'area.
Poiché l'area è data dal prodotto di due grandezze, l'errore relativo ad essa associato è la somma degli errori relativi delle due grandezze da cui si ottiene.
$$\varepsilon_{\mathrm{r}}(A) = \varepsilon_{\mathrm{r}}(b) + \varepsilon_{\mathrm{r}}(h) = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h}{h} \tag{26.11}$$
Da cui possiamo ricavare ΔA:
$$\varepsilon_{\mathrm{a}}(A) = \Delta A = \left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h}{h}\right) A = \left(\frac{0{,}01\ \mathrm{m}}{289{,}67\ \mathrm{m}} + \frac{0{,}01\ \mathrm{m}}{60{,}86\ \mathrm{m}}\right) \cdot 17689{,}3162\ \mathrm{m}^2 = 3{,}52\ \mathrm{m}^2 \simeq 4\ \mathrm{m}^2 \tag{26.12}$$
Poiché ora conosciamo l'incertezza sulla misura dell'area possiamo appropriatamente arrotondarne il valore.
$$A = 17689 \pm 4\ \mathrm{m}^2 \tag{26.13}$$

Esercizio 217 *Sono date due grandezze le cui misure sono* $A = 12{,}3 \pm 0{,}5\ \mathrm{m}$ *e* $B = 7{,}15 \pm 0{,}08\ \mathrm{m}$ *Trova il valore delle seguenti grandezze, da esse derivate, con il relativo errore.*

$$G_1 = \frac{A+B}{B} \quad ; \quad G_2 = \sqrt{A-B} \quad ; \quad G_3 = (A+8B)A$$

Per calcolare l'errore associato alle grandezze date prima troviamo l'errore assoluto di alcune grandezze intermedie che ci consentano di decomporre meglio il calcolo. In particolare consigliamo di calcolare nell'ordine: l'errore delle grandezze moltiplicate per una costante, l'errore associato a somme o differenze e poi quello relativo a moltiplicazioni, divisioni ed elevamento a potenza. In ogni caso cerchiamo di immaginare con che ordine dovremmo fare il calcolo dei termini presenti nella grandezza incognita e procediamo nello stesso ordine per il calcolo dell'errore.

Nei calcoli intermedi successivi indichiamo più cifre significative del necessario: compiremo gli opportuni arrotondamenti solo alla fine, dopo aver trovato l'errore assoluto.

1. Introduciamo la variabile accessoria C:

$$C = A + B = 12{,}3\ \mathrm{m} + 7{,}15\ \mathrm{m} = 19{,}45\ \mathrm{m} \tag{26.14}$$

L'errore assoluto associato a C è:

$$\Delta C = \Delta A + \Delta B = 0{,}5\ \mathrm{m} + 0{,}08\ \mathrm{m} = 0{,}58\ \mathrm{m} \tag{26.15}$$

Quindi:

$$G_1 = \frac{C}{B} = \frac{19{,}45\ \mathrm{m}}{7{,}15\ \mathrm{m}} = 2{,}720\ \mathrm{m} \tag{26.16}$$

Abbiamo un rapporto tra grandezze per cui possiamo scrivere che:

$$\frac{\Delta G_1}{G_1} = \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta B}{B} \tag{26.17}$$

$$\Delta G_1 = G_1\left(\frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta B}{B}\right) = 2{,}720\ \mathrm{m}\left(\frac{0{,}58\ \mathrm{m}}{19{,}45\ \mathrm{m}} + \frac{0{,}08\ \mathrm{m}}{7{,}15\ \mathrm{m}}\right) = 0{,}111\ \mathrm{m} \tag{26.18}$$

Ricordando che l'errore assoluto va indicato con una sola cifra significativa possiamo infine scrivere:

$$G_1 = 2{,}7 \pm 0{,}1\ \mathrm{m} \tag{26.19}$$

2. Introduciamo la variabile accessoria C.

$$C = A - B = 12{,}3\ \mathrm{m} - 7{,}15\ \mathrm{m} = 5{,}15\ \mathrm{m} \tag{26.20}$$

L'errore assoluto associato a C è:

$$\Delta C = \Delta A + \Delta B = 0{,}5\ \mathrm{m} + 0{,}08\ \mathrm{m} = 0{,}58\ \mathrm{m} \tag{26.21}$$

Quindi:

$$G_2 = \sqrt{C} = C^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5{,}15\ \mathrm{m}} = 2{,}27\ \mathrm{m} \tag{26.22}$$

L'estrazione di radice è assimilabile ad una potenza non intera.

$$\frac{\Delta G_2}{G_2} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Delta C}{C} \tag{26.23}$$

$$\Delta G_2 = \frac{G_2}{2}\frac{\Delta C}{C} = 0{,}128\,\text{m} \tag{26.24}$$

In questo caso, in cui dopo la prima cifra significativa è presente una cifra compresa tra uno e cinque (come peraltro nel precedente caso), alcuni autori prendono due cifre significative per l'errore assoluto. Per cui possiamo legittimamente scrivere la misura in queste due forme:

$$G_2 = 2{,}27 \pm 0{,}13\,\text{m} \tag{26.25}$$

$$G_2 = 2{,}3 \pm 0{,}1\,\text{m} \tag{26.26}$$

3. Introduciamo la variabile accessoria C:

$$C = 8B = 8 \cdot 7{,}15\,\text{m} = 57{,}2\,\text{m} \tag{26.27}$$

dove:

$$\Delta C = 8 \cdot \Delta B = 0{,}64\,\text{m} \tag{26.28}$$

Introduciamo la variabile accessoria D:

$$D = A + C = 12{,}3\,\text{m} + 57{,}2\,\text{m} = 69{,}5\,\text{m} \tag{26.29}$$

$$\Delta D = \Delta A + \Delta C = 0{,}5\,\text{m} + 0{,}64\,\text{m} = 1{,}14\,\text{m} \tag{26.30}$$

Infine:

$$G_3 = D \cdot A = 69{,}5\,\text{m} \cdot 12{,}3\,\text{m} = 854{,}85\,\text{m}^2 \tag{26.31}$$

$$\frac{\Delta G_1}{G_1} = \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta A}{A} \tag{26.32}$$

$$\Delta G_3 = G_3\left(\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta A}{A}\right) = 854{,}85\,\text{m}^2\left(\frac{1{,}14\,\text{m}}{69{,}5\,\text{m}} + \frac{0{,}5\,\text{m}}{12{,}3\,\text{m}}\right) = 49\,\text{m}^2 \tag{26.33}$$

Ricordando che l'errore assoluto va indicato con una sola cifra significativa possiamo infine scrivere:

$$G_3 = 860 \pm 50\,\text{m} = 8{,}6 \pm 0{,}5 \times 10^2\,\text{m} \tag{26.34}$$

La notazione scientifica in questo caso è migliore perché consente di specificare senza ambiguità quante siano le cifre significative.

Esercizio 218 *Il calore necessario per scaldare una certa quantità di sostanza è dato dalla legge fondamentale della calorimetria: $Q = mc\Delta t$.*

Sappiamo che: $m = 30{,}0 \pm 0{,}1$ kg; $c = 4186 \pm 2\,\text{J}/(\text{mol K})$; $ti = 23{,}0 \pm 0{,}5\,°\text{C}$; $tf = 63 \pm 1\,°\text{C}$. Trova la quantità di calore Q e l'errore assoluto ad esso associato.

Troviamo immediatamente quanto vale Q:

$$Q = mc\Delta t = 30{,}0\,\text{kg} \cdot 4186\,\text{J mol}^{-1}\,\text{K}^{-1} \cdot (63\,°\text{C} - 23{,}0\,°\text{C}) = 5023200\,\text{J} \tag{26.35}$$

La grandezza Q è data dal prodotto di tre fattori. Quindi, sapendo che l'errore relativo ad essa associato è la somma degli errori relativi delle tre grandezze da cui si ottiene, possiamo scrivere:

$$\varepsilon_r(Q) = \varepsilon_r(m) + \varepsilon_r(c) + \varepsilon_r(\Delta t) = \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta(\Delta t)}{\Delta t} \tag{26.36}$$

I dati che ci vengono forniti ci danno immediatamente gli errori assoluti associati a Q, m e c. Dobbiamo invece ricavare l'errore assoluto associato a Δt.

Ricordando che $\Delta t = t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i}$. possiamo scrivere che:

$$\varepsilon_\mathrm{a}(\Delta t) = \Delta(\Delta t) = \Delta(t_\mathrm{f}) + \Delta(t_\mathrm{i}) = 1\,^\circ\mathrm{C} + 0{,}5\,^\circ\mathrm{C} = 1{,}5\,^\circ\mathrm{C} \tag{26.37}$$

ovvero che l'errore assoluto associato a Δt è la somma degli errori assoluti associati a t_f e t_i.

Infine possiamo scrivere:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta(\Delta t)}{\Delta t}\right) \tag{26.38}$$

$$\Delta Q = Q \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta(\Delta t)}{\Delta t}\right) = \tag{26.39}$$

$$5023200\,\mathrm{J} \cdot \left(\frac{0{,}1\,\mathrm{kg}}{30{,}0\,\mathrm{kg}} + \frac{2\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}}{4186\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}} + \frac{1{,}5\,^\circ\mathrm{C}}{40{,}0\,^\circ\mathrm{C}}\right) = 358210\,\mathrm{J} \simeq 4 \times 10^5\,\mathrm{J}$$

Per cui ora possiamo correttamente scrivere:

$$Q = 50 \pm 4 \times 10^5\,\mathrm{J} \tag{26.40}$$

27 Appendici

27.1 Unità di misura fondamentali del Sistema Internazionale

Nome della grandezza	Simbolo	Nome dell'unità di misura	Simbolo
lunghezza	l	metro	m
massa	m	chilogrammo	kg
tempo	t	secondo	s
corrente elettrica	I	ampere	A
temperatura termodinamica	T	kelvin	K
quantità della sostanza B	n_b	mole di B	mol(B)
intensità luminosa	I_n	candela	cd

27.2 Costanti fisiche fondamentali [1]

grandezza	simbolo	valore e unità di misura	incertezza
velocità della luce nel vuoto	c, c_0	$299792458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$	esatto
Costante magnetica	μ_0	$12{,}566370614 \times 10^{-7}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$	esatto
Costante dielettrica $(1/4\pi c^2)$	ε_0	$8{,}854187817 \times 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$	esatto
Costante di gravitazione universale	G	$6{,}6742 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$	$\pm 0{,}0010 \times 10^{-11}$
Costante di Planck	h	$6{,}6260693 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$	$\pm 0{,}0000011 \times 10^{-34}$
Carica elementare	e	$1{,}60217653 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$	$\pm 0{,}00000014 \times 10^{-19}$
massa dell'elettrone	m_e	$9{,}1093826 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$	$\pm 0{,}0000016 \times 10^{-31}$
massa del protone	m_p	$1{,}67262171 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$	$\pm 0{,}00000029 \times 10^{-27}$
Costante di Avogadro	N_a	$6{,}0221415 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$	$\pm 0{,}0000010 \times 10^{23}$
Costante dei gas perfetti	R	$8{,}314472\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$	$\pm 0{,}000015$
Costante di Boltzmann (R/N_a)	k	$1{,}3806505 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$	$\pm 0{,}0000024 \times 10^{-23}$

I simboli per le unità di misura devono essere stampati in carattere diritto (romano). Essi devono rimanere inalterati al plurale e non devono essere seguiti da un punto eccetto che alla fine di una frase.

[1] Peter J. Mohr and Barry N. Taylor, CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2002, published in Rev. Mod. Phys. vol. 77(1) 1-107 (2005).

I simboli per le unità di misura devono essere scritti con lettere minuscole, a meno che essi derivino dal nome di una persona, nel qual caso essi devono cominciare con una lettera maiuscola.

27.3 Multipli e sottomultipli

fattore di moltiplicazione	prefisso	simbolo	valore
10^{24}	yotta	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	zetta	Z	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	exa	E	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	peta	P	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	1 000 000 000 000
10^{9}	giga	G	1 000 000 000
10^{6}	mega	M	1 000 000
10^{3}	chilo	k	1 000
10^{2}	etto	h	1 00
10^{1}	deca	da	1 0
10^{-1}	deci	d	0,1
10^{-2}	centi	c	0,01
10^{-3}	milli	m	0,001
10^{-6}	micro	µ	0,000 001
10^{-9}	nano	n	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto	f	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto	a	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto	z	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yocto	y	0,000 000 000 000 000 000 000 001

27.4 Pianeti sistema solare [2]

Nome	Distanza dal Sole	Raggio medio	Massa	Periodo orbitale (anni)
Mercurio	$5{,}791 \times 10^{10}$ m	$2{,}440 \times 10^{6}$ m	$3{,}33 \times 10^{23}$ kg	0,2408
Venere	$1{,}082 \times 10^{11}$ m	$6{,}652 \times 10^{6}$ m	$4{,}869 \times 10^{14}$ kg	0,6152
Terra	$1{,}496 \times 10^{11}$ m	$6{,}371 \times 10^{6}$ m	$5{,}972 \times 10^{24}$ kg	1,0000
Marte	$2{,}279 \times 10^{11}$ m	$3{,}397 \times 10^{6}$ m	$6{,}419 \times 10^{23}$ kg	1,8808
Giove	$7{,}784 \times 10^{11}$ m	$7{,}149 \times 10^{7}$ m	$1{,}899 \times 10^{27}$ kg	11,863
Saturno	$1{,}427 \times 10^{12}$ m	$6{,}027 \times 10^{7}$ m	$5{,}685 \times 10^{26}$ kg	29,447

[2] https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/

Bibliografia

Fisica generale

[MNV98] P. Mazzoldi, M. Nigro e C. Voci. *Fisica*. 2ª ed. 1998.

[RH82] R. Resnick e D. Halliday. *Fisica*. 2ª ed. 1982.

[TM09] P. A. Tipler e G. Mosca. *Corso di fisica*. 3ª ed. 2009.

[Ton11] Giovanni Tonzig. *Fondamenti di meccanica classica*. 3ª ed. 2011.

[Ton12a] Giovanni Tonzig. *Elettromagnetismo*. 2012.

[Ton12b] Giovanni Tonzig. *La fisica del calore*. 2ª ed. 2012.

Norme di scrittura

[Bec21] Claudio Beccari. *Regole e consigli per comporre la matematica delle scienze sperimentali*. 2021. URL: `http://www.guitex.org/home/images/doc/GuideGuIT/ComporreMatematica.pdf`.

Indice analitico