Funzioni

sintesi per un ripasso

Massimiliano Virdis

Indice

1 Funzioni

*Chiamiamo **funzione** una legge che associa ad ogni elemento di un insieme* A *uno e un solo elemento di un insieme* B. L'insieme A è detto *dominio*, l'insieme B è detto *codominio*.

Se un elemento x del dominio è associato ad un elemento y del codominio possiamo scrivere:

$$y = f(x) \tag{1.1}$$

dove f (effe) è il simbolo per indicare la funzione e y è detto *immagine* di x attraverso la funzione.

L'insieme delle immagini di tutti gli elementi del dominio è detta *immagine*. L'immagine della funzione è un sottoinsieme del codominio.

1.1 Classificazione

Classificazione delle funzioni		
Algebriche		**Trascendenti**
Razionali	Irrazionali	Esponenziali Logaritmiche Goniometriche
Intere	**Fratte**	

La distinzione fondamentale è tra funzioni algebriche e trascendenti.

- Chiamiamo funzioni **algebriche** quelli in cui le variabili sono sottoposte solo ad operazioni algebriche cioè le quattro operazioni fondamentali, l'elevamento a potenza intera e l'estrazione di radice.
- Sono **trascendenti** tutte le altre.

Altra distinzione è tra funzioni intere e fratte.

- Chiamiamo funzioni **intere** quelle in cui le variabili non stanno a denominatore di una frazione.
- Sono **fratte** tutte le altre.

Tra le algebriche abbiamo le funzioni *razionali*, dove non compare l'estrazione di radice, e le funzioni *irrazionali*.

Le funzioni razionali intere sono i polinomi.

1.2 Funzioni iniettive, suriettive, biettive, inverse, equivalenti

- Una funzione è detta *iniettiva* se ad ogni elemento del codominio è associato al più un elemento del dominio.
  Oppure se, presi due elementi distinti del dominio, x_1 e x_2, si ha che:
  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

- Una funzione è detta *suriettiva* se ad ogni elemento dell'immagine è associato almeno un elemento del dominio.

- Una funzione è detta *biettiva* se ad ogni elemento del codominio è associato un solo elemento del dominio, ovvero se è sia iniettiva che suriettiva.

- Abbiamo una funzione $y = f(x)$ che associa ad ogni elemento di $x \in X$ un elemento $y \in Y$.

  Chiamiamo *funzione inversa* di f la funzione $f^{-1}(y) = x$ che ad ogni elemento $y \in Y$ associa l'unico elemento $x \in X$ tale che $y = f(x)$. La funzione inversa, se esiste, è unica. Affinché esista la funzione inversa, la funzione f deve essere biettiva.

- Due funzioni f e g si dicono equivalenti se per ogni x appartenente al loro dominio si ha:
  $f(x) = g(x)$

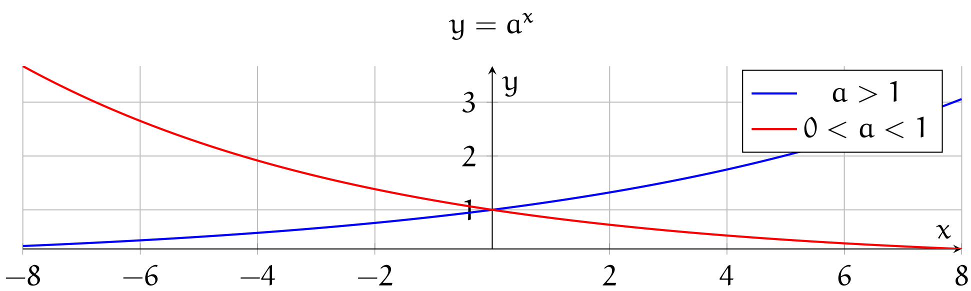
2 Funzioni esponenziali

Proprietà delle potenze	
$a \in \mathbb{R} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$	
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

Una funzione esponenziale ha la forma di una potenza con base a e esponente x.

$$y = a^x \quad ; \quad a > 0 \wedge a \neq 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Il *dominio* è dato da tutti i numeri reali.
Il *codominio* è dato da tutti i reali positivi: la funzione esponenziale non si annulla mai.
Tutti gli esponenziali passano per il punto di coordiante $P(0; 1)$.



Se la base è compresa tra zero e uno la funzione è decrescente.
Se la base è maggiore di uno la funzione è crescente.

3 Funzioni logaritmiche

Il logaritmo in base a di un numero x è l'esponente a cui si deve elevare la base per ottenere tale numero.

Una funzione logaritmica con base a e esponente x è l'inversa di una funzione esponenziale a^x.

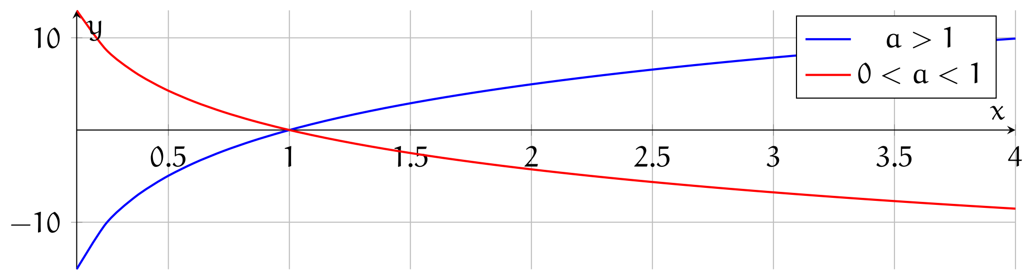
$$y = \log_a x \iff x = a^y \quad ; \quad a > 0 \land a \neq 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{3.1}$$

Il *dominio* è dato da tutti i numeri reali positivi.

Il *codominio* è dato da tutti i reali.

Tutti i logaritmi passano per il punto di coordiante $P(1; 0)$.

$y = \log_a x$



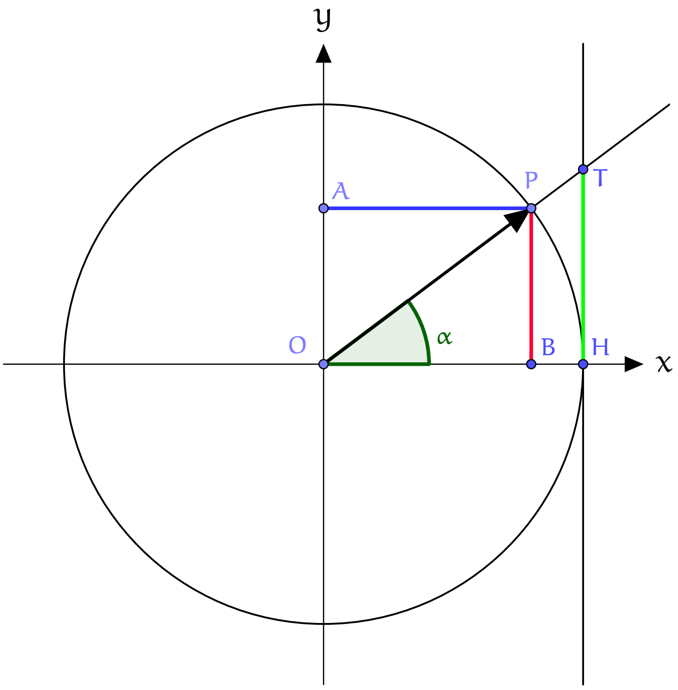
Se la base è compresa tra zero e uno la funzione è decrescente.

Se la base è maggiore di uno la funzione è crescente.

Proprietà dei logaritmi	
$\{a, x, y\} \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad b \in \mathbb{R}$	
$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$	$\log_a x^b = b \log_a x$
$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$	
$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$
$x = a^{\log_a x}$	$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$

4 Funzioni goniometriche

Abbiamo una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine degli assi cartesiani. Prendiamo gli angoli al centro della circonferenza orientati che hanno come primo lato il semiasse positivo delle x e come secondo lato il raggio vettore indicato in figura. Questo raggio vettore intercetta la circonferenza nel punto P.



- Chiamiamo **seno** dell'angolo l'ordinata del punto P.
- Chiamiamo **coseno** dell'angolo l'ascissa del punto P.
- Chiamiamo **tangente** dell'angolo il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa del punto P.

$$\operatorname{sen}\alpha = \overline{PB} \quad ; \quad \cos\alpha = \overline{PA} \quad ; \quad \tan\alpha = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \tag{4.1}$$

La tangente dell'angolo è anche l'ascissa del punto di intersezione T tra il raggio vettore dell'angolo e la tangente alla circonferenza nel punto H di coordinate $(1;0)$.

$$\tan\alpha = \overline{TH} \tag{4.2}$$

Per ogni angolo possiamo trovare un punto P e quindi sempre un'ascissa e un'ordinata.

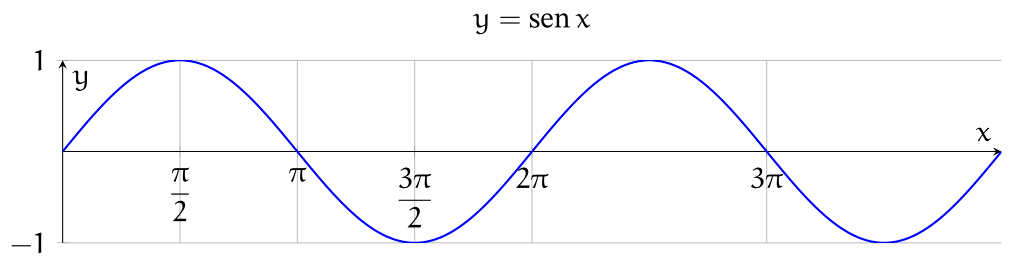
Non possiamo trovare sempre il rapporto perché non avrebbe significato quando il denominatore e quindi l'ascissa fosse uguale zero. Di conseguenza possiamo calcolare il seno e il coseno di qualsiasi angolo; invece non possiamo calcolare la tangente di $\frac{\pi}{2}$ e di $\frac{3\pi}{2}$.

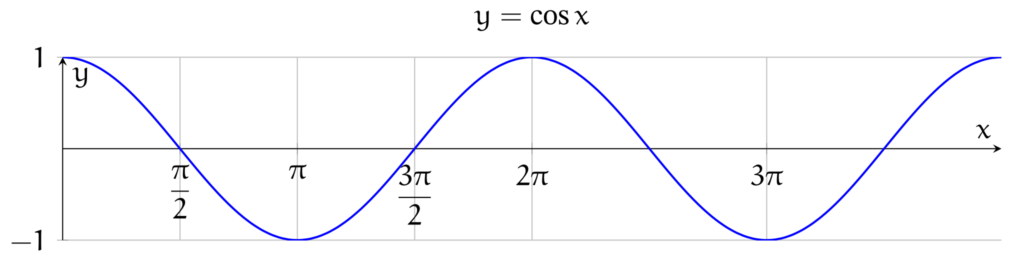
- Il dominio della funzione $y = \operatorname{sen}\alpha$ è $\quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Il dominio della funzione $y = \cos\alpha$ è $\quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Il dominio della funzione $y = \tan\alpha$ è $\quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

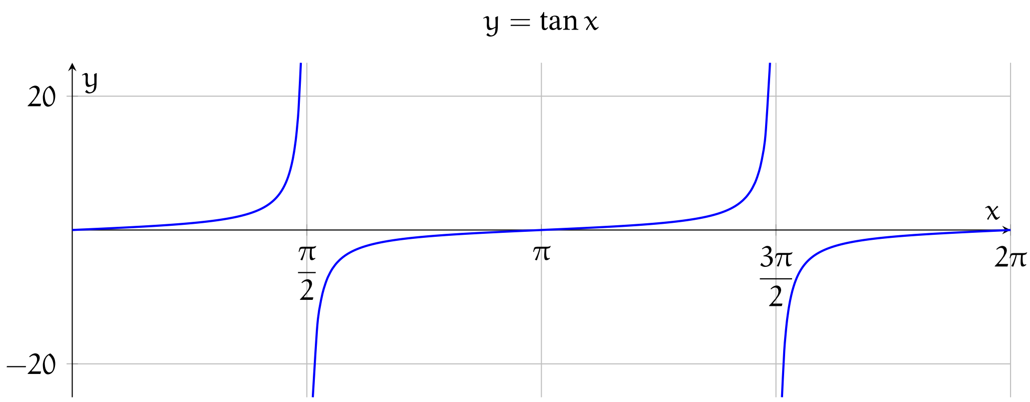
Il valore dell'ascissa e dell'ordinata del punto P, essendo confinato sulla circonferenza, è sempre compreso tra 1 e -1.

- Il codominio della funzione $y = \operatorname{sen}\alpha$ è $\quad [-1 : 1]$
- Il codominio della funzione $y = \cos\alpha$ è $\quad [-1 : 1]$
- Il codominio della funzione $y = \tan\alpha$ è $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

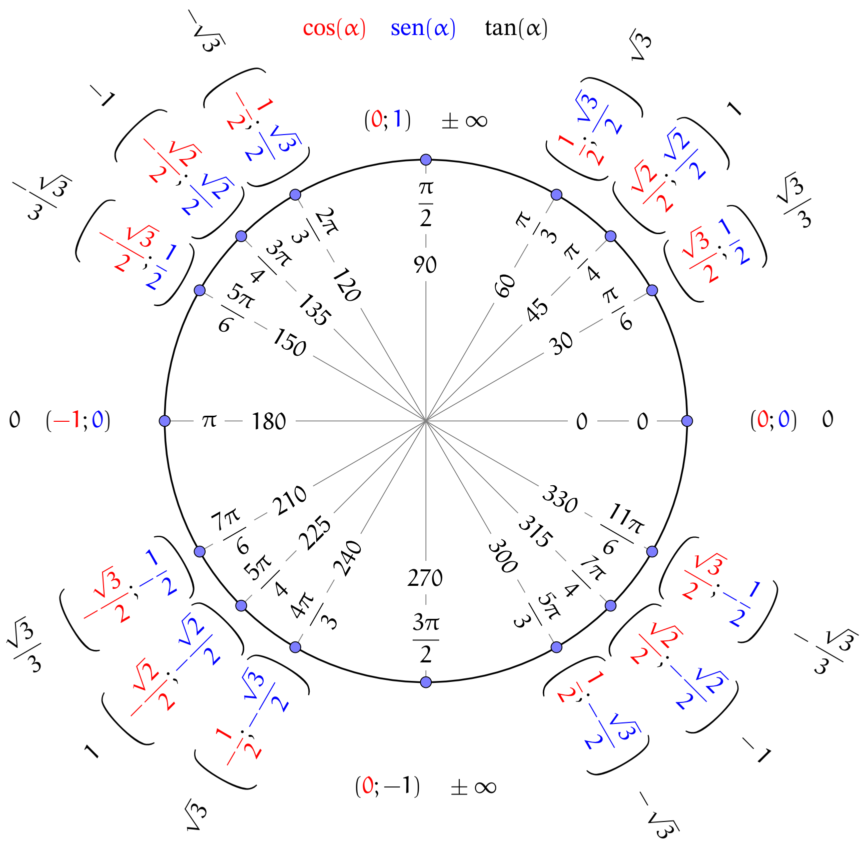
4.1 Grafici







4.2 Angoli notevoli ed associati



$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$ funz. dispari		$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ funz. pari		$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$
$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$		$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$		$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$		$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha)$		$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}(\alpha)$
$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos(\alpha)$		$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos(\alpha)$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{sen}(\alpha)$		$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha)$

Regola mnemonica

- Se l'argomento di partenza contiene un multiplo di π allora la funzione non cambia nome
- Se l'argomento di partenza contiene un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$ allora la funzione cambia nome
- Il segno finale è determinato dal segno della funzione a primo membro nel suo quadrante

4.3 Altre formule

Formule di trasformazione

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \qquad \cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \pm\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}} = \pm\frac{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \pm\frac{|\tan(\alpha)|}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \qquad \cos(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$$

addizione e sottrazione

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

duplicazione

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} \qquad \cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

bisezione

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

prostaferesi

$$\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

5 Ricerca del dominio

Il dominio di una funzione è l'insieme di valore più grande che possiamo attribuire alla sua variabile indipendente.

In termini generali, per determinare il dominio di una funzione, se la funzione è composta partiamo dallo studio delle funzioni più interne e poi studiamo via via quelle più esterne; se non è composta è opportuno conoscere il dominio delle funzioni elementari.

Altrimenti possiamo procedere così.

1. Se una funzione è **somma** di più addendi cerchiamo il dominio di ogni singolo addendo e poi prendiamo l'intersezione dei domini trovati ovvero prendiamo come dominio l'insieme che soddisfa il dominio di tutti gli addendi.
2. Se una funzione è **prodotto** di più fattori cerchiamo il dominio di ogni singolo fattore e poi prendiamo l'intersezione dei domini trovati ovvero prendiamo come dominio l'insieme che soddisfa il dominio di tutti i fattori.
3. Se una funzione è **rapporto** tra due funzioni cerchiamo il dominio del numeratore e poi del denominatore e poi prendiamo l'intersezione dei domini trovati ovvero prendiamo come dominio l'insieme che soddisfa il dominio di tutti i fattori. Ricordiamoci che il denominatore deve essere diverso da zero.
4. Altrimenti, se non siamo in nessuno dei precedenti casi, guardiamo l'espressione dalla sua parte più interna ovvero da dove compare la variabile (la x). Avremo sicuramente una funzione composta: dobbiamo studiare il dominio a partire dalla funzione di partenza allargando l'analisi via via alle funzioni più esterne.

6 Funzioni e trasformazioni nel piano

Una **trasformazione geometrica** è una corrispondenza biunivoca tra punti del piano, quindi una legge che ad ogni punto del piano associa uno e un solo punto del piano.

6.1 Traslazioni

Una **traslazione** è una trasformazione che sposta tutti i punti di una distanza fissa in una certa direzione. Si parla in particolare di traslazione di vettore $\vec{v}$.
La legge che trasforma un punto $P(x;y)$ in un punto $P'(x';y')$ attraverso un vettore $\vec{v}(a;b)$ è:

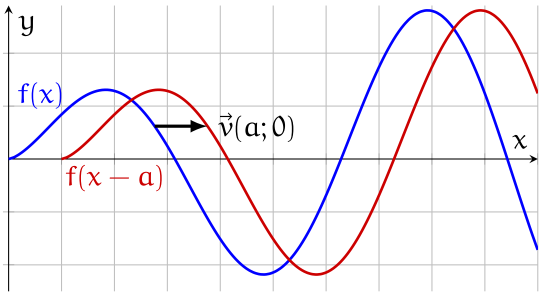
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \tag{6.1}$$

6.1.1 Traslazione di una funzione in orizzontale

Se abbiamo una funzione $y = f(x)$ e la vogliamo *traslare orizzontalmente* secondo un vettore $\vec{v}(a;0)$ parallelo all'asse x otterremo una funzione del tipo:

$$y = f(x - a) \tag{6.2}$$

Osserviamo che per traslare la funzione verso destra (nel verso positivo dell'asse x) dobbiamo sottrarre alla sua variabile indipendente la componente a.

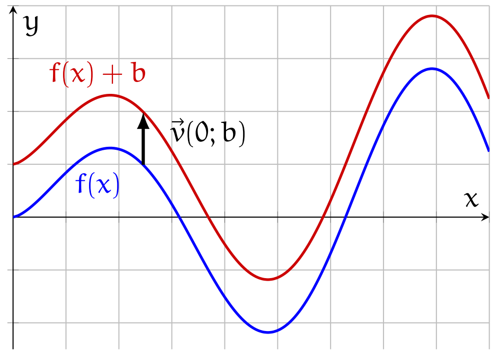


6.1.2 Traslazione di una funzione in verticale

Se abbiamo una funzione $y = f(x)$ e la vogliamo *traslare verticalmente* secondo un vettore $\vec{v}(0; b)$ parallelo all'asse y otterremo una funzione del tipo:

$$y = f(x) + b \tag{6.3}$$

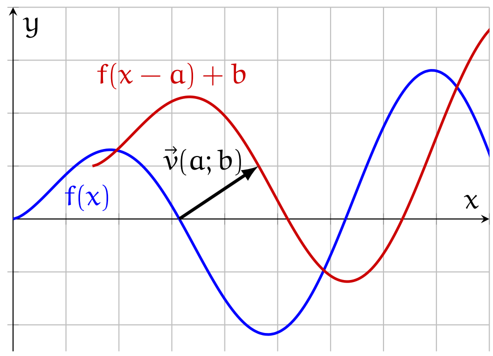
Osserviamo che per traslare la funzione verso l'alto (nel verso positivo dell'asse y) dobbiamo sommare alla funzione la componente b.



6.1.3 Traslazione di una funzione secondo un vettore

Se abbiamo una funzione $y = f(x)$ e la vogliamo *traslare* secondo un vettore $\vec{v}(a; b)$ generico otterremo una funzione del tipo:

$$y = f(x - a) + b \tag{6.4}$$



6.2 Dilatazioni e compressioni

Una **dilatazione** è una trasformazione che aumenta o diminuisce la distanza tra punti proporzionalmente ad una costante.

Abbiamo una funzione $f(x)$ del piano che opera come dilatazione, x_1 e x_2 due punti qualsiasi dello stesso, $d(x_1; x_2)$ la distanza tra questi punti e r una costante diversa da zero. Allora la dilatazione è una trasformazione tale che:

$$d(f(x_1); f(x_2)) = rd(x_1; x_2) \tag{6.5}$$

In particolare la legge che trasforma come dilatazione o compressione un punto $P(x; y)$ in un punto $P'(x'; y')$ lungo gli assi cartesiani è:

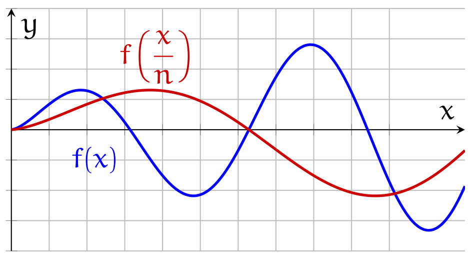
$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases} \quad \text{con } \ m, n \in \mathfrak{R}^+ \tag{6.6}$$

6.2.1 Dilatazione e compressione di una funzione lungo l'asse x

Abbiamo una funzione $y = f(x)$.

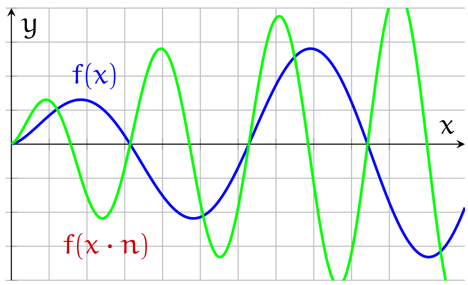
- Se la vogliamo *dilatare* lungo l'asse x dobbiamo dividere l'argomento della funzione per un numero n maggiore di uno:

$$y = f\left(\frac{x}{n}\right) \quad ; \quad n > 1 \tag{6.7}$$



- Se la vogliamo *comprimere* lungo l'asse x dobbiamo moltiplicare l'argomento della funzione per un numero n maggiore di uno:

$$y = f(x \cdot n) \quad ; \quad n > 1 \tag{6.8}$$



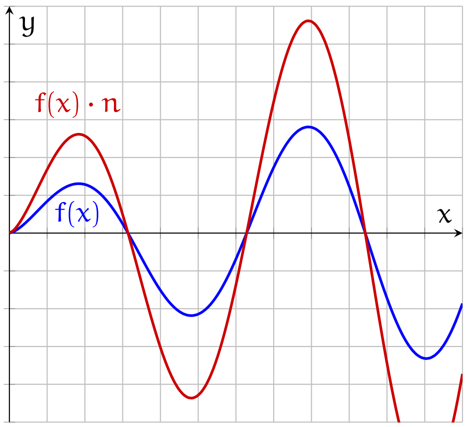
6.2.2 Dilatazione e compressione di una funzione lungo l'asse y

- Se la vogliamo *dilatare* lungo l'asse y dobbiamo moltiplicare la funzione per un numero n maggiore di uno:

$$y = f(x) \cdot n \quad ; \quad n > 1 \tag{6.9}$$

- Se la vogliamo *comprimere* lungo l'asse y dobbiamo dividere la funzione per un numero n maggiore di uno:

$$y = \frac{f(x)}{n} \quad ; \quad n > 1 \tag{6.10}$$



6.3 Simmetrie

6.3.1 Simmetria rispetto all'origine

6.3.2 Simmetria rispetto agli assi

6.3.3 Simmetria rispetto a una retta