ESERCIZI UNITA' E – SOMMARIO

E. CONDUZIONE IN GEOMETRIA PIANA

E.I. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana semplice

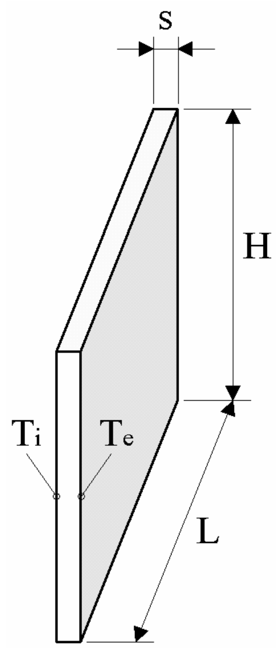
– *Problema*

Si consideri una parete piana con base 10 m, altezza 3 m e spessore 12 cm, delimitante un vano abitativo e realizzata in un calcestruzzo con conduttività termica pari a 1.4 W/(m°·C). La superficie interna della parete si trova a temperatura 25°C, mentre la superficie esterna si trova a 10°C.

Determinare la potenza termica che attraversa la parete.

– *Dati e schema*

$\lambda = 1.4$ W/(m°·C)	(conduttività termica del calcestruzzo)
$T_i = 25$°C	(temperatura sulla superficie interna)
$T_e = 10$°C	(temperatura sulla superficie esterna)
s = 12 cm = 0.12 m	(spessore della parete)
L = 10 m	(lato di base della parete)
H = 3 m	(altezza della parete)



– *Determinare*

$\dot{Q}$ (potenza termica attraverso la parete)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, proprietà del materiale omogenee e indipendenti dalla temperatura, temperature superficiali uniformi,. effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale

– *Soluzione*

La potenza termica trasferita per conduzione attraverso la parete, dalla superficie più calda a quella più fredda (nello schema, da sinistra a destra), è regolata dalla relazione:

$$(T_i - T_e) = \frac{s}{\lambda A}\dot{Q}$$

L'equazione precedente può anche essere scritta nella forma

$$\Delta T = R\dot{Q}$$

che è l'analogo termico della legge di Ohm

$$\Delta V = RI$$

La resistenza alla conduzione del calore attraverso la parete, R, è definita come:

$$R = \frac{s}{\lambda A} = 0.002857 \ \text{°C/W} = 2.857 \cdot 10^{-3} \ \text{°C/W}$$

in cui l'area, costante, della sezione di passaggio del flusso di calore è

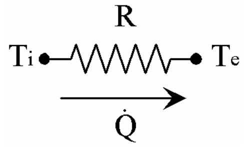
$$A = LH = 30 \ \text{m}^2$$

In definitiva, la potenza termica che attraversa la parete vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R} = 5250 \ \text{W} = 5.25 \ \text{kW}$$

– *Commenti*

Il circuito termico relativo al problema studiato si può rappresentare come segue:



Con tale schematizzazione si assume che le superfici di bordo della parete siano adiabatiche. L'approssimazione è generalmente accettabile se lo spessore della parete è piccolo rispetto alle altre dimensioni della parete stessa, poiché la potenza termica che attraversa le superfici di bordo è in tal caso trascurabile rispetto a quella che attraversa le superfici principali.

Il flusso di calore va sempre dalle zone più calde a quelle più fredde.

E.II. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana con convezione

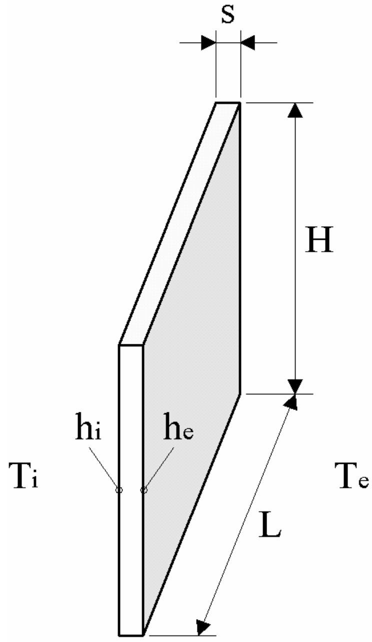
– *Problema*

Si consideri la parete piana di cui al problema precedente, delimitante un vano abitativo. Siano in questo caso pari a 25°C la temperatura interna del vano e a 10°C la temperatura dell'ambiente esterno. I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete valgono, rispettivamente, 10 W/(m^2·°C) (aria ferma) e 40 W/(m^2·°C) (condizioni ventose).

Determinare la potenza termica che attraversa la parete. Determinare inoltre le temperature sulle superfici interna ed esterna della parete.

– *Dati e schema*

λ = 1.4 W/(m·°C)	(conduttività termica del calcestruzzo)
T_i = 25°C	(temperatura del vano abitativo)
T_e = 10°C	(temperatura dell'ambiente esterno)
s = 12 cm = 0.12 m	(spessore della parete)
A = 30 m^2	(area superficiale della parete)
h_i = 10 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione interno)
h_e = 40 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione esterno)



– *Determinare*

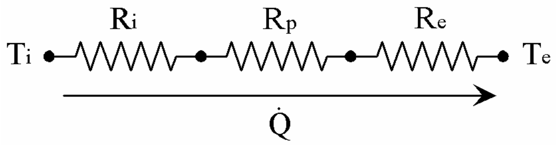
$\dot{Q}$	(potenza termica attraverso la parete)
$T_{i,s}$	(temperatura superficiale interna)
$T_{e,s}$	(temperatura superficiale esterna)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, proprietà del materiale omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale.

– *Soluzione*

Il circuito termico relativo al problema studiato si può rappresentare come segue:



in cui

$$R_i = \frac{1}{h_i A} = 0.003333 \ \text{°C/W} = 3.333 \cdot 10^{-3} \ \text{°C/W}$$

$$R_p = \frac{s}{\lambda A} = 0.002857 \ \text{°C/W} = 2.857 \cdot 10^{-3} \ \text{°C/W}$$

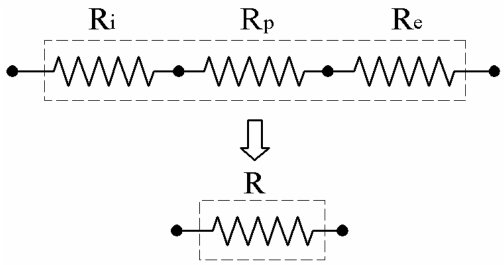
$$R_e = \frac{1}{h_e A} = 0.000833 \ \text{°C/W} = 0.833 \cdot 10^{-3} \ \text{°C/W}$$

sono le resistenze alla trasmissione del calore attraverso, rispettivamente, lo strato convettivo superficiale interno, la parete in calcestruzzo e lo strato convettivo superficiale esterno.

La potenza termica trasferita dall'ambiente più caldo a quello più freddo (nello schema, da sinistra a destra) è regolata dalla relazione:

$$\Delta T = \left(R_i + R_p + R_e\right)\dot{Q}$$

Essendo poste in serie, le resistenze possono essere sostituite con un'unica resistenza equivalente, pari alla loro somma:



$$R = R_i + R_p + R_e = 0.007024 \ \text{°C/W} = 7.024 \cdot 10^{-3} \ \text{°C/W}$$

Pertanto, la potenza termica trasmessa dall'ambiente interno all'ambiente esterno vale:

$$\dot{Q} = \frac{\left(T_i - T_e\right)}{R} = 2136 \ \text{W} = 2.1 \ \text{kW}$$

Le temperature superficiali interna ed esterna possono essere determinate considerando che la potenza termica trasmessa deve attraversare ogni singolo strato resistivo, ovvero ogni singola resistenza della serie di resistenze termiche. Valgono di conseguenza le relazioni:

$$T_i - T_{i,s} = R_i \dot{Q}$$

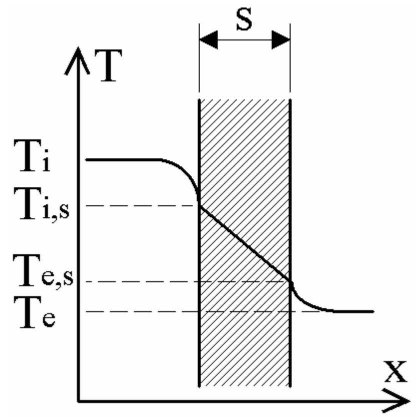
$$T_{e,s} - T_e = R_e \dot{Q}$$

da cui si ottiene

$$T_{i,s} = T_i - R_i \dot{Q} = 17.9\text{°C}$$

$$T_{e,s} = T_e + R_e \dot{Q} = 11.8\text{°C}$$

È infine possibile delineare l'andamento della temperatura nella direzione perpendicolare alla parete, schematizzato nella figura seguente.



L'andamento attraverso gli strati conduttivi è sempre (in assenza di generazione di calore distribuita) lineare, con pendenza inversamente proporzionale alla conduttività termica. L'andamento in aria, attraverso lo strato limite convettivo esterno e attraverso lo strato limite convettivo interno, è rappresentabile solo qualitativamente.

– *Commenti*

Se si trascura la convezione, si sovrastima sensibilmente la potenza termica trasmessa.

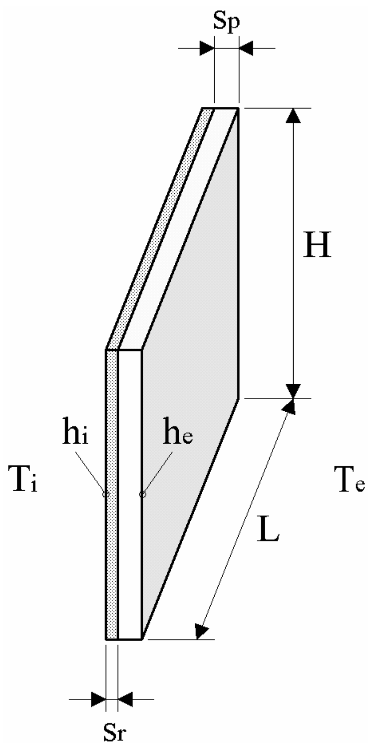
Per stabilizzare la temperatura nel vano abitativo, è necessario che il calore trasmesso verso l'ambiente esterno sia compensato da un uguale apporto calorico, ad esempio fornito da un impianto di riscaldamento a combustibile o da una pompa di calore.

E.III. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana multi-strato

– *Problema*

Si consideri la parete piana di cui al problema precedente, delimitante un vano abitativo. Siano ancora pari a 25°C la temperatura interna del vano e pari a 10°C la temperatura dell'ambiente esterno, con coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete che valgono, rispettivamente, 10 W/(m^2·°C) e 40 W/(m^2·°C). Inoltre, si supponga di ricoprire la superficie interna della parete con un sottile rivestimento di legno di balsa, avente spessore 10 mm e caratterizzato da conduttività termica pari a 0.055 W/(m·°C).

Determinare la potenza termica che attraversa la parete.



– *Dati e schema*

T_i = 25°C	(temperatura del vano abitativo)
T_e = 10°C	(temperatura dell'ambiente esterno)
h_i = 10 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione interno)
h_e = 40 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione esterno)
λ_p = 1.4 W/(m·°C)	(conduttività del calcestruzzo)
s_p = 12 cm = 0.12 m	(spessore della parete in calcestruzzo)

$\lambda_r = 0.055$ W/(m·°C) (conduttività del rivestimento in legno di balsa)
$s_r = 10$ mm $= 0.010$ m (spessore del rivestimento in legno)
$A = 30$ m^2 (area superficiale della parete)

– *Determinare*

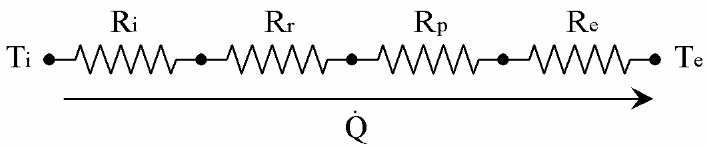
$\dot{Q}$ (potenza termica attraverso la parete)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale.

– *Soluzione*

Il circuito termico relativo al problema studiato si può rappresentare come segue:



in cui i valori di tutte le resistenze della serie sono già stati calcolati, eccetto quello della resistenza relativa al rivestimento in legno di balsa, che vale:

$$R_r = \frac{s_r}{\lambda_r A} = 0.006061\ °C/W = 6.061 \cdot 10^{-3}\ °C/W$$

La potenza termica trasferita dall'ambiente più caldo a quello più freddo (nello schema, da sinistra a destra) è quindi regolata dalla relazione:

$$\Delta T = (R_i + R_r + R_p + R_e)\dot{Q}$$

Essendo poste in serie, le resistenze possono essere sostituite con un'unica resistenza equivalente, pari alla loro somma:

$$R = R_i + R_r + R_p + R_e = 0.013084\ °C/W = 13.084 \cdot 10^{-3}\ °C/W$$

Pertanto, la potenza termica trasferita tra ambiente interno ed ambiente esterno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R} = 1146\ \text{W} = 1.1\ \text{kW}$$

– *Commenti*

Si noti come un sottile rivestimento a bassa conducibilità abbia un effetto isolante comparabile a quello dell'intera parete in calcestruzzo. Il rivestimento assicura anche una superficie più calda delle pareti. Infatti, la temperatura superficiale interna vale:

$$T_{i,s} = T_i - R_i\dot{Q} = 21.2°C$$

Il risultato è significativamente superiore a quello ottenuto in precedenza, pari a 17.9°C.

Al fine di minimizzare gli errori di troncamento, nei calcoli intermedi delle resistenze termiche è stato mantenuto un numero di cifre significative largamente superiore all'accuratezza che ci si attende sulla stima finale della potenza termica trasmessa.

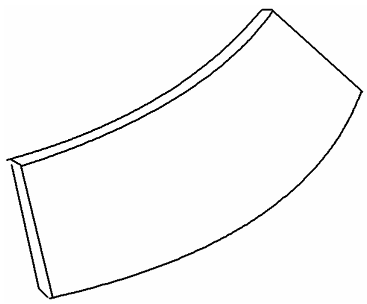
E.IV. Parabrezza

– *Problema*

Il parabrezza in vetro di un'automobile, con spessore 4 mm e conduttività termica 0.73 W/(m·°C), viene disappannato ventilando la sua superficie interna con aria calda a 40°C. Il coefficiente di scambio termico convettivo medio sul lato interno del parabrezza è stimato pari a 30 W/(m^2·°C). All'esterno la temperatura è pari a –5°C, mentre il coefficiente di convezione medio vale 65 W/(m^2·°C).

Determinare le temperature sulla superficie interna e sulla superficie esterna del parabrezza.

– *Dati e schema*



$T_i = 40°C$	(temperatura dell'aria interna)
$h_i = 30$ W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione interno)
$T_e = -5°C$	(temperatura dell'aria esterna)
$h_e = 65$ W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione esterno)
$\lambda_v = 0.73$ W/(m·°C).	(conduttività del vetro)
$s_v = 4$ mm = 0.004 m	(spessore del vetro)

– *Determinare*

$T_{i,s}$	(temperatura sulla superficie interna del parabrezza)
$T_{e,s}$	(temperatura sulla superficie esterna del parabrezza)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale, effetti radiativi trascurabili.

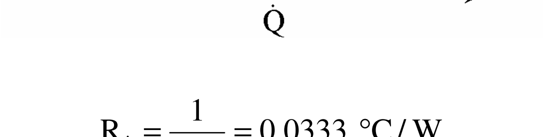
– *Soluzione*

Sebbene il parabrezza sia incurvato, la curvatura è sufficientemente piccola da poterlo considerare piano e, quindi, da poter assumere il problema mono-dimensionale.

Poiché non si hanno informazioni sull'area superficiale del parabrezza, si fa riferimento ad una superficie di area unitaria:

$$A = 1\ \text{m}^2$$

Il circuito termico relativo al problema studiato è il seguente:



in cui

$$R_i = \frac{1}{h_i A} = 0.0333\ \text{°C/W}$$

$$R_v = \frac{s_v}{\lambda_v A} = 0.0055\ \text{°C/W}$$

$$R_e = \frac{1}{h_e A} = 0.0154 \ \ {}^\circ C / W$$

sono le resistenze alla trasmissione del calore attraverso, rispettivamente, lo strato convettivo superficiale interno in aria, il vetro e lo strato convettivo superficiale esterno in aria.

La potenza termica trasferita dall'ambiente più caldo a quello più freddo (nello schema, da sinistra a destra) è regolata dalla relazione:

$$T_i - T_e = (R_i + R_v + R_e)\dot{Q}$$

Essendo poste in serie, le resistenze possono essere sostituite con un'unica resistenza equivalente, pari alla loro somma:

$$R = R_i + R_v + R_e = 0.0542 \ \ {}^\circ C / W$$

Pertanto, la potenza termica trasferita tra ambiente interno ed ambiente esterno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_e - T_i)}{R} = 830 \ \ W$$

Le temperature superficiali possono essere calcolate considerando che la potenza termica trasmessa deve attraversare tutte le resistenze della serie. Si ha perciò che:

$$T_{i,s} = T_i - R_i\dot{Q} = 12.3^\circ C$$

$$T_{e,s} = T_e + R_e\dot{Q} = 7.8^\circ C$$

– *Commenti*

Il salto di temperatura più elevato rispetto al valore ambiente è sulla superficie interna. Tale salto può essere diminuito incrementando il coefficiente di convezione interno (per esempio, aumentando la velocità dell'aria), al fine di evitare che la temperatura superficiale scenda sotto la temperatura di rugiada e, quindi, che si abbia formazione di condensa sul parabrezza.

In alternativa, o ad integrazione, si può impiegare il climatizzare per deumidificare l'aria all'interno dell'auto, cioè per ridurne l'umidità specifica e, quindi, innalzare la temperatura di rugiada.

E.V. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana multi-strato (2)

– *Problema*

Si consideri una parete piana multistrato di un cella frigorifera con base 2.00 m ed altezza 1.75 m, che separa dall'ambiente esterno, a temperatura 25°C, un vano refrigerato mantenuto stabilmente a temperatura –20°C. La parete piana è costituita da due "pelli" in materiale plastico rigido, ognuna delle quali presenta spessore 5 mm e conduttività termica 0.8 W/(m·°C); tra le due "pelli" è inserito uno strato di materiale schiumato con funzione di isolante termico, caratterizzato da spessore 100 mm e conduttività termica 0.030 W/(m·°C). I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete valgono, rispettivamente, 10 W/(m^2·°C) e 15 W/(m^2·°C).

Determinare la potenza termica trasmessa.

– *Dati e schema*

$T_i = -20°C$ (temperatura del vano refrigerato)

$h_i = 10\ W/(m^2 \cdot °C)$ (coefficiente di convezione interno)

$T_e = 25°C$ (temperatura dell'ambiente esterno)

$h_e = 15\ W/(m^2 \cdot °C)$ (coefficiente di convezione esterno)

$\lambda_p = 0.8\ W/(m \cdot °C)$ (conduttività delle "pelli" plastiche)

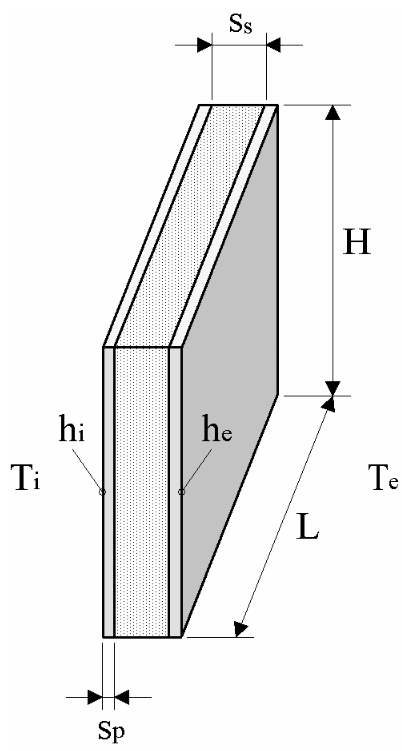
$s_p = 5\ mm = 0.005\ m$ (spessore delle "pelli" plastiche)

$\lambda_s = 0.030\ W/(m \cdot °C)$ (conduttività dello schiumato)

$s_s = 100\ mm = 0.100\ m$ (spessore dello schiumato)

$L = 2.00\ m$ (lato di base della parete)

$H = 1.75\ m$ (altezza della parete)



– *Determinare*

$\dot{Q}$ (potenza termica attraverso la parete)

– *Ipotesi*

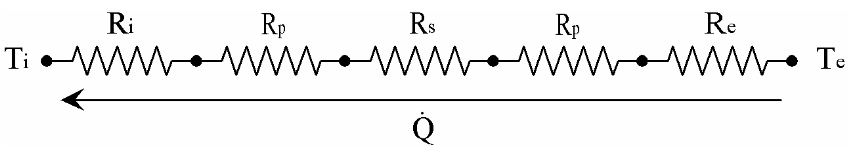
Problema stazionario, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale.

– *Soluzione*

L'area della sezione di passaggio del flusso di calore, costante, è pari a:

$$A = LH = 3.50\ \ m^2$$

Il circuito termico relativo al problema studiato si può rappresentare come segue:



in cui

$$R_i = \frac{1}{h_i A} = 0.02857\ \ °C/W$$

$$R_p = \frac{s_p}{\lambda_p A} = 0.00179\ \ °C/W$$

$$R_s = \frac{s_s}{\lambda_s A} = 0.95238\ \ °C/W$$

$$R_e = \frac{1}{h_e A} = 0.01905\ \ °C/W$$

sono le resistenze alla trasmissione del calore attraverso, rispettivamente, lo strato convettivo superficiale interno, la pelle plastica interna (uguale alla pelle plastica esterna), lo strato di isolante schiumato e lo strato convettivo superficiale esterno.

La potenza termica trasferita dall'ambiente più caldo a quello più freddo (nello schema, da destra a sinistra) è regolata dalla relazione:

$$T_e - T_i = \left(R_i + R_p + R_s + R_p + R_e\right)\dot{Q}$$

Essendo poste in serie, le resistenze possono essere sostituite con un'unica resistenza equivalente, pari alla loro somma:

$$R = R_i + R_p + R_s + R_p + R_e = 1.00357 \ \ °C/W$$

Pertanto, la potenza termica trasferita tra ambiente esterno ed ambiente interno vale:

$$\dot{Q} = \frac{\left(T_e - T_i\right)}{R} = 45 \ \ W$$

– *Commenti*

La resistenza dello strato di materiale isolante è pari a circa il 95% della resistenza complessiva della parete.

E.VI. Cella frigorifera

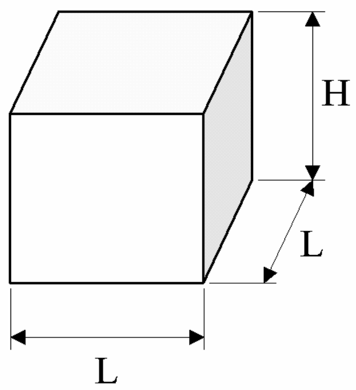
– *Problema*

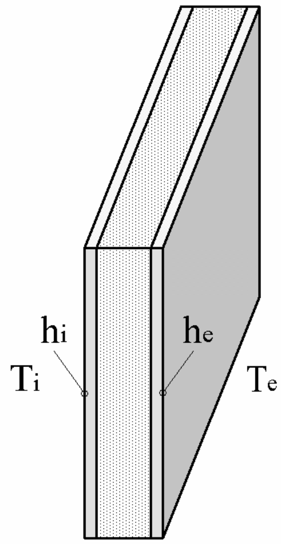
Si consideri una cella frigorifera, con dimensioni esterne 2.00 x 2.00 x 1.75 m^3 (L x L x H). Le pareti laterali e quella superiore sono tutte conformate, rispetto allo spessore, come la parete del problema precedente, ovvero sono costituite da due "pelli" in materiale plastico rigido, ognuna con spessore 5 mm e conduttività termica 0.8 W/(m·°C), tra le quali è inserito uno strato di isolante termico schiumato con spessore 100 mm e conduttività termica 0.030 W/(m·°C). I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete valgono, rispettivamente, 10 W/(m^2·°C) e 15 W/(m^2·°C). Il pavimento della cella si può considerare adiabatico.

Sapendo che l'ambiente esterno si trova a 25°C, determinare la potenza termica che è necessario estrarre dalla cella frigorifera per mantenere, in condizioni stazionarie, una temperatura interna pari a –20°C.

– *Dati e schema*

T_i = – 20°C	(temperatura del vano refrigerato)
h_i = 10 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione interno)
T_e = 25°C	(temperatura dell'ambiente esterno)
h_e = 15 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione esterno)
λ_p = 0.8 W/(m·°C)	(conduttività delle "pelli" plastiche)
s_p = 5 mm = 0.005 m	(spessore delle "pelli" plastiche)
λ_s = 0.030 W/(m·°C)	(conduttività dello schiumato)
s_s = 100 mm = 0.100 m	(spessore dello schiumato)
L = 2.00 m	(lato di base esterno della cella)
H = 1.75 m	(altezza esterna della cella)





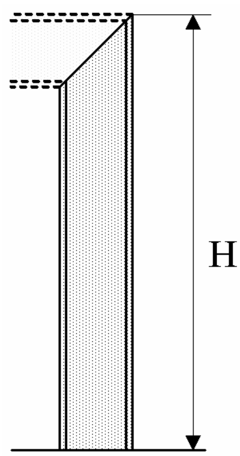
– *Determinare*

$\dot{Q}$ (potenza termica attraverso le pareti)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, pareti identiche nella direzione dello spessore, pavimento termicamente isolato, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi sulle pareti, effetti di bordo trascurabili.

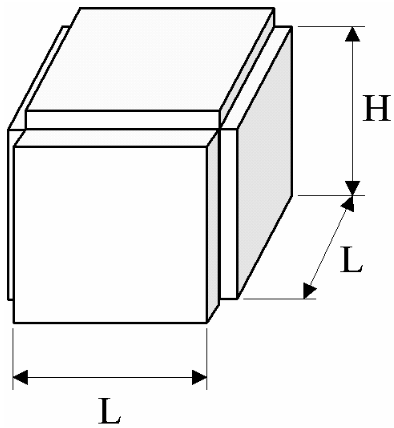
– *Soluzione*



Se si osserva in sezione una qualunque delle pareti della cella, si può chiaramente vedere che questa non presenza in realtà una sezione di passaggio del calore uniforme rispetto allo spessore. Il problema della trasmissione del calore è quindi multi-dimensionale. Ci si può tuttavia ricondurre al caso mono-dimensionale scegliendo, per ogni parete, un'opportuna area di riferimento, che si assumerà poi costante rispetto allo spessore.

In prima istanza, l'area di riferimento si potrebbe assumere pari all'area media della sezione di passaggio del calore, ovvero all'area della sezione di passaggio in corrispondenza della metà dello spessore. Tuttavia, prendendo a riferimento l'area della superficie esterna, si ottiene un valore più basso della resistenza alla trasmissione del calore delle pareti (che, nel caso di un problema di isolamento termico, si vorrebbe massimizzare), motivo per cui si opera in favore di sicurezza.

Utilizzando l'approccio sopra descritto, il problema si può schematizzare come segue:

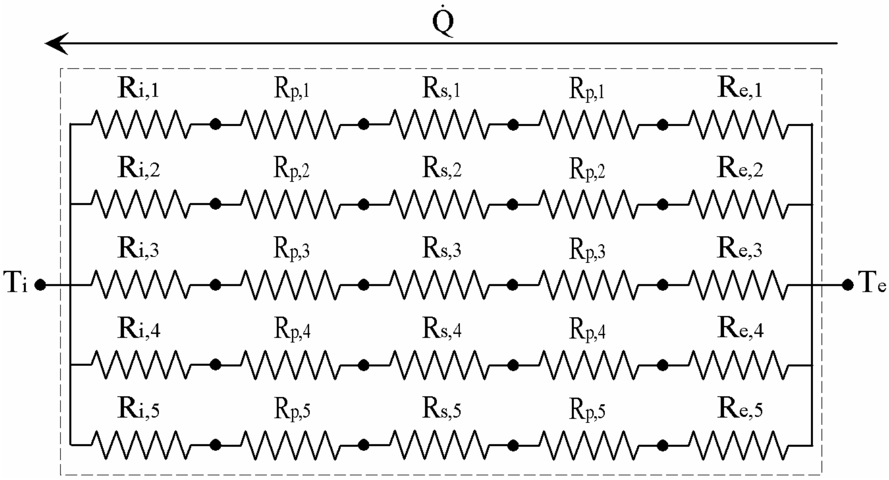


Etichettando con n = 1,2,3,4 le quattro pareti verticali e con n = 5 la parete orizzontale superiore (il pavimento è adiabatico per ipotesi), l'area della sezione di passaggio del flusso di calore è per ogni parete pari a:

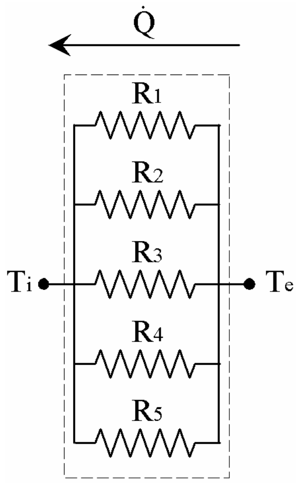
$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = LH$$

$$A_5 = L^2$$

Se si trascurano gli effetti di bordo, dal punto di vista della trasmissione del calore ogni parete "lavora" in parallelo con le altre. Il circuito termico relativo al problema allo studio si può quindi rappresentare come segue:



Considerando le resistenze equivalenti (totali) dei cinque rami in parallelo, ognuno relativo ad una singola parete, lo schema precedente si può semplificare come segue:



:

La resistenza della n-esima parete (n = 1,2,3,4,5) è data dalla somma delle resistenze nel circuito in serie relativo alla parete medesima:

$$R_n = R_{i,n} + R_{p,n} + R_{s,n} + R_{p,n} + R_{e,n} = \frac{1}{h_i A_n} + \frac{s_p}{\lambda_p A_n} + \frac{s_s}{\lambda_s A_n} + \frac{s_p}{\lambda_p A_n} + \frac{1}{h_e A_n}$$

Raccogliendo A_n, si ottiene:

$$R_n = \frac{1}{A_n}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e}\right)$$

Considerando ora il circuito in parallelo costituito dall'insieme dei cinque rami, ognuno caratterizzato da resistenza R_n (n = 1,2,3,4,5), si ha che la resistenza equivalente totale del circuito, R, è tale che:

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{R_n} = \sum_{n=1}^{5} \frac{A_n}{\left(\frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e}\right)}$$

In virtù del fatto che le pareti sono identiche tra loro rispetto allo spessore, il termine tra parentesi tonde è uguale per ogni termine della sommatoria e può perciò essere portato fuori della stessa:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\left(\frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e}\right)} \sum_{n=1}^{5} A_n$$

Il risultato della sommatoria altro non è che l'area totale della superficie esterna della cella frigorifera:

$$A = \sum_{n=1}^{5} A_n = 4 \cdot (LH) + L^2 = 18 \ \ m^2$$

Si ha quindi:

$$\frac{1}{R} = \frac{A}{\left(\frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e}\right)} \equiv \frac{1}{\frac{1}{A}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e}\right)}$$

In generale, la resistenza equivalente di un insieme di pareti che delimitano un vano e presentano identiche caratteristiche rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali (materiali, spessori, coefficienti di convezione) è uguale alla resistenza di una singola parete con area di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti dell'insieme suddetto. Nel caso allo studio, se ne ricava:

$$R = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e}\right) \equiv \left(\frac{1}{h_i A} + \frac{s_p}{\lambda_p A} + \frac{s_s}{\lambda_s A} + \frac{s_p}{\lambda_p A} + \frac{1}{h_e A}\right) =$$
$$= 0.19514 \ \ °C/W$$

In conclusione, la potenza termica trasferita tra ambiente esterno ed ambiente interno, che deve essere continuativamente estratta dalla cella frigorifera per mantenere all'interno di questa una temperatura stabilmente pari al valore desiderato, vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_e - T_i)}{R} = 231 \ \ W$$

– *Commenti*

Lungo gli spigoli della cella avvengono fenomeni di conduzione multi-dimensionale che, a parità di spessore, comportano maggiori perdite di calore che nel resto delle pareti. Tuttavia, nei casi di isolamento termico, il considerare nei calcoli l'area delle superfici esterne va generalmente a compensare tali fenomeni.

Ovviamente, se le specifiche di progetto individuano un ben preciso volume interno della cella, le dimensioni e le aree superficiali esterne di questa vanno calcolate di conseguenza. Ad esempio, nel caso studiato precedentemente, se fossero prescritte le dimensioni interne del vano refrigerato, L_i x L_i x H_i, nonché lo spessore totale delle pareti, s (da specifiche o calcolato sulla base di una potenza trasmessa massima ammissibile), le dimensioni esterne della cella frigorifera vanno valutate mediante le (ovvie) relazioni:

$$L_e = L_i + 2 \cdot s$$

$$H_e = H_i + s$$

Assumere la resistenza equivalente di un insieme di pareti che delimitano un vano pari alla resistenza di una singola parete avente area della sezione di passaggio del calore uguale alla somma delle aree delle sezioni di passaggio dell'insieme è possibile se, e solo se, tali pareti presentano caratteristiche identiche (o, quantomeno, assai simili) rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali, in termini di materiali, spessori e coefficienti di convezione.

L'ipotesi di pavimento isolato va in generale usata con una certa cautela, poiché possono verificarsi attraverso di esso flussi di calore non sempre trascurabili.

Nella pratica, non si può dimensionare il gruppo di refrigerazione (generalmente, a compressore) solo in base alla potenza termica trasferita in condizioni stazionarie, ma occorre anche valutare i carichi termici transitori, ad esempio legati all'introduzione di generi deperibili, la cui temperatura debba essere portata entro un periodo di tempo prestabilito dal valore ambiente a quello nel vano refrigerato, nonché il decadimento nel tempo delle prestazioni del gruppo di refrigerazione e dei materiali isolanti.

E.VII. Cella frigorifera con finestra di ispezione

– *Problema*

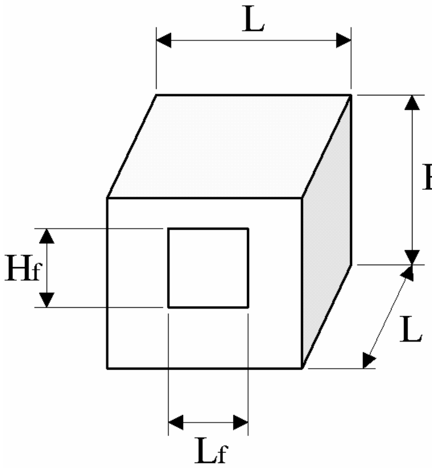
Si consideri la cella frigorifera del problema precedente, caratterizzata da dimensioni esterne 2.00 x 2.00 x 1.75 m^3 (L x L x H). Le pareti laterali e quella superiore sono tutte costituite da due "pelli" in materiale plastico rigido, ognuna con spessore 5 mm e conduttività termica 0.8 W/(m·°C), tra le quali è inserito uno strato di isolante termico schiumato con spessore 100 mm e conduttività termica 0.030 W/(m·°C). I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete valgono, rispettivamente, 10 W/(m^2·°C) e 15 W/(m^2·°C). Il pavimento della cella si può considerare adiabatico.

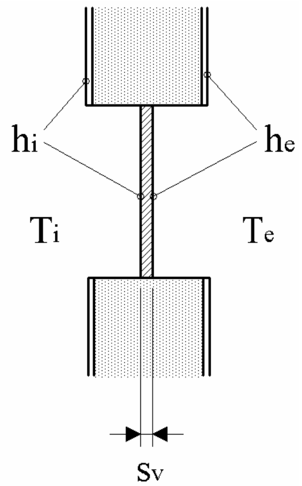
Sia inserita in una delle pareti verticali una finestra di ispezione con dimensioni 750 mm x 750 mm, costituita da una lastra di vetro con spessore 5 mm e conduttività termica pari a 1 W/(m·°C). I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna del vetro si possono assumere uguali a quelli esistenti sulle superfici interna ed esterna delle pareti isolanti.

Determinare la potenza termica che si deve estrarre dalla cella frigorifera per mantenere, in condizioni stazionarie, la temperatura interna desiderata, nonché quale percentuale di tale potenza fluisce attraverso la finestra di ispezione. Determinare inoltre le temperature superficiali sul vetro e sulle pelli plastiche.

– *Dati e schema*

$T_i = -20°C$	(temperatura del vano refrigerato)
$h_i = 10\ W/(m^2\cdot°C)$	(coefficiente di convezione interno)
$T_e = 25°C$	(temperatura dell'ambiente esterno)
$h_e = 15\ W/(m^2\cdot°C)$	(coefficiente di convezione esterno)
$\lambda_p = 0.8\ W/(m\cdot°C)$	(conduttività delle "pelli" plastiche)
$s_p = 5\ mm = 0.005\ m$	(spessore delle "pelli" plastiche)
$\lambda_s = 0.030\ W/(m\cdot°C)$	(conduttività dello schiumato)
$s_s = 100\ mm = 0.100\ m$	(spessore dello schiumato)
$L = 2.00\ m$	(lato di base esterno della cella)
$H = 1.75\ m$	(altezza esterna della cella)
$\lambda_v = 1\ W/(m\cdot°C)$	(conduttività del vetro)
$s_v = 5\ mm = 0.005\ m$	(spessore del vetro)
$L_f = 750\ mm = 0.750\ m$	(lato di base della finestra)
$H_f = 750\ mm = 0.750\ m$	(altezza della finestra)





– *Determinare*

$\dot{Q}$	(potenza termica totale attraverso pareti e finestra)
$\dot{Q}_f/\dot{Q}$	(frazione della potenza termica trasmessa attraverso la finestra)
$T_{i,s,t}$, $T_{e,s,t}$	(temperatura superficiale interna e esterna sulle pelli)
$T_{i,s,f}$, $T_{e,s,f}$	(temperatura superficiale interna e esterna sul vetro)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, pareti identiche rispetto allo spessore (eccettuata la finestra di ispezione), pavimento termicamente isolato, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi sulle pareti e sulle superfici del vetro, effetti di bordo trascurabili.

– *Soluzione*

Come già visto in precedenza, si può assumere che la resistenza equivalente delle pareti che delimitano il vano refrigerato sia pari alla resistenza di una singola parete con area della sezione di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti suddette, in virtù del fatto che queste presentano identiche caratteristiche rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali, in termini di materiali, spessori e coefficienti di convezione. Ovviamente, dal computo dell'area superficiale totale va sottratta l'area superficiale della finestra, pari a:

$$A_f = L_f H_f = 0.5635 \ \ m^2$$

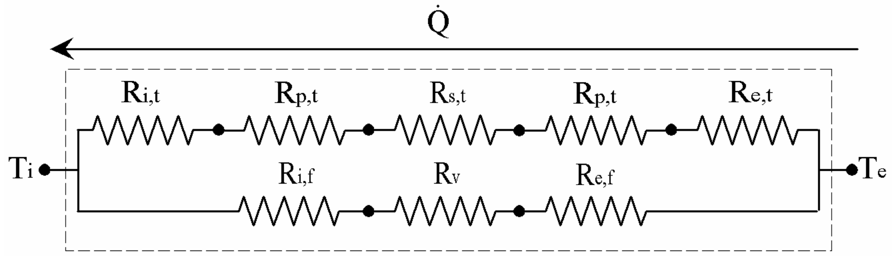
L'area totale netta delle pareti isolanti, calcolata sulle dimensioni esterne della cella per compensare gli effetti di bordo, vale quindi:

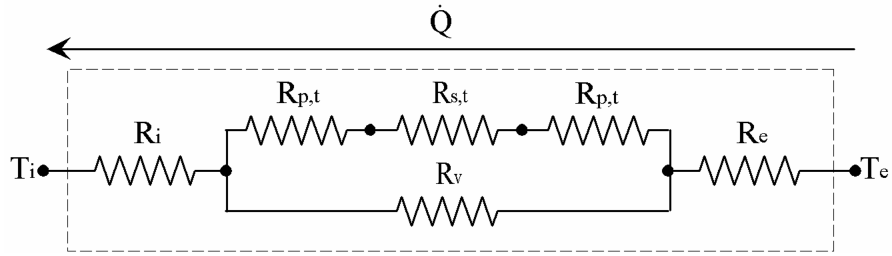
$$A_t = 4 \cdot (LH) + L^2 - A_f = 17.4375 \ \ m^2$$

Si noti che la superficie della finestra rappresenta una frazione piccola della superficie totale:

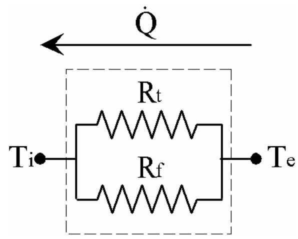
$$A_f / A = 3.13 \ \%$$

Dal punto di vista della trasmissione del calore, la finestra e l'insieme delle pareti "lavorano" in parallelo. Al sistema corrispondono due possibili circuiti termici equivalenti:





Nel primo caso, si considerano adiabatiche le superfici di separazione tra finestra e pareti isolanti, annullando quindi i relativi flussi trasversali. Nel secondo caso, si considerano isoterme le superfici esterne lambite dall'aria, assumendo temperature superficiali identiche per le pelli plastiche ed il vetro. La scelta dipende da quale dei due casi si può ritenere più vicino alla situazione reale (che, in realtà, costituisce una via di mezzo tra i due, essendo interessata da flussi termici che solo in prima approssimazione possono essere considerati mono-dimensionali).



In generale, nei casi di isolamento termico, le due schematizzazioni restituiscono risultati confrontabili qualora non si abbiano grosse difformità delle proprietà termofisiche e degli spessori tra i diversi rami resistivi. Si può quindi preferire la prima, che comporta trattazioni matematiche più agevoli. Infatti, si vede immediatamente che il circuito termico può essere semplificato sostituendo ad ogni serie di resistenze una resistenza equivalente, pari alla somma delle resistenze in serie:

$$R_t = R_{i,t} + R_{p,t} + R_{s,t} + R_{p,t} + R_{e,t} = \frac{1}{A_t}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e}\right) = 0.20143\,°C/W$$

$$R_f = R_{i,f} + R_v + R_{e,f} = \frac{1}{A_f}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{s_v}{\lambda_v} + \frac{1}{h_e}\right) = 0.30519\ °C/W$$

La resistenza equivalente al parallelo di R_t e R_p è poi tale che:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_f} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_t R_f}{R_t + R_f} = 0.12134\ °C/W$$

La potenza termica trasmessa complessivamente attraverso le pareti isolate termicamente e la finestra vale:

$$\dot{Q} = (T_e - T_i)/R = 371\ \ W$$

La potenza termica trasmessa attraverso la sola finestra vale invece:

$$\dot{Q}_f = (T_e - T_i)/R_f = 147\ \ W$$

Si noti come, a fronte di un'estensione superficiale pari a poco più del 3% del totale, la finestra trasmetta quasi il 40% della potenza termica complessiva.

$$\dot{Q}_f / \dot{Q} = 39.8\%$$

Infine, la schematizzazione impiegata permette di stimare agevolmente le temperature superficiali

Per la finestra si ha:

$$R_{i,f} = \frac{1}{h_i A_f} = 0.17778\ °C/W \qquad R_{e,f} = \frac{1}{h_e A_f} = 0.11852\ °C/W$$

$$T_{i,s,f} = T_i + R_{i,f}\dot{Q}_f = 6.2°C \qquad T_{e,s,f} = T_e - R_{e,f}\dot{Q}_f = 7.5°C$$

Per le pareti multistrato si ha:

$$\dot{Q}_t = (T_e - T_i)/R_t \equiv \dot{Q} - \dot{Q}_f = 223\ \ W$$

$$R_{i,t} = \frac{1}{h_i A_t} = 0.00573\ °C/W \qquad R_{e,t} = \frac{1}{h_e A_t} = -0.00384\ °C/W$$

$$T_{i,s,t} = T_i + R_{i,t}\dot{Q}_t = -18.7°C \qquad T_{e,s,t} = T_e - R_{e,t}\dot{Q}_t = 24.1°C$$

– *Commenti*

L'impiego della seconda schematizzazione, in cui si assumono isoterme le superfici lambite dall'aria (con temperature superficiali uguali per le pelli plastiche ed il vetro), restituirebbe un valore della potenza termica complessiva trasmessa pari a 2535 W, quindi assai più elevato di quello stimato precedentemente di 371 W. Entrambi i valori non sono comunque attendibili e quello corretto sta probabilmente nel mezzo. Il caso analizzato è in ogni modo un caso limite, che rappresenta un esempio di cattiva progettazione.

Si sono trascurati i fenomeni di conduzione indotti dalla (necessaria) presenza di un telaio della finestra e di una cornice di contenimento dello schiumato (con proprietà termiche tipicamente simili a quelle delle pelli plastiche) tutto intorno all'incasso della finestra. Inoltre, la cella frigorifera deve possedere una porta di accesso, che, sebbene possa essere conformata come le pareti coibenti, presenterà comunque una cornice di contenimento ed un telaio di incasso, che comporteranno la presenza di ulteriori ponti termici. Tali ponti termici sono tuttavia piccoli se non si impiegano materiali metallici o spessori consistenti delle pelli di rivestimento.

E.VIII. Cella frigorifera con finestra di ispezione a doppio vetro

– *Problema*

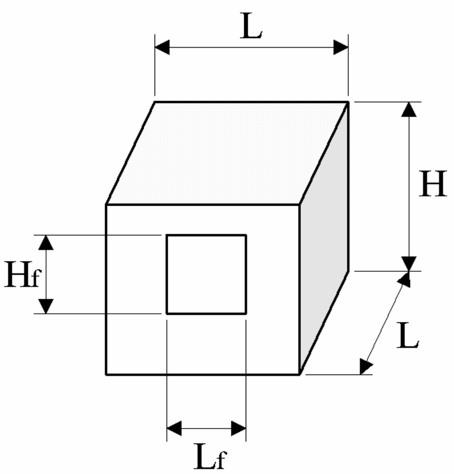
Si consideri la cella frigorifera del problema precedente, caratterizzata da dimensioni esterne 2.00 x 2.00 x 1.75 m^3 (L x L x H). Le pareti laterali e quella superiore sono tutte costituite da due "pelli" in materiale plastico rigido, ognuna con spessore 5 mm e conduttività termica 0.8 W/(m·°C), tra le quali è inserito uno strato di isolante termico schiumato con spessore 100 mm e conduttività termica 0.030 W/(m·°C). I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete valgono, rispettivamente, 10 W/(m^2·°C) e 15 W/(m^2·°C). Il pavimento della cella si può considerare adiabatico.

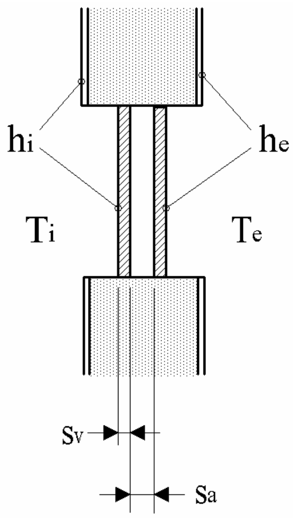
Questa volta è inserita, in una delle pareti verticali, una finestra di ispezione con dimensioni 750 mm x 750 mm, costituita da due lastre di vetro con spessore 5 mm e conduttività termica pari a 1 W/(m·°C), tra le quali è interposto uno strato di aria ferma con spessore 20 mm e conduttività termica 0.025 W/(m·°C).

Determinare la potenza termica che è necessario estrarre dalla cella frigorifera per mantenere, in condizioni stazionarie, la temperatura interna desiderata e quale percentuale di tale potenza fluisce attraverso la finestra di ispezione. Determinare inoltre le temperature superficiali sulle superfici esposte all'aria.

– *Dati e schema*

$T_i = -20°C$	(temperatura del vano refrigerato)
$h_i = 10$ W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione interno)
$T_e = 25°C$	(temperatura dell'ambiente esterno)
$h_e = 15$ W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione esterno)
$\lambda_p = 0.8$ W/(m·°C)	(conduttività delle "pelli" plastiche)
$s_p = 5$ mm = 0.005 m	(spessore delle "pelli" plastiche)
$\lambda_s = 0.030$ W/(m·°C)	(conduttività dello schiumato)
$s_s = 100$ mm = 0.100 m	(spessore dello schiumato)
L = 2.00 m	(lato di base esterno della cella)
H = 1.75 m	(altezza esterna della cella)





$\lambda_v = 1$ W/(m·°C) (conduttività del vetro)
$s_v = 5$ mm $= 0.005$ m (spessore delle lastre di vetro)
$\lambda_a = 0.025$ W/(m·°C) (conduttività dell'aria)
$s_a = 20$ mm $= 0.020$ m (spessore dello strato d'aria)
$L_f = 750$ mm $= 0.750$ m (lato di base della finestra)
$H_f = 750$ mm $= 0.750$ m (altezza della finestra)

– *Determinare*

$\dot{Q}$ (potenza termica totale attraverso pareti e finestra)
$\dot{Q}_f / \dot{Q}$ (frazione della potenza termica attraverso la finestra)
$T_{i,s,t}$, $T_{e,s,t}$ (temperatura superficiale interna e esterna sulle pelli)
$T_{i,s,f}$, $T_{e,s,f}$ (temperatura superficiale interna e esterna sul vetro)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, pareti identiche rispetto allo spessore (eccettuata la finestra di ispezione), pavimento termicamente isolato, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi sulle pareti e sulle superfici del vetro, effetti di bordo trascurabili, aria ferma tra le lastre di vetro, superfici di separazione tra finestra e pareti adiabatiche.

– *Soluzione*

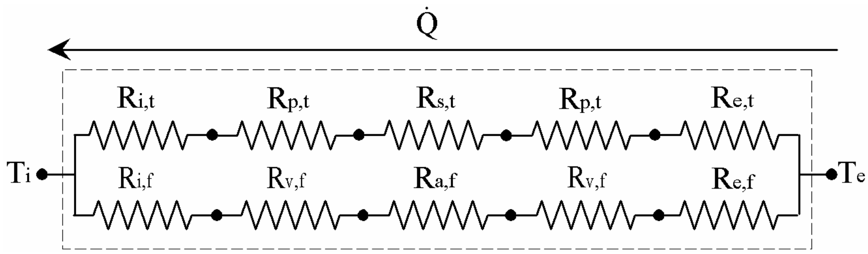
Ancora una volta si può assumere che la resistenza equivalente delle pareti che delimitano il vano refrigerato sia pari alla resistenza di una singola parete con area della sezione di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti suddette, sottraendo dal computo l'area superficiale della finestra, pari a:

$$A_f = L_f H_f = 0.5635 \ \ m^2$$

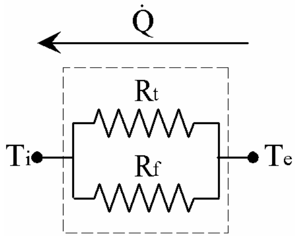
L'area totale netta delle pareti coibenti, ancora una volta calcolata sulle dimensioni esterne della cella per compensare gli effetti di bordo, vale quindi:

$$A_t = 4 \cdot (LH) + L^2 - A_f = 17.4375 \ \ m^2$$

Dal punto di vista della trasmissione del calore, la finestra e l'insieme delle pareti "lavorano" in parallelo. Se si considerano adiabatiche le superfici di separazione tra finestra e pareti isolanti, annullando quindi i relativi flussi trasversali, al sistema corrisponde il seguente circuito termico equivalente:



Il circuito termico può essere poi semplificato sostituendo ad ogni serie di resistenze una resistenza equivalente alla loro somma:



$$R_t = R_{i,t} + R_{p,t} + R_{s,t} + R_{p,t} + R_{e,t} = \frac{1}{A_t}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e}\right) = 0.20143\,°C/W$$

$$R_f = R_{i,f} + R_{v,f} + R_{a,f} + R_{v,f} + R_{e,f} = \frac{1}{A_f}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{s_v}{\lambda_v} + \frac{s_a}{\lambda_a} + \frac{s_v}{\lambda_v} + \frac{1}{h_e}\right) = 1.73630\,°C/W$$

La resistenza equivalente al parallelo di R_t e R_p è tale che:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_f} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_t R_f}{R_t + R_f} = 0.18049\ °C/W$$

La potenza termica trasmessa complessivamente attraverso le pareti coibenti e la finestra vale:

$$\dot{Q} = (T_e - T_i)/R = 249\ \text{W}$$

La potenza termica trasmessa attraverso la finestra vale:

$$\dot{Q}_f = (T_e - T_i)/R_f = 26\ \text{W}$$

Si noti come, impiegando un doppio vetro, la finestra trasmette ora solo il 10% circa della potenza termica complessiva.

$$\dot{Q}_f / \dot{Q} = 10.4\%$$

Infine, si possono stimare le temperature sulle superfici esposte. Per la finestra si ha:

$$R_{i,f} = \frac{1}{h_i A_f} = 0.17778\ °C/W \qquad R_{e,f} = \frac{1}{h_e A_f} = 0.11852\ °C/W$$

$$T_{i,s,f} = T_i + R_{i,f}\dot{Q}_f = -15.4°C \qquad T_{e,s,f} = T_e - R_{e,f}\dot{Q}_f = 21.9°C$$

Per le pareti termicamente isolate si ha:

$$\dot{Q}_t = (T_e - T_i)/R_t = 223\ \text{W}$$

$$R_{i,t} = \frac{1}{h_i A_t} = 0.00573\ °C/W \qquad R_{e,t} = \frac{1}{h_e A_t} = -0.00384\ °C/W$$

$$T_{i,s,t} = T_i + R_{i,t}\dot{Q}_t = -18.7°C \qquad T_{e,s,t} = T_e - R_{e,t}\dot{Q}_t = 24.1°C$$

– *Commenti*

L'impiego della schematizzazione in cui si assumono isoterme le superfici lambite dall'aria (con temperature superficiali esterne uguali per le pelli plastiche ed il vetro) restituirebbe in questo caso un valore della potenza termica complessiva trasmessa pari a 252 W, quindi molto prossimo a quello precedentemente stimato di 249 W.

Non è possibile allargare a piacere lo strato di aria poiché, oltre un certo spessore di questo, si instaurano nella cavità tra le due lastre di vetro moti turbolenti per convezione naturale, con il risultato di aumentare la trasmissione del calore anziché diminuirla. Inoltre, lo scambio termico per irraggiamento tra le due lastre di vetro è indipendente dallo spessore.

E.IX. Scelta di un materiale refrattario

– *Problema*

Si consideri un fornetto il cui vano interno presenta dimensioni 600 mm x 400 mm x 500 mm ($L_{1,int}$ x $L_{2,int}$ x H_{int}). Le pareti sono costituite da lastre in materiale refrattario, con spessore 120 mm e conduttività termica media 0.5 W/(m·°C), protette esternamente da lamine di acciaio inossidabile con spessore 5 mm e conduttività termica 16 W/(m·°C). I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna delle pareti valgono, rispettivamente, 20 W/(m^2·°C) e 10 W/(m^2·°C).

Sapendo che l'ambiente esterno si trova a 30°C, determinare la potenza termica da fornire al vano interno del fornetto per mantenere, in condizioni stazionarie, una temperatura interna pari a 400°C. Determinare inoltre la conduttività termica che dovrebbe possedere un materiale refrattario alternativo a quello impiegato, atto a ridurre del 75% le dispersioni di calore, lasciando invariate la geometria e le altre caratteristiche del forno.

– *Dati*

T_i = 400°C	(temperatura del vano interno)
T_e = 30°C	(temperatura dell'ambiente esterno)
h_i = 20 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione interno)
h_e = 10 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione esterno)
λ_r = 0.5 W/(m·°C)	(conduttività termica del refrattario)
s_r = 120 mm = 0.120 m	(spessore del refrattario)
λ_m = 16 W/(m·°C)	(conduttività termica dell'acciaio)
s_s = 5 mm = 0.005 m	(spessore dell'acciaio)
$L_{1,int}$ = 600 mm = 0.600 m	(lato di base del vano interno)
$L_{2,int}$ = 400 mm = 0.400 m	(lato di base del vano interno)
H_{int} = 500 mm = 0.500 m	(altezza del vano interno)

– *Determinare*

$\dot{Q}$	(potenza termica attraverso le pareti)
$\lambda_{r'}$	(conduttività di un refrattario alternativo)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, pareti identiche nella direzione dello spessore, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi sulle pareti, effetti di bordo trascurabili, effetti radiativi trascurabili.

– *Soluzione*

Il problema può essere reso monodimensionale scegliendo, per ogni parete, un'opportuna area di riferimento, che si assumerà poi costante rispetto allo spessore. Per operare in favore di sicurezza, tale area si può scegliere pari all'estensione superficiale esterna della parete considerata.

Per calcolare le aree superficiali esterne è necessario determinare le dimensioni esterne del forno, che sono pari a:

$$L_1 \equiv L_{1,est} = L_{1,int} + 2 \cdot s_r + 2 \cdot s_m = 0.850 \ \text{m}$$

$$L_2 \equiv L_{2,est} = L_{2,int} + 2 \cdot s_r + 2 \cdot s_m = 0.650 \ \text{m}$$

$$H \equiv H_{est} = H_{int} + 2 \cdot s_r + 2 \cdot s_m = 0.750 \ \text{m}$$

Etichettando con n = 1,2,3,4 le quattro pareti verticali e con n = 5,6 le pareti orizzontale superiore e inferiore (il pavimento non si può considerare a priori adiabatico, se non si hanno informazioni in tal senso), l'area superficiale esterna per le varie pareti è pari a:

$$A_1 = A_3 = L_1 H$$

$$A_2 = A_4 = L_2 H$$

$$A_5 = A_6 = L_1 L_2$$

Si è già visto che, essendo le sei pareti del fornetto caratterizzate da identici materiali, spessori e coefficienti di convezione, la loro resistenza complessiva alla trasmissione del calore è pari alla resistenza di una singola parete avente area di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle sei pareti suddette. Si ha quindi che:

$$A = \sum_{n=1}^{6} A_n = 2 \cdot (L_1 H) + 2 \cdot (L_2 H) + 2 \cdot (L_1 L_2) = 3.355 \ \text{m}^2$$

$$R_i = \frac{1}{h_i A} = 0.0149 \ \text{°C/W}$$

$$R_r = \frac{s_r}{\lambda_r A} = 0.0715 \ \text{°C/W}$$

$$R_m = \frac{s_m}{\lambda_m A} = 0.000093 \ \text{°C/W}$$

$$R_e = \frac{1}{h_e A} = 0.0298 \ \text{°C/W}$$

$$R = R_i + R_r + R_m + R_e = 0.1163 \ \text{°C/W}$$

La potenza termica trasferita tra ambiente interno ed ambiente esterno, da fornire al fornetto (ad esempio, mediante una resistenza elettrica o un bruciatore a gas) per stabilizzare la sua temperatura interna al valore desiderato, vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R} = 3180 \ \text{W} = 3.2 \ \text{kW}$$

Ridurre la potenza termica dissipata del 75% significa in pratica ridurla ad un quarto del valore precedentemente calcolato:

$$\dot{Q}' = (1 - 0.75) \cdot \dot{Q} = 0.25 \cdot \dot{Q} = 795 \;\; \mathrm{W}$$

Volendo lasciare la geometria del fornetto e, quindi, gli spessori di parete invariati, e non potendo intervenire sui coefficienti di scambio termico convettivo, l'unico modo per aumentare la resistenza alla trasmissione del calore delle pareti è quello di impiegare un diverso tipo di refrattario. Questo deve essere selezionato in base alla conduttività termica, che deve presentare valore tale che:

$$R' = \frac{T_i - T_e}{\dot{Q}'}$$

ovvero

$$R_{r'} = \frac{T_i - T_e}{\dot{Q}'} - R_i - R_m - R_e = 0.4205 \;\; ^\circ\mathrm{C/W}$$

In definitiva, la conduttività del nuovo refrattario deve essere pari a:

$$\lambda_{r'} = \frac{s_r}{A} \frac{1}{R_{r'}} = 0.085 \;\; \mathrm{W/m^\circ C}$$

– *Commenti*

Si noti che la resistenza alla conduzione termica del rivestimento metallico è così piccola che, in prima approssimazione, poteva essere trascurata.

Il refrattario utilizzato deve presentare caratteristiche compatibili con l'applicazione allo studio, con particolare riferimento alla resistenza alle alte temperature, alle proprietà meccaniche, al coefficiente di dilatazione termica, ecc.

E.X. Raffreddamento di un microprocessore

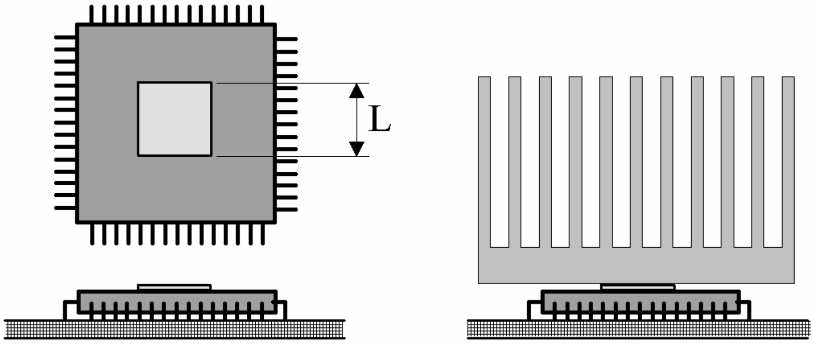
– *Problema*

Si consideri un microprocessore che, in condizioni di massimo carico computazionale, dissipa una potenza termica pari a 80 W. La superficie attraverso cui deve essere dissipato il calore presenta dimensioni 8 mm x 8 mm. La temperatura dell'ambiente in cui il calore deve essere rilasciato è pari a 35°C.

Determinare la resistenza termica che deve presentare un dissipatore di calore (ad esempio, una superficie alettata in rame o alluminio con una ventola di raffreddamento) per far sì che la massima temperatura di funzionamento del microprocessore, pari a 75°C, non venga mai raggiunta.

– *Dati e schema*

$\dot{Q}_{max} = 80$ W	(massima potenza dissipata dal microprocessore)
L = 8 mm = 0.0008 m	(lato di base della superficie di scambio termico)
$T_a = 35$°C	(temperatura ambiente)
$T_{max} = 75$°C	(massima temperatura ammessa nel microprocessore)



– *Determinare*

R_d (resistenza del dissipatore)

– *Ipotesi*

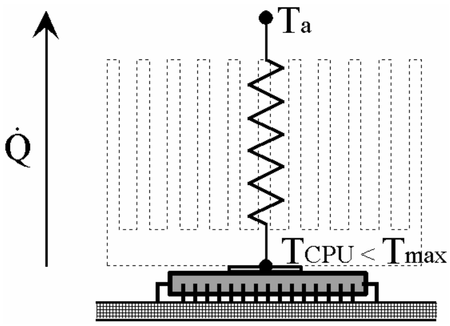
Problema stazionario, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale, resistenze alla conduzione all'interno del microprocessore trascurabili, resistenze di contatto trascurabili, superficie inferiore del microprocessore termicamente isolata.

– *Soluzione*

La potenza termica da dissipare sembra, a prima vista, limitata. In realtà, il flusso termico ad essa associato è elevatissimo a causa della ridotta superficie di scambio del microprocessore. Si ha infatti che:

$$A = L^2 = 64 \cdot 10^{-6} \ \text{m}^2$$

$$q'' = \dot{Q} \big/ A = 1250000 \ \text{W/m}^2 = 1.25 \ \text{MW/m}^2$$



Il circuito termico relativo al problema in esame è riportato accanto.

La resistenza termica complessiva del dissipatore da applicare sopra il processore deve essere tale che

$$T_{CPU} \le T_{max} \ \Rightarrow \ \left(T_{CPU} - T_a\right) = R_d \dot{Q}_{max} \le \left(T_{max} - T_a\right)$$

e, quindi,

$$R_d \le \frac{T_{max} - T_a}{\dot{Q}_{max}} = 0.50 \ \text{°C/W}$$

– *Commenti*

La resistenza termica complessiva di un dissipatore termico a superficie alettata con ventola, data dalla somma delle resistenze alla conduzione nel metallo e delle resistenze convettive, è tipicamente un dato fornito dal produttore del dissipatore.

La parte termicamente attiva del microprocessore, vale a dire la circuiteria elettronica incisa su chip di silicio, è in contatto pressoché diretto con il dissipatore (li separa un sottilissimo strato in materiale ceramico o cristallino per isolamento elettrico, caratterizzato da conduttività termica elevatissima e resistenza alla trasmissione del calore pressoché nulla). Peraltro, la suddetta parte termicamente attiva del microprocessore scambia calore con l'ambiente esterno non solo tramite il dissipatore, ma anche attraverso il fondo del microprocessore e la scheda su cui questo è montato. Il circuito termico equivalente dovrebbe perciò comprendere un secondo ramo di resistenze (R_2), termicamente in parallelo con il primo (R_1), con percorso che si svilupperebbe dalla parte attiva suddetta all'ambiente esterno, attraversando il basamento del microprocessore, lo strato d'aria tra questo e la scheda, la scheda stessa e lo strato convettivo in aria tra scheda e ambiente. Tuttavia la riduzione della resistenza termica totale data dalla presenza di tale ramo è, ai fini della dissipazione del calore, trascurabile. Si può infatti verificare che:

$$R_2 >> R_1 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cong \frac{R_1 R_2}{R_2} = R_1$$

La potenza termica dissipata nella circuiteria elettronica del processore è facilmente stimabile mediante valutazioni di ordine elettrico:

$$\dot{Q} \cong VI$$

E.XI. Raffreddamento di un microprocessore: resistenza di contatto

– *Problema*

Si considerino il microprocessore ed il dissipatore termico di cui al problema precedente. Il primo presenta superficie di dissipazione del calore con dimensioni 8 mm x 8 mm e dissipa, in condizioni di massimo carico, una potenza termica pari a 80 W. Per il dissipatore, il fabbricante dichiara un resistenza termica pari a 0.5 °C/W. La temperatura dell'ambiente in cui il calore deve essere rilasciato è pari a 35°C.

In questo caso, si tiene in considerazione l'esistenza di una resistenza termica di interfaccia in corrispondenza della superficie di contatto tra microprocessore e base della superficie alettata. Sia pari a 0.00006 °C·m^2/W, riferito all'unità di superficie, il valore specifico di tale resistenza (tipico dell'accoppiamento silicio/alluminio con ridotta pressione di contatto). Determinare la massima temperatura che si potrebbe raggiungere nel microprocessore.

– *Dati*

$\dot{Q}_{max} = 80$ W	(massima potenza dissipata dal microprocessore)
$A = 64 \cdot 10^{-6}$ m^2	(superficie di scambio del microprocessore)
$T_a = 35$°C	(temperatura ambiente)
$R_d = 0.5$ °C/W	(resistenza del dissipatore)
$R''_c = 0.6 \cdot 10^{-4}$ °C·m^2/W	(resistenza superficiale di contatto)

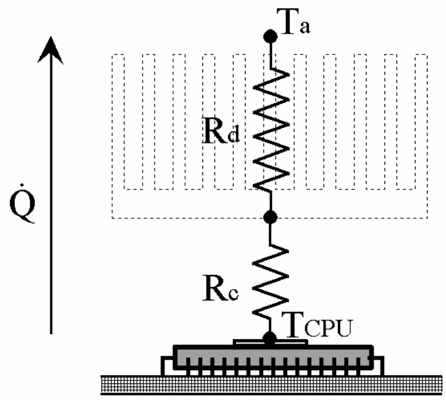
– *Determinare*

T_{CPU}	(massima temperatura del microprocessore)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale, resistenze alla conduzione all'interno del microprocessore trascurabili, superficie inferiore del microprocessore termicamente isolata.

– *Soluzione*



Nel circuito termico relativo al problema in esame, rappresentato nella figura accanto, la resistenza termica di contatto si può valutare come segue:

$$R_c = R_c''/A = 0.94\ °C/W$$

La resistenza termica complessiva tra superficie di dissipazione del processore e ambiente vale:

$$R = R_c + R_d = 1.44\ °C/W$$

La massima temperatura che si può raggiungere nel microprocessore è quindi pari a:

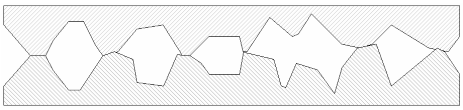
$$T_{CPU} = T_a + R\dot{Q}_{max} = 150\ °C$$

– *Commenti*

Il valore ottenuto eccede largamente le specifiche (T_{max} = 75°C). Va peraltro osservato che a nulla varrebbe l'impiego di un dissipatore più efficiente, al limite caratterizzato da resistenza termica praticamente trascurabile (cosa tecnicamente possibile solo adottando un sistema a liquido). Si otterrebbe infatti che:

$$T_{CPU} = T_a + R\dot{Q}_{max} \approx T_a + R_d\dot{Q}_{max} = 110\ °C$$

È perciò necessario intervenire sulla resistenza di contatto. Tale resistenza è dovuta al fatto che, a livello microscopico, l'effettiva superficie di scambio termico tra microprocessore e dissipatore non è pari al valore nominale, ma all'area di contatto tra le sommità delle microasperità superficiali. Altrove, sono interposte tra microprocessore e dissipatore microscopiche cavità riempite d'aria, che è assai poco conduttiva.

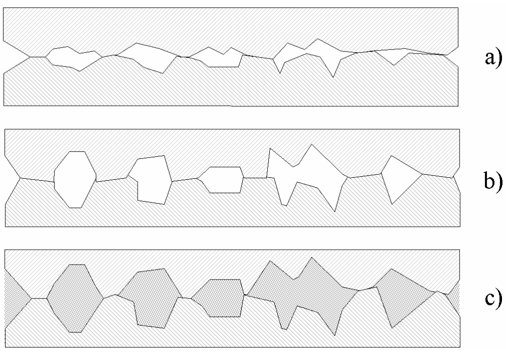


Per ridurre la resistenza di contatto si adottano varie strategie, spesso simultaneamente:

a) si lucidano a specchio le superfici da porre in contatto, in modo da ridurre lo spessore medio delle cavità;

b) si serrano tra loro le due superfici applicando una notevole pressione (ad esempio, tramite sistemi a molla o a vite), in modo da schiacciare le asperità ed aumentare la superficie effettiva di scambio termico;

c) si interpone tra le due superfici un sottile film di materiale più conduttivo dell'aria (grassi siliconici, resine epossidiche, ecc.), che sostituisca in tutto o in parte l'aria all'interno delle cavità.



Si noti che, nel terzo caso, il film deve essere sottilissimo, poiché la sostanza che lo costituisce è comunque relativamente poco conduttiva, con $\lambda = 0.5 \div 7$ W/(m·°C). Essa deve perciò riempire i vuoti e non interporsi tra le sommità delle microasperità superficiali, che sono fatte di materiale con conduttività assai più elevata.

E.XII. Raffreddamento di un microprocessore: resistenza di contatto (2)

– *Problema*

Si considerino il microprocessore ed il dissipatore termico di cui al problema precedente. Il primo presenta superficie di dissipazione del calore con dimensioni 8 mm x 8 mm e dissipa, in condizioni di massimo carico, una potenza termica pari a 80 W. Per il dissipatore, il fabbricante dichiara un resistenza termica pari a 0.5 °C/W. La temperatura dell'ambiente in cui il calore deve essere rilasciato è pari a 35°C.

Anche in questo caso si contempla la presenza di una resistenza termica d'interfaccia, localizzata in corrispondenza della superficie di contatto tra microprocessore e base della superficie alettata. Sia pari a 0.000007 °C·m²/W il valore specifico, riferito all'unità di superficie, di tale resistenza (tipico dell'accoppiamento silicio/alluminio con interposto un grasso conduttivo).

Determinare la temperatura massima che si potrebbe raggiungere nel microprocessore. Inoltre, determinare la resistenza termica massima che un dissipatore alternativo a quello considerato deve presentare perché le specifiche siano rispettate a pieno.

– *Dati*

$\dot{Q}_{max} = 80$ W	(massima potenza dissipata dal microprocessore)
$A = 64 \cdot 10^{-6}$ m^2	(superficie di scambio del microprocessore)
$T_a = 35$°C	(temperatura ambiente)
$R_d = 0.5$ °C/W	(resistenza del dissipatore)
$R_c'' = 0.7 \cdot 10^{-5}$ °C·m^2/W	(resistenza sup. di contatto con grasso conduttivo)
$T_{max} = 75$°C	(massima temp. ammessa nel microprocessore)

– *Determinare*

T_{CPU}	(massima temperatura del microprocessore)
$R_{d,ottimo}$	(res. di un dissipatore conforme alle specifiche)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale, resistenze alla conduzione all'interno del microprocessore trascurabili, superficie inferiore del microprocessore termicamente isolata.

– *Soluzione*

La resistenza di contatto in questo caso vale:

$$R_c = R_c''/A = 0.11 \text{ °C/W}$$

La resistenza termica complessiva della serie contatto-dissipatore è pari a:

$$R = R_c + R_d = 0.61 \ °C/W$$

La massima temperatura che si può avere nel microprocessore è quindi:

$$T_{CPU} = T_a + R\dot{Q}_{max} = 83.75 \ °C$$

Per rispettare pienamente le specifiche del processore, in termini di temperatura massima ammissibile, occorre scegliere un dissipatore tale che:

$$R_{d,ottimo} \leq \frac{T_{max} - T_a}{\dot{Q}_{max}} - R_c = 0.39 \ °C/W$$

– *Commenti*

Nessun moderno processore potrebbe essere raffreddato adeguatamente senza l'impiego di opportuni materiali di interfacciamento termico.

E.XIII. Conduzione piana con cambiamento di fase

– *Problema*

Un frigocontenitore a forma di parallelepipedo presenta dimensioni esterne 40 cm x 40 cm x 25 cm, spessore di parete 5 cm e conduttività termica del materiale di parete (polistirolo espanso) pari a 0.045 W/(m·°C). All'esterno la temperatura media è pari a 28°C, il coefficiente di scambio termico a 8 W/(m^2·°C). Il vano interno del contenitore è completamente riempito di una sostanza a base acqua, inizialmente congelata, la cui temperatura si può assumere stabilizzata a 0°C fintantoché la transizione di fase solido/liquido non è completa; la temperatura si può peraltro assumere pari a 0°C anche sulla superficie interna del contenitore.

Valutare la potenza termica che, nelle condizioni sopra illustrate, attraversa le pareti del contenitore. Inoltre, assumendo per la sostanza una densità in fase solida ed un calore latente di liquefazione rispettivamente pari a 920 kg/m^3 e 334 kJ/kg, e trascurando gli eventuali effetti della variazione di densità legati alla transizione di fase, stimare il tempo necessario alla completa liquefazione.

– *Dati*

L_1 = 40 cm = 0.40 m (prima dimensione del frigocontenitore)

L_2 = 40 cm = 0.40 m (seconda dimensione del frigocontenitore)

L_3 = 25 cm = 0.25 m (terza dimensione del frigocontenitore)

s = 5 cm = 0.05 m (spessore di parete)

λ = 0.045 W/(m·°C) (conduttività termica di parete)

T_e = 28°C (temperatura esterna)

h_e = 8 W/(m^2·°C) (coefficiente di scambio termico esterno)

T_g = T_i = 0°C (temperatura superficiale interna)

ρ_g = 920 kg/m^3 (densità della fase solida)

c_g = 334 kJ/kg = 334·10^3 J/kg (calore latente di liquefazione)

– *Determinare*

Potenza termica entrante nel frigocontenitore

Tempo di liquefazione del ghiaccio

– *Ipotesi*

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo esterno uniforme, temperatura interna costante per tutta la liquefazione, temperatura superficiale interna uguale alla temperatura di liquefazione, effetti della variazione di densità legati alla transizione di fase trascurabili.

– *Soluzione*

Se si osserva in sezione una qualunque parete del frigocontenitore, si può chiaramente vedere che questa non presenta in realtà un'area di passaggio del calore uniforme rispetto allo spessore (vedi Es.E.VI). Il problema termico è quindi multi-dimensionale, ma può essere ricondotto a mono-dimensionale scegliendo, per ogni parete, un'opportuna area di riferimento, che si assumerà poi costante rispetto allo spessore. Tale area si potrebbe, in prima istanza, assumere pari all'area media di passaggio del calore, ovvero all'area in corrispondenza della metà dello spessore. Se però si preferisce operare in favore di sicurezza, è più conveniente far riferimento all'area della superficie esterna delle pareti (in tal modo si compensano in qualche misura anche gli effetti di bordo lungo gli spigoli).

In generale, la resistenza equivalente di un insieme di pareti che delimitano un vano e presentano identiche caratteristiche rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali (materiali, spessori, coefficienti di scambio termico) è equivalente alla resistenza di una singola parete con area di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti dell'insieme suddetto. A tal riguardo, poiché non si hanno informazioni specifiche, è da considerare esposta all'aria tutta la superficie esterna del frigocontenitore, inclusa quella di appoggio (il frigocontenitore potrebbe essere appoggiato su una griglia o su supporti di qualche tipo che lascino circolare liberamente l'aria): La superficie esterna del frigocontenitore presenta area totale:

$$A = 2 \cdot (L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) = 0.72 \text{ m}^2$$

Di conseguenza, la resistenza complessiva delle pareti alla trasmissione del calore vale:

$$R = \frac{1}{A}\left(\frac{s}{\lambda} + \frac{1}{h_e}\right) = 1.717 \text{ °C/W}$$

La potenza termica trasferita tra ambiente esterno ed ambiente interno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_e - T_i)}{R} = 16.3 \text{ W}$$

Il volume iniziale della sostanza ghiacciata nel frigocontenitore è pari a:

$$V_g = (L_1 - 2 \cdot s)(L_2 - 2 \cdot s)(L_3 - 2 \cdot s) = 0.30 \cdot 0.30 \cdot 0.15 = 0.0135 \text{ m}^3$$

La massa complessiva è quindi pari a:

$$m_g = \rho_g V_g = 12.4 \text{ kg}$$

In conclusione, il tempo di liquefazione vale:

$$t = \frac{c_g m_g}{\dot{Q}} = \frac{334 \cdot 10^3 \cdot 12.4}{16.3} = 2.513 \cdot 10^5 \text{ s} \cong 70 \text{ h}$$

– *Commenti*

Tra ghiaccio e pareti del contenitore esiste sicuramente una resistenza termica di interfaccia, legata alle sottili intercapedini d'aria che sono verosimilmente presenti. Inoltre, per effetto dell'aumento di densità (ovvero della diminuzione di volume) durante la transizione solido/liquido, è verosimile che le suddette intercapedini aumentino sensibilmente di spessore su alcune delle superfici interne del frigocontenitore, incrementando così le relative resistenze termiche (in maniera differenziata). Assumere la temperatura sulle superfici interne pari alla temperatura di liquefazione del ghiaccio significa trascurare le resistenze termiche di interfaccia, il che consente di semplificare notevolmente i calcoli e, al contempo, di operare in favore di sicurezza.