

ESERCIZI UNITA' G – SOMMARIO

G. CONDUZIONE IN REGIME NON STAZIONARIO

G.I. Filo di rame immerso in acqua e in aria

G.II. Inerzia termica di un sensore

G.III. Trattamento termico

G.IV. Riscaldamento di una bibita in lattina

G.V. Tempo di risposta di un sensore

G.VI. Tempo di risposta di un sensore (2)

G.VII. Monitoraggio di un processo industriale

G.VIII. Monitoraggio di un processo industriale (2)

G.I. Filo di rame immerso in acqua e in aria

– Problema

Determinare la temperatura di un filo di rame con diametro 0.8 mm, inizialmente a 170°C, dopo 20 s e 40 s dalla sua immersione in acqua a 38°C, assumendo un valore del coefficiente di scambio termico convettivo sulla superficie del filo pari a 90 W/(m²·°C). Determinare inoltre la temperatura dello medesimo filo di rame dopo 20 s e 40 s dalla sua immersione in aria alla stessa temperatura precedentemente considerata di 38°C, assumendo in questo caso un valore del coefficiente di scambio termico convettivo superficiale pari a 12 W/(m²·°C).

Le proprietà del rame sono le seguenti: conduttività termica $\lambda = 375 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$, densità $\rho = 8940 \text{ kg/m}^3$, calore specifico $c = 380 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$.

– Dati

- $D = 0.8 \text{ mm} = 0.0008 \text{ m}$ (diametro del filo di rame)
- $T_0 = 170^\circ\text{C}$ (temperatura iniziale del filo di rame)
- $T_\infty = 38^\circ\text{C}$ (temperatura del fluido, acqua o aria)
- $h_w = 90 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$ (coefficiente di convezione in acqua)
- $h_a = 12 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$ (coefficiente di convezione in acqua)
- $\lambda = 375 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$ (conduttività termica del rame)
- $\rho = 8940 \text{ kg/m}^3$ (densità del rame)
- $c = 380 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$ (calore specifico del rame)

– Determinare

- $T_{20,w} = T(t = 20 \text{ s}), T_{40,w} = T(t = 40 \text{ s})$ (in acqua)
- $T_{20,a} = T(t = 20 \text{ s}), T_{40,a} = T(t = 40 \text{ s})$ (in aria)

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, effetti d'estremità trascurabili, effetti radiativi trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo.

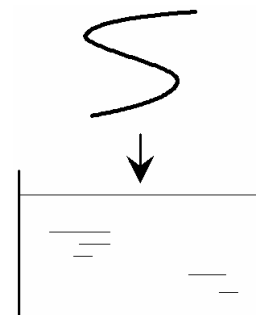
– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nel filo durante il transitorio termico, occorre stimare il numero di Biot. A tal scopo, è necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, data dal rapporto tra volume di materiale interessato ed area della superficie di scambio termico. Nel caso in esame, assegnando al filo una generica lunghezza L (in effetti non nota), si ottiene che la lunghezza caratteristica del filo, L_c , vale:

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{(\pi D^2/4)L}{\pi DL} = \frac{D}{4} = 0.0002 \text{ m}$$

Si sono trascurati gli scambi termici sulle due superfici di estremità del filo, ipotesi ragionevole in virtù del rapporto verosimilmente elevato tra diametro e lunghezza del filo stesso.

Il numero di Biot nel caso di immersione in acqua vale



$$Bi_w = \frac{h_w L_c}{\lambda} = \frac{90 \cdot 0.0002}{375} = 4.8 \cdot 10^{-5} \ll 1$$

mentre, nel caso di immersione in aria, vale

$$Bi_a = \frac{h_a L_c}{\lambda} = \frac{12 \cdot 0.0002}{375} = 6.4 \cdot 10^{-6} \ll 1$$

In entrambe le situazioni, il valore calcolato è molto minore dell'unità, il che consente di ritenere accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura nel filo. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati, impiegando la relazione:

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-t/t_c}$$

Nella relazione compare un tempo caratteristico t_c del problema, che vale, nel caso di immersione in acqua,

$$t_c = \frac{\rho c V}{h_w A} = \frac{\rho c L_c}{h_w} = \frac{8940 \cdot 380 \cdot 0.0002}{90} = 7.5 \text{ s}$$

mentre, nel caso di immersione in aria, vale

$$t_c = \frac{\rho c L_c}{h_a} = \frac{8940 \cdot 380 \cdot 0.0002}{12} = 56.6 \text{ s}$$

Infine, la temperatura del filo di rame agli istanti considerati vale, in acqua

$$T_{20,w} = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-20/t_{c,w}} = 38 + (170 - 38) \cdot e^{-20/7.5} = 47.3 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{40,w} = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-40/t_{c,w}} = 38 + (170 - 38) \cdot e^{-40/7.5} = 38.7 \text{ }^\circ\text{C}$$

e in aria

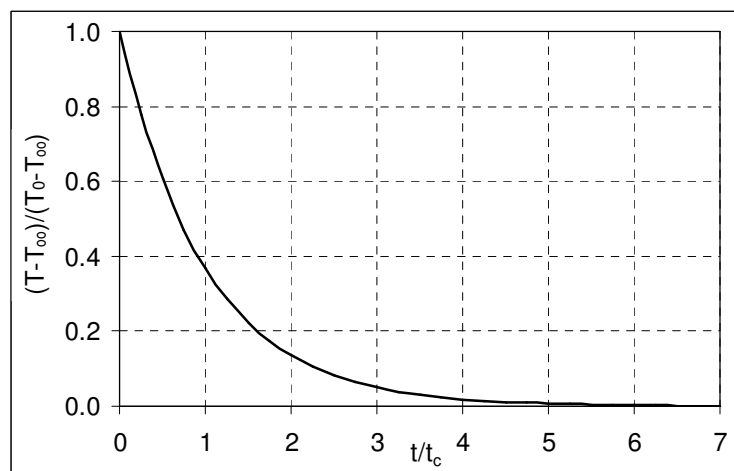
$$T_{20,a} = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-20/t_{c,a}} = 38 + (170 - 38) \cdot e^{-20/56.6} = 130.7 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{40,w} = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-40/t_{c,a}} = 38 + (170 - 38) \cdot e^{-40/56.6} = 103.1 \text{ }^\circ\text{C}$$

- Commenti

Il filo di rame potrebbe essere quello di una termocoppia (ad esempio, del tipo rame-costantana o ferro-costantana), che presenta quindi un ritardo nella risposta non trascurabile, specialmente se impiegata per misure di temperatura in aria.

Il tempo caratteristico t_c è quello in cui la differenza di temperatura tra corpo immerso e fluido scende ad una frazione pari ad $1/e$ ($\approx 37\%$) del suo valore iniziale. Dopo un tempo pari a tre volte e cinque volte t_c , la differenza di temperatura scende, rispettivamente, al 5% e all'1% del valore iniziale (vedi grafico a lato).



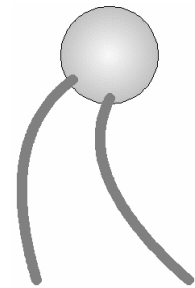
G.II. Inerzia termica di un sensore

– Problema

La giunzione di una termocoppia per misure di temperatura in aria è essenzialmente costituita da una sfera di saldatura con diametro 1.8 mm in lega metallica bassofondente. La lega metallica presenta conduttività termica 60 W/(m·°C), densità 7500 kg/m³ e calore specifico 240 J/(kg·°C). Se la giunzione di misura della termocoppia, inizialmente a 25°C, viene immersa in una corrente d'aria calda a 250°C, determinare dopo quanto tempo la temperatura misurata differirà da quella della corrente d'aria calda per meno di 2°C. A tal scopo, si trascuri la presenza dei fili della termocoppia e si assuma un coefficiente di convezione pari a 30 W/(m²·°C).

– Dati

- D = 1.8 mm = 0.0018 m (diametro della giunzione di misura)
- T₀ = 25°C (temperatura iniziale della giunzione)
- T_∞ = 250°C (temperatura della corrente d'aria calda)
- ΔT = 2°C (differenza di temperatura finale)
- λ = 60 W/(m·°C) (conduttività termica del materiale di saldatura)
- ρ = 7500 kg/m³ (densità del materiale di saldatura)
- c = 240 J/(kg·°C) (calore specifico del materiale di saldatura)
- h = 30 W/(m²·°C) (coefficiente di convezione)



– Determinare

- Δt (tempo per raggiungere la massima differenza di temperatura ammessa)

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, effetti dei fili della termocoppia trascurabili, effetti radiativi trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nella giunzione sferica durante il transitorio occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, che nel caso in esame vale:

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}{4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{D}{6} = 0.0003 \text{ m}$$

Si sono trascurati, in favore di sicurezza, gli scambi termici attraverso i fili della termocoppia e le loro superfici. Il numero di Biot vale quindi:

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = \frac{30 \cdot 0.0003}{60} = 1.5 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

Poiché Bi è molto minore dell'unità, è accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura nella giunzione sferica. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati.

Il tempo caratteristico del problema, t_c , vale:

$$t_c = \frac{\rho c V}{hA} = \frac{\rho c L_c}{h} = \frac{7500 \cdot 240 \cdot 0.0003}{30} = 18 \text{ s}$$

La temperatura misurata dal sistema di acquisizione dati a cui è collegata la termocoppia è quella della giunzione sferica. Una volta che tale giunzione viene immersa nella corrente d'aria da monitorare, la sua temperatura non varia istantaneamente, ma aumenta a poco a poco, fino a portarsi asintoticamente alla temperatura dell'aria. Stabilita la deviazione ΔT massima ammissibile della misura dal valore reale (in questo caso pari a 2°C), il tempo di risposta Δt che si vuole stimare è quello in cui la giunzione di misura raggiunge una temperatura pari a:

$$T_m = T_\infty - \Delta T = 250 - 2 = 248 \text{ }^\circ\text{C}$$

La stima si può effettuare esplicitando Δt nella relazione seguente:

$$T_m = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-\Delta t/t_c}$$

Si ottiene così:

$$\Delta t = -t_c \ln\left(\frac{T_m - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = -18 \cdot \ln\left(\frac{248 - 250}{25 - 250}\right) = 85 \text{ s}$$

– Commenti

Il tempo di risposta è largamente superiore al minuto. La termocoppia considerata è sicuramente poco adatta a monitorare transitori termici veloci.

G.III. Trattamento termico

– Problema

Un semilavorato in rame con massa 320 g e superficie esterna 45 cm^2 , inizialmente a 800°C , viene sottoposto ad un trattamento termico che prevede un rapido raffreddamento mediante immersione in una vasca di olio, in cui la temperatura è stabilizzata a 20°C . Determinare il coefficiente di convezione minimo da realizzare, ad esempio mediante agitazione dell'olio, per abbassare di 650°C in un minuto la temperatura del semilavorato.

Le proprietà del rame sono le seguenti: conduttività termica $\lambda = 375 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, densità $\rho = 8940 \text{ kg}/\text{m}^3$, calore specifico $c = 380 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$.

– Dati

- $m = 320 \text{ g} = 0.320 \text{ kg}$ (massa del semilavorato in rame)
- $A = 45 \text{ cm}^2 = 0.0045 \text{ m}^2$ (superficie esposta del semilavorato)
- $T_0 = 800^\circ\text{C}$ (temperatura iniziale del semilavorato)
- $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ (temperatura dell'olio)
- $\Delta T = 650^\circ\text{C}$ (variazione di temperatura nel raffreddamento)
- $\Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ (tempo di raffreddamento)

- $\lambda = 375 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$ (conduttività termica del rame)
- $\rho = 8940 \text{ kg/m}^3$ (densità del rame)
- $c = 380 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$ (calore specifico del rame)

– Determinare

- h (coefficiente di convezione)

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, effetti radiativi trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo.

– Soluzione

Poiché il coefficiente di convezione è incognito, non è possibile procedere ad una valutazione preliminare del numero di Biot. Tuttavia, si può ipotizzare ammissibile uno studio a parametri concentrati e verificare a posteriori la validità di tale ipotesi.

Il coefficiente di convezione è incluso nel tempo caratteristico del problema, t_c , che si può stimare esplicitandolo nella relazione:

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-\Delta t/t_c}$$

Considerando che la temperatura al termine del raffreddamento, T_r , vale:

$$T_r = T_0 - \Delta T = 800 - 650 = 150 \text{ °C}$$

si ottiene

$$t_c = -\frac{\Delta t}{\ln\left(\frac{T_r - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right)} = -\frac{60}{\ln\left(\frac{150 - 20}{800 - 20}\right)} = 33.5 \text{ s}$$

Per determinare il coefficiente di convezione a partire da t_c , è poi necessario calcolare il volume del semilavorato è, quindi, la lunghezza caratteristica del problema:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.320}{8940} = 3.58 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$L_c = \frac{V}{A} = 7.95 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Si ricava così che il coefficiente di convezione minimo da realizzare vale:

$$h = \frac{\rho c L_c}{t_c} = \frac{8940 \cdot 380 \cdot 7.95 \cdot 10^{-3}}{33.5} = 807 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$$

È infine necessario verificare la validità dello studio a parametri concentrati:

$$Bi = \frac{h L_c}{\lambda} = \frac{807 \cdot 7.95 \cdot 10^{-3}}{375} = 0.031 \ll 1$$

– Commenti

Il coefficiente di convezione richiesto, seppure elevato, può essere conseguito con relativa facilità in un liquido.

G.IV. Riscaldamento di una bibita in lattina

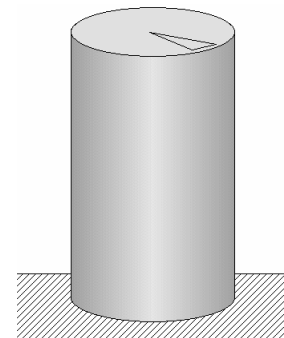
– Problema

Una lattina cilindrica, riempita per il 93% di una bibita a base acqua, presenta diametro 63 mm ed altezza 114 mm. Stimare approssimativamente per quanto tempo la bibita, dopo essere stata prelevata da un frigorifero a 9°C ed appoggiata verticalmente su un tavolo posto in un ambiente a 30°C, si mantiene ad una temperatura inferiore a quella massima gradevole, assunta pari a 15°C.

Il valore del coefficiente di convezione superficiale si può valutare pari a 5 W/(m²·°C). Al liquido, che rimane fermo nella lattina e può essere perciò assimilato ad una sostanza solida, si possono attribuire le proprietà termofisiche dell’acqua alla temperatura considerata: conduttività termica $\lambda = 0.59$ W/(m·°C), densità $\rho = 1000$ kg/m³, calore specifico $c = 4190$ J/(kg·°C). Volume e capacità termica del recipiente metallico sono trascurabili in virtù del ridottissimo spessore di parete.

– Dati

- D = 63 mm = 0.063 m (diametro della lattina)
- H = 114 mm = 0.114 m (altezza della lattina)
- C_r = 93% = 0.93 (coefficiente di riempimento in volume)
- T₀ = 9°C (temperatura iniziale della bibita)
- T_∞ = 30°C (temperatura ambiente)
- T_{max} = 15°C (temperatura massima gradevole)
- $\lambda = 0.59$ W/(m·°C) (conduttività termica dell’acqua)
- $\rho = 1000$ kg/m³ (densità dell’acqua)
- c = 4190 J/(kg·°C) (calore specifico dell’acqua)
- h = 5 W/(m²·°C) (coefficiente di convezione)



– Determinare

- t_r (tempo per raggiungere la massima temperatura gradevole)

– Ipotesi

Liquido fermo, proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, effetti radiativi trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo, capacità termica del recipiente metallico trascurabile, superficie inferiore termicamente isolata.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nella lattina durante il transitorio occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario calcolare il volume del liquido, la superficie esposta all’aria della lattina e, quindi, la lunghezza caratteristica del problema.

Il volume del liquido vale:

$$V = C_r \pi \frac{D^2}{4} H = 0.93 \cdot \pi \cdot \frac{0.063^2}{4} \cdot 0.114 = 3.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 33 \text{ cl}$$

Dato il loro piccolo spessore, si è trascurata la presenza delle pareti metalliche del recipiente.

Nel calcolo della superficie su cui hanno luogo gli scambi termici convettivi, si può assumere che la base di appoggio della lattina sia termicamente isolata. Si potrebbe considerare tale anche la superficie superiore, sotto la quale il gas contenuto nel recipiente (7% in volume) va a raccogliersi e a formare uno strato stagnante a ridotta conducibilità termica, ma, nel caso in esame trascurare l'effetto isolante dell'aria permette di operare in favore di sicurezza (sovrastimando la superficie di scambio, si sovrastima infatti anche la velocità di raffreddamento). In definitiva, la superficie di scambio vale:

$$A \cong \pi \frac{D^2}{4} + \pi DH = \pi \frac{0.063^2}{4} + \pi \cdot 0.063 \cdot 0.114 = 0.0257 \text{ m}^2$$

La lunghezza caratteristica del problema ed il numero di Biot valgono:

$$L_c = \frac{V}{A} = 0.0129 \text{ m}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = \frac{5 \cdot 0.0129}{0.59} = 0.11$$

Bi è minore dell'unità, ma non del valore limite sotto il quale si assumono generalmente valide le analisi a parametri concentrati, pari a 0.1. Si può tuttavia pensare di procedere ugualmente nello studio, in virtù del fatto che non si è molto distanti dal suddetto valore limite e che, comunque, si vuole effettuare solo una stima approssimativa del tempo di riscaldamento.

Il tempo caratteristico del problema, t_c , vale:

$$t_c = \frac{\rho c L_c}{h} = \frac{1000 \cdot 4190 \cdot 0.0129}{5} = 10785 \text{ s}$$

Il periodo di tempo Δt durante il quale la temperatura si mantiene sotto il valore considerato massimo gradevole si può effettuare esplicitandolo nella relazione:

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-\Delta t/t_c}$$

Si ottiene così:

$$\Delta t = -t_c \ln \left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right) = -10785 \cdot \ln \left(\frac{15 - 30}{9 - 30} \right) = 3629 \text{ s} \cong 60 \text{ min}$$

– Commenti

In realtà, il coefficiente di convezione esterno è stato leggermente sottostimato.

Si può agevolmente verificare che la presenza del recipiente metallico della bibita è pressoché ininfluenza. Infatti, assumendo che il recipiente sia realizzato in lega di alluminio, con conducibilità termica $170 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$, densità $2790 \text{ kg}/\text{m}^3$ e calore specifico $880 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$, e che presenti una massa pari a 30 g, la sua capacità termica rappresenta una frazione della capacità termica del liquido valutabile mediante il rapporto:

$$\frac{\rho_{Al} c_{Al} V_{Al}}{\rho c V} \cong \frac{c_{Al} m_{Al}}{\rho c V} = \frac{880 \cdot 0.020}{1000 \cdot 4190 \cdot 3.3 \cdot 10^{-4}} = 0.019 < 2\%$$

Inoltre, assumendo uno spessore s_{Al} della parete del recipiente pari a 0.4 mm ed un coefficiente di scambio termico convettivo lato liquido, $h_{liquido}$, pari a circa $100 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, si ottiene un coefficiente globale di scambio tra liquido e aria pari a:

$$h_{globale} = \frac{1}{1/h + s_{Al}/k_{Al} + 1/h_{liquido}} = 4.8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}) \approx 5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

G.V. Tempo di risposta di un sensore

– Problema

Si stimi il tempo di risposta t_{99} di un sensore per misure di temperature in aria, inteso come il tempo dall'immersione del sensore nella corrente d'aria monitorata dopo il quale la differenza di temperatura tra sensore e aria si è ridotta all'1% del valore iniziale. Il sensore è costituito da un sfera con diametro 1.2 mm, realizzata in un materiale con conduttività termica 120 W/(m·°C), densità 4500 kg/m³ e calore specifico 750 J/(kg·°C). Inoltre, il coefficiente di adduzione (ovvero il coefficiente di scambio termico inclusivo degli effetti convettivi e radiativi) sulla superficie del sensore è pari a 90 W/(m²·°C).

– Dati

- D = 1.2 mm = 0.0012 m (diametro della sfera)
- $\lambda = 120$ W/(m·°C) (conduttività termica)
- $\rho = 4500$ kg/m³ (densità massica)
- $c = 750$ J/(kg·°C) (calore specifico)
- $h_{TOT} = 90$ W/(m²·°C) (coefficiente di adduzione)
- $\Delta T_{99}/\Delta T_0 = 1\% = 0.01$ (definizione)

– Determinare

Tempo di risposta t_{99}

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di adduzione uniforme, effetti degli eventuali fili di connessione del sensore trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nel sensore durante il transitorio occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, che nel caso in esame vale (vedi Es.G.II):

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3}{4\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{D}{6} = 0.0002 \text{ m}$$

Si sono trascurati, in favore di sicurezza, gli scambi termici attraverso i (necessariamente presenti) fili del sensore e le loro superfici esposte. Il numero di Biot vale quindi:

$$Bi = \frac{h_{TOT} L_c}{\lambda} = \frac{90 \cdot 0.0002}{120} = 1.5 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

Si noti che con il coefficiente di adduzione h_{TOT} si integrano in una sola grandezza i fenomeni di convezione e irraggiamento. Poiché Bi è molto minore dell'unità, è accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati.

Il tempo caratteristico del problema, t_c , vale:

$$t_c = \frac{\rho c V}{h_{TOT} A} = \frac{\rho c L_c}{h_{TOT}} = \frac{4500 \cdot 750 \cdot 0.0002}{90} = 7.5 \text{ s}$$

Una volta che il sensore viene immerso nella corrente d'aria, la sua temperatura non varia istantaneamente, ma aumenta a poco a poco, fino a portarsi asintoticamente alla temperatura dell'aria. Data la differenza di temperatura massima ammissibile tra sensore e corrente d'aria, pari all'1% del valore iniziale (a cui corrisponde un abbattimento pari al 99% della differenza iniziale), il tempo di risposta che si vuole stimare è quello per cui si ha (vedi Es.G.II)

$$\Delta T_{99} / \Delta T_0 = e^{-t_{99}/t_c}$$

ovvero

$$t_{99} = -t_c \ln(\Delta T_{99} / \Delta T_0) = -7.5 \cdot \ln(0.01) = 35.5 \text{ s}$$

– Commenti

Dalla definizione del tempo di risposta si può desumere che esso è indipendente dalle temperature in gioco, ma solo se non si hanno variazioni né delle proprietà termofisiche dei materiali (ragionevole per escursioni di temperatura non troppo ampie), né del coefficiente di scambio termico superficiale (ragionevole, con qualche cautela in più, per escursioni di temperatura ridotte e condizioni di lavoro ben definite e facilmente ripetibili come, ad esempio, l'immersione del sensore in aria o in un liquido in quiete).

G.VI. Tempo di risposta di un sensore (2)

– Problema

Si stimi il tempo di risposta t_{999} di un sensore per misure di temperatura in liquido, inteso come il tempo dall'immersione del sensore nel liquido dopo il quale la differenza di temperatura tra i due si è ridotta all'1‰ (uno per mille) del valore iniziale. Il sensore è costituito da una piastrina con dimensioni 2 mm x 2 mm x 0.5 mm, realizzata in un materiale con conduttività termica 2.5 W/(m·°C), densità 1800 kg/m³ e calore specifico 850 J/(kg·°C). Inoltre, il coefficiente di convezione sulla superficie del sensore si può stimare pari a 40 W/(m²·°C).

– Dati

- $L_1 = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}$ (dimensione del sensore)
- $L_2 = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}$ (dimensione del sensore)
- $L_3 = 0.5 \text{ mm} = 0.0005 \text{ m}$ (spessore)
- $\lambda = 2.5 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$ (conduttività termica)
- $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$ (densità massica)
- $c = 850 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$ (calore specifico)
- $h = 40 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$ (coefficiente di convezione)
- $\Delta T_{999} / \Delta T_0 = 1\text{‰} = 0.001$ (definizione)

– Determinare

Tempo di risposta t_{999}

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, effetti degli eventuali fili di connessione del sensore trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nel sensore durante il transitorio occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, che nel caso in esame vale (vedi Es.G.II):

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{L_1 L_2 L_3}{2 \cdot (L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} = 0.000167 \text{ m}$$

Si sono trascurati, in favore di sicurezza, gli scambi termici attraverso i (necessari) fili del sensore e le loro superfici esposte. Il numero di Biot vale quindi:

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = \frac{40 \cdot 0.000167}{2.5} = 0.00267 \ll 1$$

Poiché Bi è molto minore dell'unità, è accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati.

Il tempo caratteristico del problema, t_c , vale:

$$t_c = \frac{\rho c L_c}{h} = \frac{1800 \cdot 850 \cdot 0.000167}{40} = 6.38 \text{ s}$$

Una volta che il sensore viene immerso nel liquido, la sua temperatura varia a poco a poco, fino a portarsi asintoticamente alla temperatura del liquido. Data la differenza di temperatura massima ammissibile tra sensore e liquido, pari all'uno per mille del valore iniziale (a cui corrisponde un abbattimento pari al 999‰ della differenza iniziale), il tempo di risposta che si vuole stimare è quello per cui si ha (vedi Es.G.II)

$$\Delta T_{999} / \Delta T_0 = e^{-t_{999}/t_c}$$

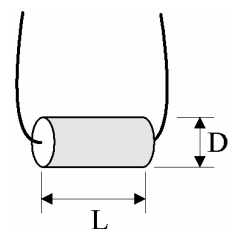
ovvero

$$t_{999} = -t_c \cdot \ln(\Delta T_{999} / \Delta T_0) = -6.38 \cdot \ln(0.001) = 44 \text{ s}$$

G.VII. Monitoraggio di un processo industriale

– Problema

Un sensore come in figura, caratterizzato da $L = 20 \text{ mm}$, $D = 4 \text{ mm}$, $\lambda = 5.2 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}$, $c = 1800 \text{ J/(kg} \cdot \text{°C)}$ e $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$, serve a monitorare le temperature in un processo industriale. Il sensore viene ciclicamente estratto da una sostanza alimentare con una temperatura inizialmente uguale a quella della sostanza stessa, pari a 85 °C , e lasciato esposto per circa 4 min all'aria ambiente a 31 °C , con coefficiente di adduzione pari a $12 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$, quindi viene immerso di nuovo nella sostanza, in cui si ha un coefficiente di convezione $90 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$.



Determinare la temperatura del sensore immediatamente prima di essere immerso nella sostanza. Determinare inoltre il tempo dall'immersione dopo il quale si ha:

$$|T_{\text{sensore}} - T_{\text{sostanza}}| < 1^\circ\text{C}$$

– Dati

- L = 20 mm = 0.020 m (sviluppo longitudinale del sensore)
- D = 4 mm = 0.004 m (diametro del sensore)
- $\lambda = 5.2 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ (conduttività termica)
- c = 1800 J/(kg·°C) (calore specifico)
- $\rho = 1500 \text{ kg}/\text{m}^3$ (densità massica)
- $T_1 = T_{\text{sost}} = 85^\circ\text{C}$ (temperatura della sostanza alimentare)
- $T_a = 31^\circ\text{C}$ (temperatura dell'aria)
- $t_{12} = 4 \text{ min} = 240 \text{ s}$ (tempo di esposizione all'aria)
- $h_{12} = 12 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$ (coefficiente di adduzione in aria)
- $\Delta T = |T_3 - T_{\text{sost}}| \leq 1^\circ\text{C}$ (vedi testo)
- $h_{23} = 90 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$ (coefficiente di convezione in liquido)

– Determinare

Temperatura T_2 del sensore dopo un tempo t_{12} di esposizione all'aria dopo l'estrazione dalla sostanza alimentare

Tempo t_{23} dopo l'immersione nella sostanza alimentare necessario a che si raggiunga una differenza di temperatura tra sostanza e sensore inferiore a ΔT

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico uniformi, effetti degli eventuali fili di connessione del sensore trascurabili, tempi di estrazione e di immersione pressoché nulli.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nel sensore durante i transitori occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, che nel caso in esame vale (vedi Es.G.II):

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{\pi \cdot (D/2)^2 H}{\pi \cdot DH + 2\pi \cdot (D/2)} = \frac{D}{6} = 0.00091 \text{ m}$$

Si sono trascurati, in favore di sicurezza, gli scambi termici attraverso i fili del sensore (necessariamente presenti) e le loro superfici esposte, mentre si sono tenute in considerazione le due superfici circolari di estremità. Il numero di Biot nel primo transitorio vale quindi:

$$Bi_{12} = \frac{h_{12} L_c}{\lambda} = \frac{12 \cdot 0.00091}{5.2} = 0.0021 \ll 1$$

Poiché Bi_{12} è molto minore dell'unità, è accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura nel sensore. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati. Il tempo caratteristico del problema, $t_{c,12}$, vale:

$$t_{c,12} = \frac{\rho c L_c}{h_{12}} = \frac{1500 \cdot 1800 \cdot 0.00091}{12} = 205 \text{ s}$$

Una volta che il sensore viene estratto dalla sostanza alimentare e lasciato esposto all'aria, la sua temperatura non varia istantaneamente, ma diminuisce a poco a poco, fino a portarsi

asintoticamente alla temperatura dell'aria. La sua temperatura dopo un tempo t_{12} è valutabile mediante la relazione:

$$T_2 = T_a + (T_1 - T_a) \cdot e^{-\frac{t_{12}}{t_{c,12}}} = 47.7^\circ\text{C}$$

A questo punto il sensore viene nuovamente immerso nella sostanza alimentare e la sua temperatura aumenta a poco a poco, fino a portarsi asintoticamente alla temperatura T_s della sostanza stessa. Il numero di Biot in questo secondo transitorio vale:

$$Bi_{23} = \frac{h_{23}L_c}{\lambda} = \frac{90 \cdot 0.00091}{5.2} = 0.0157 \ll 1$$

Anche in questo caso, poiché Bi_{23} è molto minore dell'unità, è accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura nel sensore. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati. Il tempo caratteristico del problema, $t_{c,23}$, vale:

$$t_{c,23} = \frac{\rho c L_c}{h_{23}} = \frac{1500 \cdot 1800 \cdot 0.00091}{90} = 27 \text{ s}$$

Data la differenza di temperatura massima ammissibile tra sensore e corrente d'aria, pari a 1°C , il tempo di risposta che si vuole stimare è quello per cui la temperatura del sensore, che aumenta progressivamente, raggiunge un valore:

$$T_3 = T_s - \Delta T = 84^\circ\text{C}$$

In conclusione, si ha che

$$\frac{T_3 - T_s}{T_2 - T_s} \equiv \frac{\Delta T}{T_s - T_2} = e^{-t_{23}/t_{c,23}}$$

ovvero

$$t_{23} = -t_{c,23} \cdot \ln\left(\frac{T_3 - T_s}{T_2 - T_s}\right) = 98.7 \text{ s}$$

– Commenti

La stima coefficiente di convezione è tipicamente ottenuta tramite relazioni empiriche che presentano un margine di incertezza sul valore stimato raramente è inferiore al 20%. Di ciò va tenuto debitamente conto nei calcoli tecnici, ad esempio adottando opportuni coefficienti di sicurezza.

G.VIII. Monitoraggio di un processo industriale (2)

– Problema

Un dispositivo elettronico con volume e massa ridottissimi è posto in un ambiente a temperatura 40°C , in cui può essere di tanto in tanto investito, per un periodo di tempo mai superiore a un minuto, da un getto di vapore a temperatura 120°C . A causa di ciò, si rende necessario aumentare l'inerzia termica del dispositivo inglobandolo in una sfera di acciaio ($\lambda = 16.5 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, $c = 500 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$, $\rho = 7800 \text{ kg}/\text{m}^3$).

Assumendo che l'insieme sia inizialmente a temperatura ambiente e stimando che il coefficiente di convezione sulla superficie della sfera, quando questa è investita dal vapore,

sia pari a $80 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, calcolare il diametro minimo che la sfera deve avere perché il dispositivo in essa inglobato non superi mai la sua temperatura massima ammissibile, pari a 60°C . Inoltre, stimare in quanto tempo, dopo che il getto di vapore si è interrotto, la temperatura dell'insieme dispositivo/sfera scende dal massimo ammissibile ad un valore che non si scosti per più di 0.5°C dal valore ambiente, stimando in tal caso un coefficiente di scambio termico superficiale pari a $15 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$.

– Dati

- $T_1 = T_{\text{amb}} = 40^\circ\text{C}$ (temperatura ambiente e iniziale)
- $T_v = 120^\circ\text{C}$ (temperatura del vapore)
- $t_{12} = t_{v,\text{max}} = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ (tempo di massima esposizione ad un getto di vapore)
- $\lambda = 16.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ (conduttività termica)
- $c = 500 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ (calore specifico)
- $\rho = 7800 \text{ kg}/\text{m}^3$ (densità masicca)
- $h_{12} = 80 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ (coefficiente di convezione durante l'esposizione al getto)
- $T_2 = T_{s,\text{max}} = 60^\circ\text{C}$ (temperatura massima ammissibile)
- $\Delta T = |T_3 - T_{\text{amb}}| = |T_3 - T_1| \leq 0.5^\circ\text{C}$ (vedi testo)
- $h_{23} = 15 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ (coefficiente di scambio termico in aria)

– Determinare

Diametro D dell'involucro sferico atto ad impedire che il dispositivo superi la massima temperatura ammessa durante un getto di vapore di durata massima

Tempo t_{23} per scendere ad una differenza di temperatura ΔT da valore ambiente dopo la fine di un getto di vapore di durata massima

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi, effetti degli eventuali fili di connessione del dispositivo trascurabili.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nell'insieme dispositivo/sfera durante i transitori, occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, che nel caso in esame vale (vedi Es.G.II):

$$L_c = \frac{V}{A} = \frac{(4/3)\pi \cdot (D/2)^3}{4\pi \cdot (D/2)^2} = \frac{D}{6}$$

Si sono trascurati, in favore di sicurezza, gli scambi termici attraverso i (necessariamente presenti) fili del dispositivo e le loro superfici esposte e, per ipotesi, la massa termica del dispositivo stesso, inglobato all'interno della sfera.

Il diametro della sfera è incognito, ma si può ipotizzare che il numero di Biot assuma un valore accettabile ed effettuare una verifica di tale ipotesi a posteriori.

Una volta che l'insieme dispositivo/sfera viene investito dal getto di vapore, la sua temperatura non varia istantaneamente, ma aumenta a poco a poco, e tende asintoticamente alla temperatura del vapore. Perché essa non superi il valore massimo ammesso prima di un

periodo temporale t_{12} (quello di massima durata di un getto di vapore), il tempo caratteristico $t_{c,12}$ deve essere tale che:

$$T_2 = T_v + (T_1 - T_v) \cdot e^{-\frac{t_{12}}{t_{c,12}}} = 60^\circ\text{C}$$

ovvero

$$t_{c,12} = -t_{12} \cdot \ln\left(\frac{T_2 - T_v}{T_1 - T_v}\right) = 209 \text{ s}$$

Il tempo caratteristico è definito come segue:

$$t_{c,12} = \frac{\rho c L_c}{h_{12}} \equiv \frac{\rho c D}{6 \cdot h_{12}}$$

Pertanto, per impedire che il dispositivo superi la massima temperatura ammessa durante un getto di vapore di durata massima, la sfera deve presentare diametro pari a:

$$D = \frac{6 \cdot h_{12} t_{c,12}}{\rho c} = \frac{6 \cdot 80 \cdot 209}{7800 \cdot 500} = 0.0257 \text{ m} = 25.7 \text{ mm}$$

Il numero di Biot nel transitorio vale:

$$Bi_{12} = \frac{h_{12} L_c}{\lambda} = \frac{h_{12} D}{6 \cdot \lambda} = \frac{80 \cdot 0.0257}{6 \cdot 16.5} = 0.0207 < 0.1$$

Poiché Bi_{12} è molto minore dell'unità, l'ipotesi di uniformità della temperatura nella sfera è accettabile. Pertanto, i risultati ottenuti mediante analisi a parametri concentrati sono da ritenersi attendibili.

Avendo dimensionato la sfera come precedentemente illustrato, l'insieme dispositivo-sfera, dopo essere stato investito da un getto di vapore di durata massima, si troverà a temperatura pari alla massima ammissibile. Per stimare la durata del successivo raffreddamento in aria, è preliminarmente necessario verificare se il valore assunto dal numero di Biot (diverso dal precedente in quanto cambia il coefficiente di scambio termico superficiale) consente ancora un'analisi a parametri concentrati:

$$Bi_{23} = \frac{h_{23} L_c}{\lambda} = \frac{h_{23} D}{6 \cdot \lambda} = \frac{15 \cdot 0.0257}{6 \cdot 16.5} = 0.0039 \ll 1$$

Il risultato era peraltro ovvio, in quanto il coefficiente di scambio termico in aria è molto minore di quello in vapore. Nella fase di raffreddamento, il tempo caratteristico del problema, $t_{c,23}$, vale:

$$t_{c,23} = \frac{\rho c L_c}{h_{23}} = \frac{\rho c D}{6 \cdot h_{23}} = \frac{7800 \cdot 500 \cdot 0.0257}{6 \cdot 15} = 1112.3 \text{ s}$$

Avendo stabilito che il raffreddamento si può considerare completato quando la differenza di temperatura massima ammissibile tra insieme dispositivo-sfera e aria ambiente scende sotto un valore di soglia $\Delta T = 0.5^\circ\text{C}$, il tempo di raffreddamento che si vuole stimare è quello per cui:

$$T_3 = T_a + \Delta T \equiv T_1 + \Delta T = 40.5 \text{ }^\circ\text{C}$$

In conclusione, si ottiene che

$$\frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\Delta T}{T_2 - T_1} = e^{-t_{23}/t_{c,23}}$$

ovvero

$$t_{23} = -t_{c,23} \cdot \ln\left(\frac{\Delta T}{T_2 - T_1}\right) = -1112.3 \cdot \ln\left(\frac{0.5}{60 - 40}\right) = 4103 \text{ s} \cong 68 \text{ min}$$