

# Introduzione ai Sistemi di Controllo

---

## Caratteristiche

---

Fissato un Sistema  $S$ , che genera una grandezza di uscita  $u(t)$  in base alla sollecitazione  $i(t)$ , si definisce *Processo* la successione degli *Stati* attraversati dal sistema per ottenere un particolare risultato finale.

Processo

Nel caso di Sistemi Discreti un processo può essere descritto agevolmente attraverso un *Diagramma degli Stati*, mentre per Sistemi Continui occorre utilizzare un modello matematico.

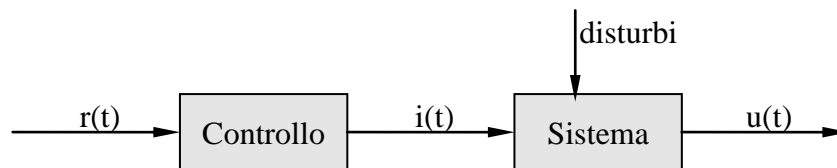
Con il termine *Controllo di Processo* vengono indicate tutte le operazioni necessarie per ottenere nel tempo una sequenza prefissata di valori dalle grandezze del processo, indipendentemente dalla presenza di eventuali fattori esterni incontrollabili che agiscono sul sistema, detti *Disturbi*.

Controllo di  
Processo

I disturbi possono essere dovuti a cause esterne, all'invecchiamento dei componenti, a fenomeni legati al funzionamento stesso del sistema.

L'azione del *Controllo* (o, più precisamente, del *Comando*) viene eseguita da un dispositivo detto, appunto, Sistema di Controllo.

Sistema di  
Controllo



## Tipologie

---

I Sistemi di Controllo si possono dividere in due gruppi:

- *Regolatori*
- *Servomeccanismi*.

I regolatori sono usati quando si desidera che una determinata grandezza che interviene in un processo assuma un valore costante: tale valore viene chiamato *set-point* della variabile (ad esempio il controllo della temperatura di un forno, del livello di un serbatoio, della pressione di una camera iperbarica).

Regolatori

I servomeccanismi permettono di guidare la grandezza di uscita secondo una sequenza prefissata (ad esempio i controlli di posizione nel movimento di un braccio meccanico o nella traiettoria di un missile).

Servo-  
meccanismi

In genere il segnale di uscita del sistema di controllo non è adatto a sollecitare il sistema controllato, sia per incompatibilità di grandezza fisica, sia perché l'uscita di un controllore è di solito assai debole.

È necessario, perciò, introdurre un ulteriore blocco, detto *Attuatore* che abbia la funzione di amplificare l'uscita del controllore, adattandolo nello stesso tempo all'ingresso del sistema controllato.

Attuatore

In molti casi l'attuatore utilizza una *Valvola Proporzionale* comandata da un segnale elettrico a bassa potenza inviato dal circuito elettronico di amplificazione (se necessaria) al circuito oleodinamico.



Per brevità chiameremo, seppur impropriamente, *Valvola* il blocco "amplificatore - adattatore - controllo del flusso di ingresso al sistema".

Occorre precisare che, se il sistema controllato è in genere il più soggetto ad alterazioni di funzionamento, errori più o meno gravi possono colpire anche i dispositivi di controllo.

## Controllo a catena aperta

In un sistema a *Catena Aperta* (o ad *Anello Aperto*) il controllore agisce sul sistema, secondo il valore di riferimento  $r(t)$ , basandosi unicamente sulla relazione conosciuta fra ingresso  $i(t)$  e uscita  $u(t)$ .

Catena Aperta

Se l'output del sistema non è quello desiderato, il sistema di controllo non può in alcun modo accorgersi dell'errore, né tanto meno modificare l'input del sistema. In tal modo la garanzia del risultato è affidata alla precisione del modello matematico ed all'assenza di disturbi.

Questi sistemi vengono utilizzati quando il funzionamento del sistema è abbastanza prevedibile e non è richiesta una particolare precisione dei valori di uscita.

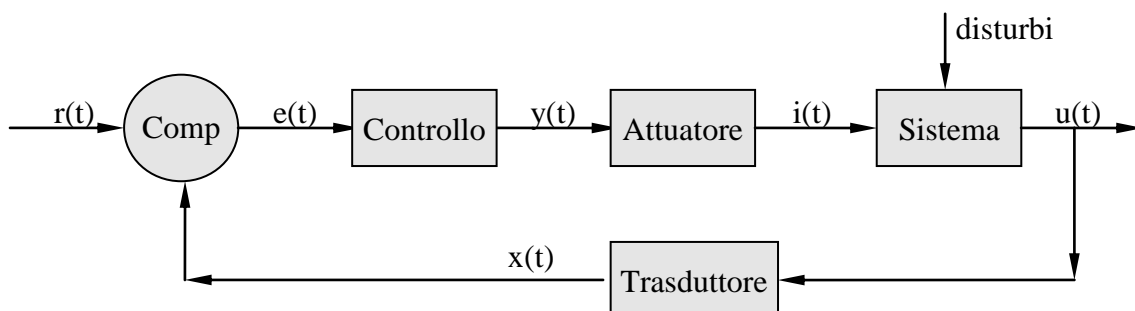
## Controllo a catena chiusa

In un sistema a *Catena Chiusa* (o ad *Anello Chiuso*) l'uscita del sistema da controllare viene continuamente valutata in modo da modificare opportunamente l'ingresso del sistema stesso.

Catena Chiusa

Il ramo di ritorno, da  $u(t)$  al comparatore, viene anche chiamato *feed-back*, o *Ramo di Retroazione*, mentre l'insieme delle due linee costituisce l'*Anello di Regolazione*.

Un sistema di controllo a catena chiusa può essere rappresentato con il seguente schema:



Il *Riferimento*  $r(t)$  è il segnale di riferimento, eventualmente costante, corrispondente all'uscita che si desidera ottenere dal sistema.

Riferimento

Il *Comparatore* è il blocco che confronta il segnale di riferimento con l'uscita del sistema, valutando l'errore assoluto  $e(t) = x(t) - r(t)$ .

Comparatore

L'*errore*  $e(t)$  misura quanto l'uscita del sistema si discosta dal valore desiderato: errore positivo se l'uscita supera il set-point; viceversa negativo. Da precisare che l'errore  $e(t)$  si riferisce alla differenza tra la *Misura* dell'uscita ed il valore di riferimento  $r(t)$ , anche se questa differenza è proporzionale all'errore reale sull'uscita del sistema controllato.

Errore

Il *Controllore* è il dispositivo che, in base all'errore  $e(t)$  e con metodi diversi a seconda del tipo di controllo implementato, elabora un valore  $y(t)$  corrispondente all'ingresso del sistema da controllare.

Controllore

L'*Attuatore* è il blocco che trasforma ed amplifica il segnale  $y(t)$ , in modo da generare un'opportuna sollecitazione  $i(t)$  al sistema.

Attuatore

Il *Sistema* controllato può essere un forno, un serbatoio o un qualsiasi processo industriale di cui si voglia controllare una o più variabili.

Sistema

Per semplicità ci riferiremo al caso di una sola variabile, o a variabili che possano essere comunque valutate indipendentemente l'una dalle altre.

Il valore della grandezza controllata  $u(t)$  deve essere misurato e trasformato, poiché in genere non è compatibile direttamente con l'ingresso del comparatore.

Uscita

Il *Trasduttore* è il blocco che trasforma l'uscita del sistema in un segnale  $x(t)$  compatibile con il comparatore, che lo confronterà con il riferimento  $r(t)$  in modo da valutare gli opportuni interventi di correzione sul sistema.

Trasduttore

La misura non riporta quasi mai istantaneamente il valore dell'uscita, ma è soggetta ad un errore sistematico dovuto al tempo necessario per l'acquisizione del valore; fissato un certo valore  $u_1 = u(t_1)$ , il trasduttore registrerà questa misura solo all'istante  $t_2$ : l'intervallo  $t_2 - t_1$  viene detto *Ritardo della Misura*.

I *disturbi* sono fenomeni che alterano il corretto funzionamento del sistema; possono agire anche su altri componenti della catena.

Disturbi

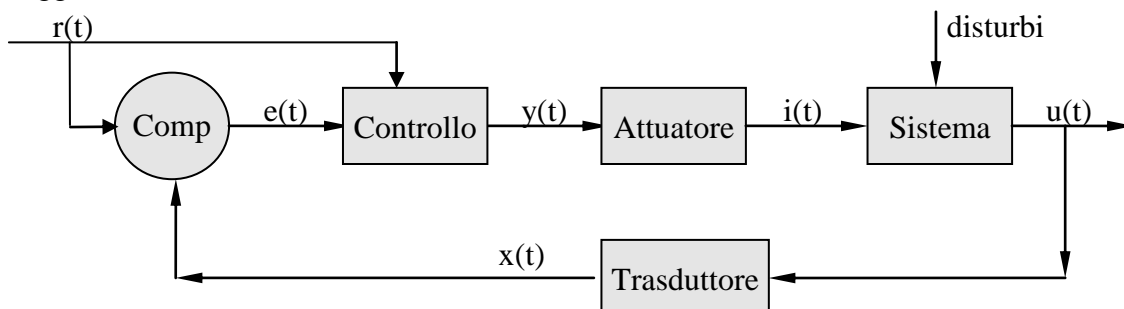
## Controllo di tipo misto

In una catena di regolazione si possono combinare i due metodi precedenti per tendere ad ottenere prestazioni ottimali.

Catena Mista

Il controllore agisce sul sistema, in base al segnale di riferimento, utilizzando il modello matematico del sistema controllato, ovvero in base alla relazione conosciuta tra  $i(t)$  e  $u(t)$ .

Le ulteriori sollecitazioni dovute ai disturbi vengono controllate con l'aggiunta di un anello chiuso.



Ci occuperemo ora dei Regolatori, ovvero dei dispositivi che, basandosi su di un riferimento costante (*set-point*), cercano di stabilizzare una determinata grandezza che interviene in un processo.

Set-Point

Possiamo distinguere due categorie di sistemi:

- quelli in cui l'apertura della valvola tende a diminuire il valore dell'uscita (ad esempio un frigorifero): l'azione sulla valvola avrà pertanto lo stesso segno dell'errore misurato.
- quelli in cui l'apertura della valvola tende ad aumentare il valore dell'uscita (ad esempio un forno): l'azione sulla valvola avrà segno opposto a quello dell'errore misurato.

## Regolazione On-Off

Il regolatore On-Off fa assumere alla variabile  $y(t)$  (valore di ingresso dell'attuatore) due soli valori:  $y_1$  e  $y_2$ , a seconda se l'uscita del sistema oltrepassa in alto o in basso un margine d'errore (detto *gap*) intorno al set-point  $x_s$ .

On-Off

$$\begin{cases} y = y_1 & \text{se } e(t) < -a \\ y = \text{valore precedente} & \text{se } -a \leq e(t) \leq +a \\ y = y_2 & \text{se } e(t) > +a \end{cases}$$

In pratica il controllore On-Off corrisponde ad un atteggiamento del tipo *se è troppo spengo, se è poco accendo* (nel caso del forno).

Il Gap è dovuto alle caratteristiche di costruzione degli elementi della catena ed al ritardo della misura da parte del trasduttore; anche potendo, non è conveniente ridurre eccessivamente il gap giacché si avrebbe un altissimo numero di commutazioni, tali da compromettere il funzionamento del blocco attuatore.

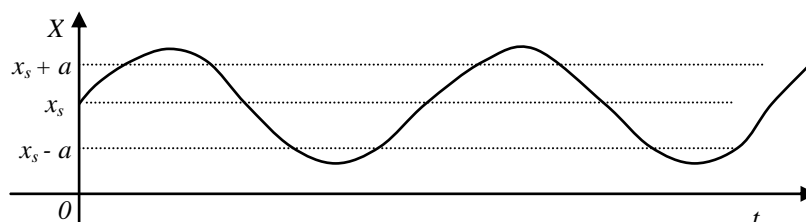
Gap

A causa dell'inerzia del sistema controllato, anche quando viene modificato il valore dell'ingresso, l'uscita si allontana ulteriormente dal set-point, prima di invertire la tendenza e rientrare verso i valori desiderati.

L'errore massimo raggiunto viene detto *overshoot*.

Overshoot

L'uscita di un sistema controllato con il metodo On-Off assumerà un andamento oscillatorio infinito, in un intervallo leggermente superiore al Gap; in pratica la variabile controllata assume il valore di set-point solo in intervalli infinitesimi.



Grafico

## Regolazione proporzionale

Un *Regolatore Proporzionale* agisce sul sistema non appena il valore della variabile controllata tende a discostarsi dal set-point, con un'azione proporzionale all'entità dell'errore.

Proporzionale

Fissato un valore  $y_0$  corrispondente al set-point (con una valutazione a catena aperta del sistema, basata sul modello teorico del legame Ingresso-Uscita del Sistema) l'ingresso dell'attuatore è ottenuto da

$$y(t) = y_0 + k_p \cdot e(t)$$

dove  $k_p$  è il *Guadagno* della regolazione, con segno *positivo* o *negativo* a seconda del tipo di sistema (ad esempio guadagno positivo per un Frigorifero, negativo per un Forno).

Guadagno

La velocità di risposta del regolatore è proporzionale al guadagno e alla velocità dell'errore stesso

$$y'(t) = k_p \cdot e'(t)$$

quindi in caso di errori costanti ( $e'(t)=0$ ) anche la velocità della valvola sarà nulla; in questo caso l'uscita del sistema si stabilizzerà su di un valore diverso da quello desiderato: questa differenza verrà detta *Offset*.

Offset

Il guadagno determina la velocità di risposta del sistema di controllo, ma anche il range di  $e(t)$  entro cui può agire la regolazione (*banda proporzionale*).

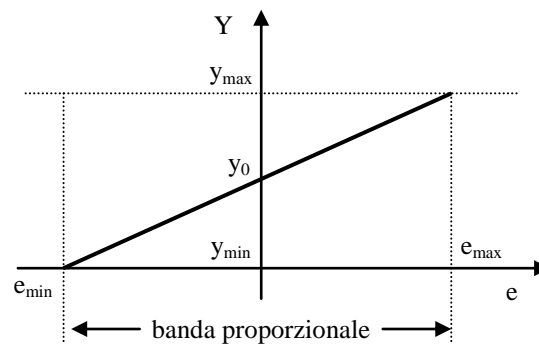
Banda Proporzionale

La banda proporzionale è legata ai valori minimo e massimo che la valvola può assumere, con un fattore inversamente proporzionale al guadagno:

$$e_{\max} = \frac{y_{\max} - y_0}{k_p} \quad e_{\min} = \frac{y_{\min} - y_0}{k_p}$$

$$\text{banda} = e_{\max} - e_{\min} = \frac{y_{\max} - y_0}{k_p} - \frac{y_{\min} - y_0}{k_p} = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{k_p}$$

- aumentando il guadagno miglioriamo la velocità di risposta del controllore, ma riduciamo la banda proporzionale;
- diminuendo il guadagno allarghiamo il campo degli errori su cui il regolatore può agire, a discapito della velocità di risposta.



## Regolazione Integrale

---

L'azione del *Regolatore Integrale* sul sistema controllato si basa sull'accumulo dell'errore con la formula

Integrale

$$y(t) = y_0 + k_i \cdot \int_0^t e(t) dt$$

dove la velocità di apertura della valvola è

$$y'(t) = k_i \cdot e(t)$$

cioè risulta proporzionale all'errore con costante di proporzionalità pari al guadagno.

In seguito ad un errore a gradino, il regolatore integrale apre progressivamente la valvola, finché la variabile controllata torna al set-point. Purtroppo a questo punto si genera un errore di segno contrario, dovuto all'eccesso di compensazione da parte del regolatore: la variabile controllata ritorna al set-point solo dopo aver descritto un percorso con integrale esattamente uguale al precedente.

Oscillazioni

A causa dei ritardi dei vari componenti, l'oscillazione continuerà per alcuni periodi, con ampiezza smorzata.

Per questo il regolatore Integrale non viene usato da solo, ma in unione con un regolatore di tipo Proporzionale.

PI

Il modello matematico di un regolatore di tipo PI è

$$y(t) = y_0 + k_p \cdot e(t) + k_i \cdot \int_0^t e(t) dt$$

L'azione combinata dei due regolatori abbrevia la fase transitoria e riporta l'uscita al valore di set-point sia con errori costanti che dopo errori occasionali.

## Regolazione Derivativa

---

Sia il regolatore proporzionale, sia quello integrale, agiscono sul sistema in base all'errore quando questo si è già manifestato.

Derivativo

Diversamente il controllo di tipo *Derivativo* cerca di anticipare le conseguenze di un disturbo, valutando la velocità di variazione dell'errore:

$$y(t) = y_0 + k_d \cdot e'(t)$$

In pratica, considerando che la derivata dell'errore coincide con la derivata dell'uscita del sistema, il controllo derivativo interviene per smorzare brusche variazioni della grandezza controllata.

Il metodo esposto è assolutamente inefficace nel caso di errori costanti, perciò esso viene utilizzato solo in concomitanza con altri regolatori, ad esempio in configurazione *PD* con modello matematico

PD

$$y(t) = y_0 + k_d \cdot e'(t) + k_p \cdot e(t)$$

In questo caso il regolatore Derivativo funge da Smorzatore dell'errore, rallentando l'effetto di forti disturbi improvvisi.

## Regolazione Proporzionale-Integrale-Derivativa

---

Il regolatore più complesso, ma che offre le maggiori capacità di controllo dell'errore, è quello che combina i tre metodi precedentemente esposti, cioè il proporzionale, l'integrale e il derivativo:

*PID*

$$y(t) = y_0 + k_p \cdot e(t) + k_i \cdot \int_0^t e(t) dt + k_d \cdot e'(t)$$

Ognuno dei tre regolatori (quattro, considerando il termine  $y_0$  dovuto al controllo a catena aperta) contribuisce secondo le proprie caratteristiche a stabilizzare nel più breve tempo possibile l'uscita del sistema.

Anello Aperto	sistema di controllo che agisce sul sistema controllato solo in base ad informazioni preliminari, senza verificare che l'uscita sia quella desiderata.
Anello Chiuso	sistema di controllo che verifica l'uscita del sistema controllato: se non è quella desiderata, il controllore opera opportune modifiche all'input del sistema.
Attuatore	complesso di componenti che hanno lo scopo di amplificare il segnale di uscita del controllore, adattandolo nel contempo all'ingresso del sistema controllato; può utilizzare una valvola.
Banda Proporzionale	intervallo degli errori entro su cui il regolatore proporzionale può agire; è inversamente proporzionale al guadagno.
Disturbi	fattori esterni aleatori che agiscono sul sistema in modo incontrollabile, alterando il corretto funzionamento del sistema stesso.
Errore	differenza tra il valore misurato della grandezza e il valore di riferimento assegnato.
Gap	margine d'errore, dovuto ai ritardi dell'anello, entro cui il regolatore On-Off non commuta la posizione della valvola.
Guadagno	rapporto tra l'errore misurato (o una sua funzione) e l'azione da effettuare sulla valvola.
Offset	errore di posizionamento dei sistemi di controllo proporzionali, nel caso di errori costanti.
Overshoot	errore massimo sull'uscita di un sistema, durante le oscillazioni nella fase transitoria dopo una sollecitazione.
Processo	insieme delle azioni, delle trasformazioni e della trasmissione dei segnali, coordinati al raggiungimento di una certa funzione o produzione industriale
Regolatore	dispositivo che fa assumere un valore costante ( <i>set-point</i> ) ad una determinata grandezza che interviene in un processo.
Regolazione Derivativa	regolazione basata sulla velocità dell'errore.
Regolazione Integrale	regolazione basata sull'accumulo dell'errore.
Regolazione Proporzionale	regolazione basata sul valore dell'errore.
Servomeccanismo	dispositivo che fa variare nel tempo la grandezza controllata, secondo una legge impostata dal segnale di riferimento.
Set-Point	valore di riferimento costante verso cui occorre far tendere i valori di una certa grandezza fisica.
Valvola proporzionale	dispositivo oleodinamico che genera una portata in uscita direttamente proporzionale al segnale elettrico di comando in ingresso.



**1 Il controllo di temperatura in un forno elettrico casalingo è un sistema**

- a) a catena aperta.
- b) a catena chiusa.
- c) misto.

**2 Su quale elemento della catena agiscono i disturbi ?**

- a) prevalentemente sul sistema controllato.
- b) solo sul sistema controllato.
- c) su tutti gli elementi della catena.

**3 Cos'è il Gap nella regolazione On-Off ?**

- a) è la differenza tra il massimo e il minimo valore raggiunti dall'uscita.
- b) è l'intervallo di valori dell'uscita entro cui la valvola non viene modificata.
- c) è il massima distanza raggiunta dall'uscita rispetto al set-point.

**4 Quanto differiscono il massimo e il minimo valore raggiunti dall'uscita nella regolazione On-Off ?**

- a) Dipende dal valore massimo della valvola.
- b) La somma del valore dell'overshoot superiore e di quello inferiore.
- c) Il doppio della dimensione dell'intervallo di Gap.

**5 Il controllo Derivativo è utilizzato**

- a) per correggere efficacemente gli errori costanti.
- b) per misurare l'accumulo dell'errore.
- c) per smorzare l'azione degli errori veloci.

**6 Da una vasca per l'irrigazione, oltre al prelievo costante, viene occasionalmente prelevata una certa quantità d'acqua. Quale tipo di controllo sulla valvola di carico è più conveniente?**

- a) Un controllo On-Off.
- b) Un controllo Proporzionale
- c) Un controllo Derivativo.

**7 Per aumentare l'intervallo dei valori di errore su cui il regolatore Proporzionale può agire, occorre**

- a) aumentare il guadagno.
- b) diminuire il guadagno.
- c) modificare il valore di riferimento  $y_0$ .

**8 Un regolatore Proporzionale può pilotare una valvola nell'intervallo [0, 100]. Fissato  $y_0=30$ , con un guadagno  $k_p=2$ , qual è la banda proporzionale ?**

- a)  $e(t) \in [-50, +50]$
- b)  $e(t) \in [-25, +25]$
- c)  $e(t) \in [-15, +35]$

**9 In caso di errori costanti come si comporta il regolatore PID ?**

- a) Come un regolatore On-Off.
- b) Come un regolatore Proporzionale-Derivativo.
- c) Come un regolatore Proporzionale-Integrale.

**10 Un regolatore integrale, in caso di errore costante**

- a) stabilizza l'uscita del sistema controllato con andamento asintotico verso il set-point.
- b) genera una successione di oscillazioni sull'uscita, prima di stabilizzarla.
- c) regola l'uscita del sistema controllato con un margine errore costante.

**11 Rappresentare il grafico nel tempo di un sistema con regolatore On-Off**

**12 Rappresentare il grafico nel tempo di un sistema con regolatore Proporzionale**

**13 Rappresentare il grafico nel tempo di un sistema con regolatore Integrale**

1 Risposta esatta: b)

---

La regolazione di un forno (o di un ferro da stiro, o di uno scaldabagno) è affidata a un dispositivo detto termostato che apre il circuito elettrico della resistenza quando la temperatura supera la soglia fissata, e lo richiude quando scende al di sotto della soglia stessa.

2 Risposta esatta: a)

---

Il sistema controllato è il più sensibile all'azione dei fattori esterni incontrollabili, anche se tutti gli elementi dell'anello possono essere disturbati.

3 Risposta esatta: b)

---

Il Gap è l'intervallo di valori dell'uscita entro cui la valvola non viene modificata.

4 Risposta esatta: b)

---

L'intervallo di Gap è il margine di oscillazione dovuto ai ritardi della misura; a questo occorre aggiungere un ulteriore allontanamento, sia superiore che inferiore, dovuto all'inerzia del sistema.

5 Risposta esatta: c)

---

Il controllo derivativo, poiché si basa sulla velocità dell'errore, ovvero sulla velocità di variazione dell'uscita del sistema, è assolutamente inefficace contro errori costanti, ma funge da smorzatore dell'errore, in unione con un controllore proporzionale.

6 Risposta esatta: b)

---

Il controllo Proporzionale agisce direttamente in base al valore dell'errore: al termine del disturbo riporta rapidamente l'uscita al valore di set-point.

7 Risposta esatta: b)

---

La banda Proporzionale è inversamente proporzionale al Guadagno, quindi diminuendo il guadagno si rallenta l'effetto dell'attuatore ma lo estende ad un più ampio intervallo di valori dell'errore.

8 Risposta esatta: c)

---

Utilizzandola formula inversa del modello matematico del regolatore proporzionale:

$$e_{\min} = \frac{y_{\min} - y_0}{k_p} = \frac{0 - 30}{2} = -15 \quad e_{\max} = \frac{y_{\max} - y_0}{k_p} = \frac{100 - 30}{2} = +35$$

### 9 Risposta esatta: c)

La derivata di un errore costante è nulla. Perciò, in questo caso, il modello del regolatore PID coincide con quello del regolatore PI.

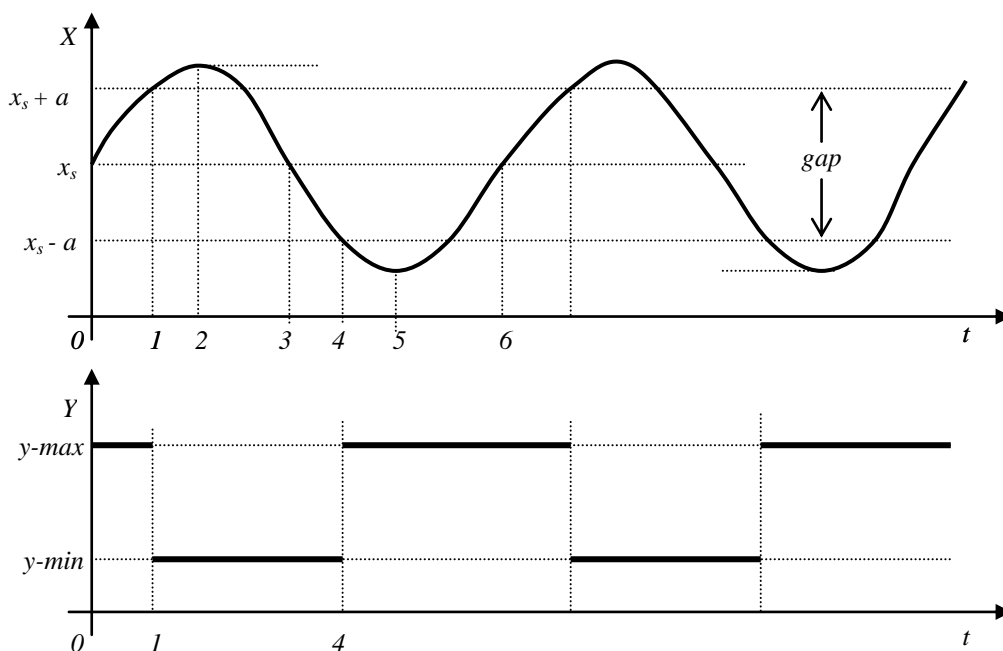
$$y(t) = y_0 + k_p \cdot e(t) + k_i \cdot \int_0^t e(t) dt + \cancel{k_d \cdot e'(t)}$$

### 10 Risposta esatta: b)

Il regolatore integrale riporta la variabile controllata al set-point solo quando l'integrale complessivo della funzione di errore si annulla.

### 11 Grafico della regolazione On-Off

L'uscita di un sistema con regolatore On-Off descrive una sequenza infinita di oscillazioni del tipo:

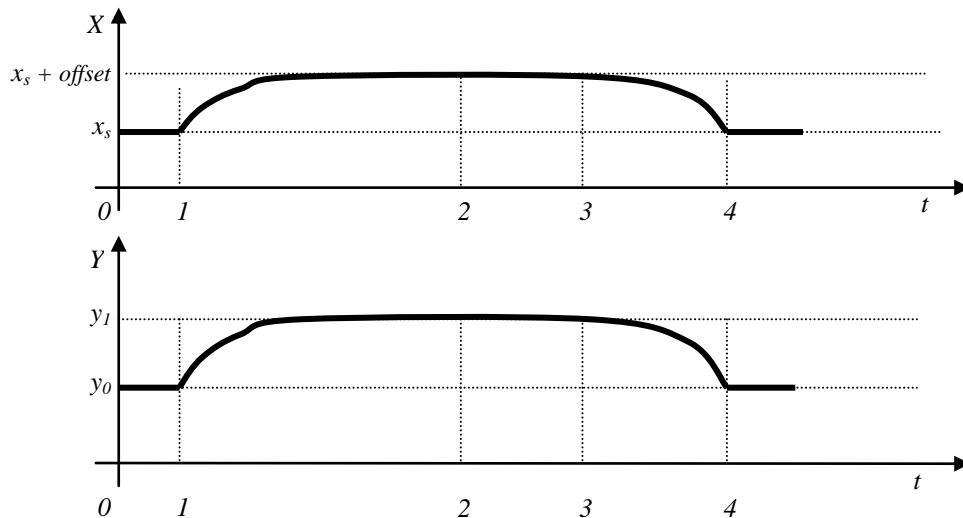


Con riferimento all'esempio di un forno elettrico, il grafico può essere così descritto:

- 0) inizialmente la valvola è aperta e l'uscita tende ad aumentare.
- 1) quando l'errore supera il gap, la valvola viene chiusa.
- 2) a causa dell'inerzia del sistema (la resistenza ancora incandescente del forno) l'uscita tende ad aumentare ancora un po' prima di invertire la tendenza (a causa della dispersione di calore).
- 3) il set-point viene raggiunto ma, a causa dei ritardi della misura, il regolatore non è in grado di intervenire.
- 4) quando l'errore supera il gap, la valvola viene aperta nuovamente.
- 5) ancora a causa dell'inerzia del sistema (nell'esempio precedente la resistenza ancora fredda) l'uscita tende a diminuire ancora un po' prima di invertire la tendenza.
- 6) il ciclo riprende e, di nuovo, quando il set-point viene raggiunto, il regolatore non è in grado di intervenire, ma deve attendere il superamento del gap.

## 12 Grafico della regolazione Proporzionale

L'uscita di un sistema con regolatore Proporzionale tende ad approssimare il set-point dopo un errore occasionale, mentre si stabilizza ad un valore costante diverso da quello desiderato (offset) in caso di errore costante.

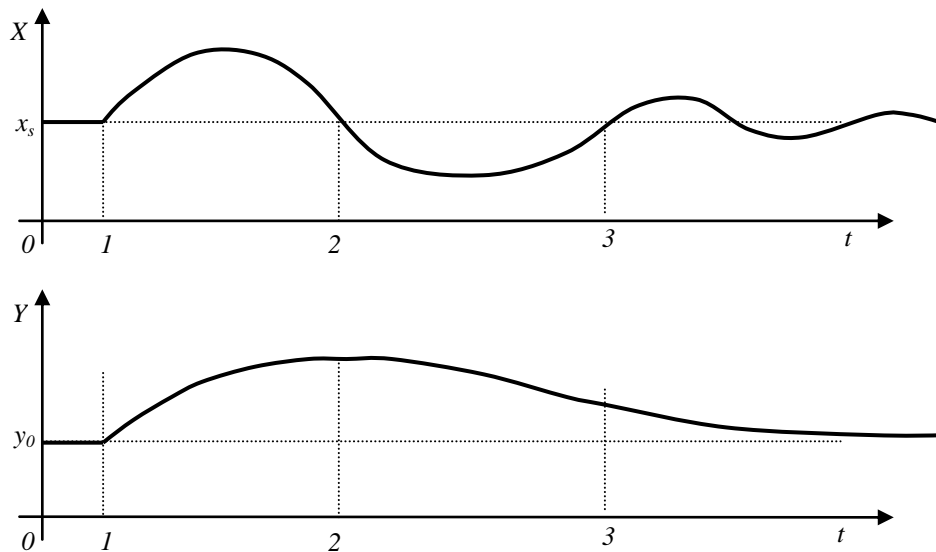


Con riferimento all'esempio di un impianto di condizionamento, il grafico può essere così descritto:

- 0) inizialmente l'uscita (la temperatura ambientale) è stabile sul set-point  $x_s$  con la valvola posizionata sul valore teorico  $y_0$  calcolato con il modello matematico del sistema.
- 1) se sul sistema interviene un disturbo improvviso e costante (ad esempio una finestra aperta sull'ambiente esterno più caldo) l'uscita del sistema tende ad allontanarsi dal valore desiderato. Il regolatore interviene in modo proporzionale all'errore (secondo il guadagno  $K$ ).
- 2) l'uscita si stabilizza su un valore pari a  $x_s + offset$  con la valvola ferma su  $y_1 = y_0 + k \cdot offset$ .
- 3) quando cessa il disturbo (la finestra viene chiusa) l'azione della valvola sul sistema tende a riportare l'uscita sul valore di set-point.
- 4) in assenza di ulteriori sollecitazioni impreviste il sistema ritorna nelle condizioni iniziali di stabilità.

### 13 Grafico della regolazione Integrale

L'uscita di un sistema con regolatore Integrale tende ad oscillare intorno al valore di set-point, con ampiezza rapidamente smorzata.



- 0) inizialmente l'uscita è stabile sul set-point  $x_s$  con la valvola posizionata sul valore teorico  $y_0$  calcolato con il modello matematico del sistema.
- 1) se sul sistema interviene un disturbo l'uscita del sistema tenda ad allontanarsi dal valore desiderato. Il regolatore interviene in modo proporzionale all'accumulo dell'errore (secondo il guadagno  $K$ ) aumentando progressivamente l'azione della valvola finché non riesce ad invertire la tendenza dell'errore.
- 2) l'uscita del sistema viene ricondotta al valore del set-point, ma, a causa dell'accumulo di errore, viene generata un errore opposto al precedente, fino ad ottenere un integrale di valore nullo.
- 3) a causa dei ritardi nell'anello di regolazione verranno introdotte ulteriori oscillazioni, di ampiezza via via decrescenti.